Β Σειρά Ασκήσεων
7 Δεκεμβρίου 2005- γραπτή παράδοση 23/11

Π. Ιωάννου & Θ. Αποστολάτου

1. Δείξτε ότι εαν $V_m(t)$ είναι ένας όγκος συνεχούς υλικού που κινείται με τη ροή $\vec{u}(\vec{x},t)$ ότι τότε

$$\frac{d}{dt}\int_{V_m(t)} \phi(\vec{x},t)dV = \int_{V_m(t)} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla\cdot(\vec{u}\phi)\right] dV \ .$$

Εξειδικεύστε το παραπάνω στη περίπτωση της μίας διάστασης. Επανερχόμενοι στις τρεις διαστάσεις αποδείξτε την εξίσωση συνέχειας που ικανοποιεί η πυκνότητα $\rho(\vec{x},t)$ ενός ρευστού στο οποίο δεν υπάρχουν πηγές ή καταβόθρες. Αποδείξτε τέλος ότι

$$\frac{d}{dt}\int_{V_m(t)} \rho\phi(\vec{x},t)dV = \int_{V_m(t)} \rho\frac{D\phi}{Dt}dV$$

όπου $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u}\cdot\nabla$ η υλική παράγωγος.

2. Ενα ρευστό κινείται μέσα σε ένα σωλήνα (μία επιφάνεια εκ περιστροφής περί τον άξονα x) διατομής $A(x)$. Εάν η πυκνότητα, $\rho(x,t)$, του ρευστού είναι μόνο συνάρτηση των (x,t) γράψτε την εξίσωση συνεχείας με μεταβλητές μόνο τα $\rho(x,t)$, $A(x)$ και τη ταχύτητα του ρευστού $u(x,t)$ στη x διεύθυνση.

3. Αποδείξτε την εξής γενίκευση του Πυθαγορείου θεωρήματος βασισμένοι στην απόδειξη του Cauchy: Σε ένα ορθό τετράεδρο που σχηματίζεται από τρείς κάθετες πλευρές το άθροισμα των τετραγώνων των επιφανειών των τριών κάθετων εδρών ισούται με το τετράγωνο της επιφανείας της κεκλιμένης έδρας.

4. Δείξτε ότι κάθε διαφορικός μετασχηματισμός στροφών μπορεί να γραφεί σε πρώτη τάξη ως $\delta_{ij} + c_{ij}$ όπου c_{ij} αντισυμμετρικός τανυστής.

5. Ισοτροπικοί τανυστές είναι οι τανυστές που δεν αλλάζουν σε μετασχηματισμούς στροφών των ορθοκανονικών αξόνων. Δείξτε ότι ο δ_{ij} είναι ισοτροπικός τανυστής δεύτερης τάξης, ο ϵ_{ijk} είναι ισοτροπικός τανυστής τρίτης τάξης και ότι δεν υπάρχουν ισοτροπικοί τανυστές πρώτης τάξης.

6. Μπορεί να αποδειχθεί ότι ο γενικότερος ισοτροπικός τανυστής τέταρτης τάξης είναι: $A_{ijkl} = a\delta_{ij}\delta_{kl} + b\delta_{ik}\delta_{jl} + c\delta_{il}\delta_{jk}$. Θεωρήστε τώρα μία κυκλική περιφέρεια. Εάν $\vec{n}$ είναι το μοναδιαία κάθετο διάνυσμα στο κύκλο υπολογίστε τα

$$\int_C n_i n_j ds \quad , \quad \int_C n_i n_j n_k n_l ds$$

επί της κυκλικής περιφέρειας C.

7. Υποθέστε ότι έχετε ένα υλικό το οποίο έχει μικροσκοπικούς βαθμούς ελευθερίας σπιν και επιτρέπει τη μεταφορά όχι μόνο ορμής αλλά και στροφορμής στην επιφάνεια ενός όγκου ενός ρευστού. Δηλαδή θεωρούμε ότι ασκείται ανα μονάδα επιφανείας ενός ρευστού μία ροπή $\vec{c}(\vec{n},\vec{x},t)$ που εξαρτάται από τη κάθετο στην επιφάνεια $\vec{n}$. Επίσης θεωρήστε ότι οι εσωτερικές αλληλεπιδράσεις των μορίων του ρευστού προκαλούν ανα μονάδα μάζας ροπή $\vec{b}$. Γράψτε την διατήρηση στροφορμής για ένα μικρό όγκο του ρευστού και κάνοντας χρήση των επιχειρημάτων του Cauchy δείξτε ότι θα πρέπει να ισχύει

$$c_i(\vec{n}) = C_{ij}n_j$$

όπου C_{ij} ένας τανυστής δεύτερης τάξης. Δείξτε τώρα ότι από την εξίοωση της στροφορμής συνάγεται η σχέση:

$$-\epsilon_{ijk}\sigma_{jk} + \rho b_i + \frac{\partial C_{ij}}{\partial x_j} = 0 \ .$$

όπου σ_{ij} ο τανυστής τάσης του υλικού. Θεωρήστε στην ανάλυση σας ότι το εσωτερικό σπιν του υλικού παραμένει σταθερό. Υπό ποίες συνθήκες μπορεί να είναι ο τανυστής τάσης συμμετρικός;