17.1.2006

$\int g_i x_i n_j dS = \int g_i \frac{\partial x_i}{\partial x_j} dV = \int g_i \delta_{ij} dV = g_j$ (g_j: σταθερό αφού μιλάμε για ομογενές πεδίο.

→ Επανερχόμαστε στην περίπτωση της μπάλας που κινείται μέσα σε ρευστό με πολύ μεγάλο ιξώδες. Τότε "ξεχνάμε" τους αδρανειακούς όρους στις εξισώσεις Navier-Stokes κι έτσι παίρνουμε την Stokesian approximation: $-\vec{\nabla}p + \mu \vec{\nabla}^2 \vec{u} = 0$ ισορροπία πίεσης και τριβής.

$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$, $\frac{\vec{\nabla}p}{\mu} = \vec{\nabla}^2 \vec{u}$ και ασυμπίεστο ρευστό: $\vec{\nabla}\vec{u} = 0$

Συνοριακές συνθήκες: η σφαίρα κινείται με ταχύτητα $\vec{U}$ οπότε στην επιφάνεια της σφαίρας είναι $\vec{u} = \vec{U}$.

$\vec{\nabla}\left(\frac{\vec{\nabla}p}{\mu}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}^2\vec{u}\right) \Rightarrow \vec{\nabla}^2 p = 0$ γιατί $\vec{\nabla}\vec{u} = 0$, δηλαδή η πίεση είναι αρμονική συνάρτηση. Το ίδιο και το $\vec{\omega}$: $\nabla^2 \vec{\omega} = 0$.

- $\frac{p}{\mu} = C\frac{\vec{U}\cdot\vec{x}}{r^3}$: η πίεση είναι γραμμική ως προς το $\vec{U}$ συνάρτηση (αυτός είναι ο μόνος από τους πολυπολικούς όρους στους οποίους το $\vec{U}$ μπορεί να εμφανιστεί γραμμικά)
- $\vec{\omega} = C\frac{\vec{U}\times\vec{X}}{r^3}$

→ Αν δεν είχαμε σφαίρα αλλά φυσαλίδα θα ίσχυαν οι ίδιες εξισώσεις και λύσεις εκτός της φυσαλίδας. Επίσης θα έπρεπε να βρούμε λύσεις και για το εσωτερικό, οι οποίες θα είναι και πάλι αρμονικές συναρτήσεις: $p = C\vec{U}\cdot\vec{x}$ και $\vec{\omega} = A\cdot\vec{U}\times\vec{x}$ (θεωρώντας ότι η φυσαλίδα δεν αλλάζει σχήμα και όγκο γιατί τότε το πρόβλημα γίνεται εξαιρετικά πολύπλοκο).

Απόδειξη ότι η σταθερά C που υπεισέρχεται στην έκφραση του p και του $\vec{\omega}$ είναι η ίδια:

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x_j} = C\,\frac{\partial}{\partial x_j}\left(V_i x_i \frac{1}{r^3}\right) = C\left(\frac{\partial}{\partial x_j} V_i x_i\right)\frac{1}{r^3} + C V_i x_i \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{r^3} =$$

$$= \frac{C V_i}{r^3}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial x_j} + C V_i x_i \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{r^3} = \frac{C V_i}{r^3}\delta_{ij} + C V_i x_i \frac{\partial r}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r^3}$$

είναι $\dfrac{\partial r}{\partial x_i} = \dfrac{\partial}{\partial x_i}\sqrt{x_k x_k} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x_k x_k}}\cdot\dfrac{\partial}{\partial x_i}(x_k x_k) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{r}\,2 x_k \delta_{ik} = \dfrac{x_i}{r}$

άρα $\dfrac{\partial p}{\partial x_j} = \dfrac{C V_j}{r^3} - 3 C V_i x_i \dfrac{x_j}{r}\cdot\dfrac{1}{r^4} = \dfrac{C V_j}{\partial x_j} - 3 C V_i x_i \dfrac{x_j}{r^5}$

$$\boxed{\frac{\vec{\nabla} p}{\mu} = \frac{C\vec{V}}{r^3} - 3C\frac{\vec{V}\cdot\vec{x}}{r^5}\vec{x}}$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{u}) = \vec{\nabla}\times\vec{\omega} = \cancel{\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\cdot\vec{u})}^{\,0} - \vec{\nabla}^2\vec{u} = -\vec{\nabla}^2\vec{u} \Rightarrow -\nabla^2 u_i = (\vec{\nabla}\times\vec{\omega})_i$$

