Α Σειρά Ασκήσεων
16 Νοεμβρίου 2005- γραπτή παράδοση 23/11

Π. Ιωάννου & Θ. Αποστολάτου

1. Η κίνηση μίας κούνιας μπορεί να αναλυθεί ως η κίνηση ενός επίπεδου διπλού εκκρεμούς στο πεδίο βαρύτητας όπου το κύριο σώμα μάζας M που είναι συγκεντρωμένο στη κούνια είναι συνδεδεμένο με αβαρές σχοινί μήκους R και το δεύτερο τμήμα του εκκρεμούς είναι τα πόδια μήκους l με μάζα m συγκεντρωμένη στο κάτω άκρο. Η κατάσταση περιγράφεται από τις δύο γωνίες θ και ϕ που σχηματίζουν τα εκκρεμή με τη κατακόρυφο. Θεωρούμε ότι η γωνία ϕ που σχηματίζουν τα πόδια με τη κατακόρυφο είναι δεδομένη συνάρτηση του χρόνου.

1. Γράψτε την Λαγκρανζιανή και την εξίσωση εξέλιξης της γωνίας θ για μικρές κινήσεις της κούνιας.
2. Αν θεωρήσουμε ότι η $\phi(t) = B \sin \omega_0 t$ ποία συχνότητα ω_0 πρέπει να επιλέξουμε να αιωρούμε τα πόδια μας για να αυξάνεται συνεχώς το πλάτος της ταλάντωσης ; Εκτιμείστε τη συχνότητα αυτή.
3. Σε αυτή τη περίπτωση προσδιορίστε την εξαναγκασμένη απόκριση της κούνιας $\theta = Af(t)$ και προσδιορίστε τον λόγο A/B. Το πρόσημο του λόγου αυτού είναι σύμφωνο με την εμπειρία σας ;

2. Αποδείξτε την πρόταση XXXIV και θεώρημα XXVIII της Principia του Νεύτωνα :"Σε ένα αραιό μέσο, που αποτελείται από ίσα σωματίδια που βρίσκονται σε ίσες αποστάσεις μεταξύ τους (και κινούνται με ίσες ταχύτητες), κινούνται με ίση ταχύτητα μία σφαίρα και ένας κύλινδρος στη κατεύθυνση του άξονα συμμετρίας του. Τότε η αντίσταση στη κίνηση της σφαίρας είναι η μισή του κυλίνδρου."

3. Στην απόδειξη του θεωρήματος του Poincare για την αέναη επιστροφή: Που στην απόδειξη απαιτείται η υπόθεση ότι το χαμιλτονιανό σύστημα είναι χρονοανεξάρτητο ; Μπορείται να δώσετε ένα παράδειγμα συνόλου σημείων (μέτρου αναγκαστικά μηδέν) που δεν επιστρέφουν στη περιοχή εκκίνησής των ;

3. Θεωρήστε ένα κλειστό απλό χωρίο V στο χώρο των φάσεων διάστασης $2n$ που εξελίσσεται υπό τη χαμιλτονιανή H, Η προβολή του V στο επίπεδο (q_a, p_a) ορίζει τη κλειστή καμπύλη $C_a(t)$ η οποία εξελίσσεται χρονικά. Αποδείξτε ότι το $\oint_{C_a(t)} p_a dq_a$ είναι σταθερό κατα την χαμιλτονιανή κίνηση στο χώρο των φάσεων για κάθε a.

4. Θεωρήστε το χαμιλτονιανό σύστημα $H = p^2/(2m) + V(q)$ που εκτελεί περιοδικές κινήσεις περί το σημείο ισορροπίας του $(q, p) = (0, 0)$. Αν C_E είναι η κλειστή τροχιά που αντιστοιχεί σε ενέργεια E τότε η επιφάνεια που περικλείεται από τη τροχιά είναι $A(E) = \oint_{C_E} pdq$. Δείξτε ότι η περίοδος της ταλάντωσης είναι $T(E) = dA(E)/dE$.

5. Υποθέστε ότι η αρχική πυκνότητα καταστάσεων στο χώρο των φάσεων είναι $\rho(x, p, 0) = A \exp(-x^2 - p^2)$. Προσδιορίστε τη σταθερά A για να κανονικοποιηθεί το ολοκλήρωμα της πυκνότητας στη μονάδα. Έστω οι χαμιλτονιανές $H_1 = p^2/2 + (x-1)^2/2$, $H_2 = p^2/2 - x^2/2$ και $H_3 = p^2/2 - x$. Προσδιορίστε για κάθε χαμιλτονιανή τη πυκνότητα $\rho(x, p, t)$ και σχεδιάστε την για τους χρόνους $t = 0, 1, 2$.

6. Για το χαμιλτονιανό σύστημα $H = p^2/(2m) + V(q)$ που εκτελεί περιοδικές κινήσεις υπολογίστε την πυκνότητα πιθανότητας $P_E(a)$ το σωματίδιο που έχει ενέργεια E να βρίσκεται στη θέση $x = a$. Σχεδιάστε τη πυκνότητα και δείξτε ότι $\int P_E(a)da = 1$.

7. Σωματίδιο μάζας m εκτελεί μονοδιάστατη ταλάντωση συνδεμένο με γραμμικό ελατήριο σταθεράς k σε κάποιο τοίχο. Γνωρίζουμε μόνον ότι το σωματίδιο έχει ενέργεια E_1. Κάποια στιγμή ο τοίχος μετακινείται κατά μία απόσταση a. Ποία η κατανομή πιθανότητας το σωματίδιο να έχει τώρα ενέργεια E_2 ;