

## Το Θεώρημα του Poincare της αέναης επιστροφής Χαμιλτονιανών συστημάτων (recurrence theorem)

Μία από τις πλέον ενδιαφέρουσες εφαρμογές του θεωρήματος Liouville είναι ένα θεώρημα του Poincare που αποδεικνύει ότι κάθε χαμιλτονιανό σύστημα επανέρχεται αενάως σε όλες (σχεδόν) τις επιτρεπτές καταστάσεις του.

### Η απόδειξη του Zermelo

Θεωρήστε ένα χρονοανεξάρτητο χαμιλτονιανό σύστημα το οποίο κινείται σε φραγμένη περιοχή του χώρου των φάσεων έτσι ώστε ο χώρος στον οποίο κινείται να έχει πεπερασμένο μέτρο (επιφάνεια ή όγκο στο χώρο των φάσεων). Το θεώρημα του Poincare αποδεικνύει ότι σχεδόν όλα σημεία του χώρου των φάσεων του συστήματος αυτού επαναλαμβάνονται δηλαδή ότι τα σημεία του χώρου των φάσεων που δεν επανέρχονται σε μία οσονδήποτε μικρή περιοχή από το σημείο που βρισκόταν το σύστημα κάποια χρονική στιγμή έχει μηδενικό μέτρο.

Για την απόδειξη θεωρήστε μία περιοχή  $B_0$  στο χώρο των φάσεων πεπερασμένου και μη μηδενικού μέτρου  $\omega_0$  και συμβολίστε με  $B_t$  την εξέλιξη του χωρίου την χρονική στιγμή  $t$ . Ορίζουμε ως  $\Gamma_0 = \bigcup_{t \geq 0} B_t$  την ένωση όλων των χωρίων  $B_t$  για όλους τους χρόνους  $\infty > t \geq 0$  και έστω ότι το χωρίο αυτό έχει μέτρο  $\Omega_0$ . Ομοίως ορίζουμε το χωρίο  $\Gamma_\tau = \bigcup_{t \geq \tau} B_t$  το οποίο έχει μέτρο  $\Omega_\tau$ . Είναι προφανές ότι  $\Gamma_\tau \subseteq \Gamma_0$ . Αλλά το  $\Gamma_\tau$  είναι και το χωρίο που εξελίσσεται το  $\Gamma_0$  όταν περάσουν  $\tau$  χρονικές μονάδες. Από το θεώρημα Liouville έχουμε ότι  $\Omega_0 = \Omega_\tau$  και συνεπώς τα μέτρα των  $\Gamma_\tau$  και  $\Gamma_0$  είναι ίσα που σημαίνει ότι επειδή το  $\Gamma_\tau$  είναι υποσύνολο του  $\Gamma_0$ , ότι μόνο σημεία μέτρου 0 ανήκουν στο  $\Gamma_0$  και δεν ανήκουν στο  $\Gamma_\tau$ . Συνεπώς όλα τα σημεία του  $B_0$  (εκτός από σημεία μέτρου 0) ανήκουν στο  $\Gamma_\tau$ , και συνεπώς όλα τα σημεία του  $B_0$  εκτός από σημεία μέτρου 0 θα επιστρέφουν στο  $B_0$ .

Ερώτημα: Που στην απόδειξη απαιτείται η υπόθεση ότι το χαμιλτονιανό σύστημα είναι χρονοανεξάρτητο; Μπορείται να δώσετε ένα παράδειγμα σημείων που δεν επιστρέφουν στη περιοχή εκκίνησής τους;