Είναι $\omega_k = C\left(\varepsilon_{k\ell m} V_\ell x_m\right)\cdot\dfrac{1}{r^3}$ και $\nabla^2 u_i = \varepsilon_{ijk}\dfrac{\partial}{\partial x_j}\omega_k =$

$$= C\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\varepsilon_{k\ell m} V_\ell x_m \frac{1}{r^3}\right) = C\,\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{k\ell m}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{r^3} V_\ell x_m\right) =$$

$$= C\left(\delta_{i\ell}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{j\ell}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{r^3} V_\ell x_m\right) = V_\ell C\left(\delta_{i\ell}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{j\ell}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{x_m}{r^3}\right)$$

$$= C V_\ell\left(\delta_{i\ell}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{j\ell}\right)\left(\frac{\delta_{mj}}{r^3} - 3 x_m \frac{x_j}{r^5}\right) =$$

$$= C V_\ell\left(\delta_{i\ell}\frac{\delta_{mm}}{r^3} - \frac{\delta_{im}\delta_{j\ell}\delta_{mj}}{r^3} - \frac{3 x_m x_j}{r^5}\delta_{i\ell}\delta_{jm} + 3\frac{x_m x_j}{r^5}\delta_{im}\delta_{j\ell}\right)$$

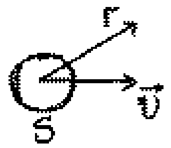
$$= C V_\ell\left(\frac{3\delta_{i\ell}}{r^3} - \frac{\delta_{i\ell}}{r^3} - \frac{3 x_j x_j}{r^5}\delta_{i\ell} + \frac{3 x_i x_j}{r^5}\delta_{j\ell}\right) =$$

$$= C V_\ell\left(\frac{2\delta_{i\ell}}{r^3} - \frac{3 x_j x_j}{r^5}\delta_{i\ell} + \frac{3 x_i x_\ell}{r^5}\right) = \frac{2 C V_i}{r^3} - C\frac{3 x_j x_j}{r^5} V_i + \frac{3 x_i}{r^5} x_\ell V_\ell$$

$$\Rightarrow -\vec{\nabla}^2 u_i = \frac{2 C V_i}{r^3} - \frac{3 r^2}{r^5} V_i C + \frac{3 x_\ell V_\ell}{r^5} x_i = -\frac{C V_i}{r^3} + \frac{3 x_\ell V_\ell}{r^5} x_i$$

άρα $\boxed{\vec{\nabla}^2\vec{u} = \dfrac{C\vec{V}}{r^3} - C\dfrac{3\,\vec{x}\cdot\vec{V}}{r^5}\vec{x}}$

οπότε για να ισχύει $\dfrac{\vec{\nabla} p}{\mu} = \vec{\nabla}^2\vec{u}$ πρέπει η σταθερά C να είναι η ίδια στις σχέσεις $p = C\dfrac{\vec{U}\cdot\vec{x}}{r^3}$ και $\vec{\omega} = C\dfrac{\vec{U}\times\vec{x}}{r^3}$

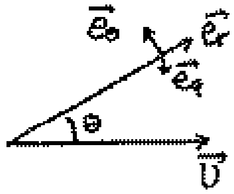


$\vec{w} = \vec{\nabla}\times\vec{u}$

$\vec{\nabla}\vec{u} = 0$ άρα μπορούμε να γράψουμε $\vec{u} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$

$\vec{A}$: διανυσματικό δυναμικό.

Είναι $\vec{u} = \vec{\nabla}\times\left(\frac{\psi}{h_3}\vec{e_\varphi}\right)$ όπου ψ: ρευματοσυνάρτηση Stokes (stream function)



Έχω θεωρήσει όλα τα πεδία αξονικά συμμετρικά γύρω από το $\vec{U}$ και παίρνω σφαιρικοπολικές συντεταγμένες.

$$(ds)^2 = h_1^2(dq_1)^2 + h_2^2(dq_2)^2 + h_3^2(dq_3)^2$$

όπου για τις σφαιρικοπολικές είναι $h_1 = 1$, $h_2 = r$, $h_3 = r\sin\theta$

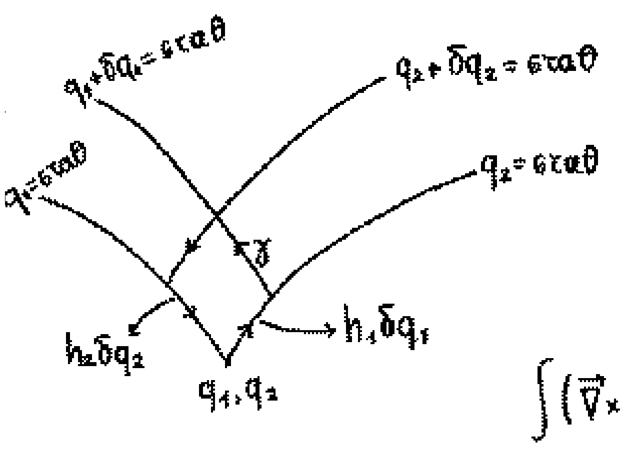
οπότε $\vec{u} = \vec{\nabla}\times\left(\frac{\psi}{r\sin\theta}\cdot\vec{e_\theta}\right)$

Ο στροβιλισμός δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\vec{e_1} & h_2\vec{e_2} & h_3\vec{e_3} \\ \partial/\partial q_1 & \partial/\partial q_2 & \partial/\partial q_3 \\ h_1A_1 & h_2A_2 & h_3A_3 \end{vmatrix} \circledast \Rightarrow$$

$$\vec{\nabla}\times\left(\frac{\psi}{h_3}\vec{e_\theta}\right) = \frac{1}{h_1h_2h_3}\cdot\begin{vmatrix} h_1\vec{e_r} & h_2\vec{e_\theta} & h_3\vec{e_\varphi} \\ \partial/\partial r & \partial/\partial\theta & \partial/\partial\varphi \\ 0 & 0 & \psi \end{vmatrix}$$

Η σχέση ⊛ αποδεικνύεται με τη βοήθεια του ολοκληρωτικού θεωρήματος του Stokes:



Βρισκόμαστε πάνω σε επιφάνεια q_3 = σταθ. και παίρνουμε τις καμπύλες που φαίνονται δίπλα και από τις οποίες σχηματίζεται το "τετράγωνο" που περικλείεται από την καμπύλη γ. Είναι

$$\int(\vec{\nabla}\times\vec{u})\vec{n}\,dS = \int(\vec{\nabla}\times\vec{u})\cdot\vec{n}_3\,dS = \oint_\gamma \vec{u}\cdot d\vec{r}$$

$\int (\vec{\nabla}\times\vec{u})\vec{n}_3 dS = (\vec{\nabla}\times\vec{u})_3 h_1 h_2 dq_1 dq_2$ όταν η επιφάνεια dS γίνεται πολύ μικρή!

- Τα h_1, h_2 είναι και αυτά συναρτήσεις των q_1, q_2

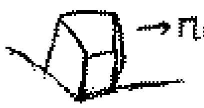
$$\oint_{\delta} \vec{u}\, d\vec{r} = u_1 h_1 dq_1 - u_1(q_2+\delta q_2) h_1(q_2+\delta q_2) dq_1 - u_2 h_2 dq_2 +$$

$$u_2(q_1+\delta q_1) h_2(q_1+\delta q_1) dq_2 = (\vec{\nabla}\times\vec{u})_3 h_1 h_2 dq_1 dq_2 \Rightarrow$$

$$(\vec{\nabla}\times\vec{u})_3 h_1 h_2 dq_1 dq_2 = -\frac{\partial(u_1 h_1)}{\partial q_2} dq_1 dq_2 + \frac{\partial(u_2 h_2)}{\partial q_1} dq_1 dq_2 \quad \text{οπότε}$$

$$(\vec{\nabla}\times\vec{u})_3 = \frac{1}{h_1 h_2}\left(\frac{\partial(h_2 u_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(h_1 u_1)}{\partial q_2}\right)$$

- Με ανάλογο τρόπο μπορούν να αποδειχθούν οι τύποι που δίνουν την απόκλιση και τη λαπλασιανή σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες:


→ παίρνουμε μικρό "κύβο" $\quad \int \nabla^2\phi\, dV = \int \frac{\partial\phi}{\partial x_i} n_i dS$

στο όριο $dV \ll$ είναι $\int \nabla^2\phi\, dV = \nabla^2\phi\, h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3$

- Η βαθμίδα δίνεται ως $\left(\frac{1}{h_1}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial q_1}, \frac{1}{h_2}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial q_2}, \frac{1}{h_3}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial q_3}\right)$ το οποίο

αποδεικνύεται από τη σχέση $d\phi = \vec{\nabla}\phi\cdot d\vec{r} = \vec{\nabla}\phi\cdot(h_1 d\vec{q}_1 + h_2 d\vec{q}_2 + h_3 d\vec{q}_3)$

Είναι λοιπόν $\vec{u} = \vec{\nabla}\times\left(\frac{\psi}{r\sin\theta}\cdot\vec{e}_\varphi\right)$

$\psi = \psi(r,\theta)$: λόγω της συμμετρίας γύρω από το $\vec{U}$ δεν υπάρχει εξάρτηση από το ϕ. Διαφορετικά: το $\vec{u} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$ είναι πολικό διάνυσμα, επομένως το $\vec{A}$ πρέπει να είναι αξονικό διάνυσμα ώστε ο στροβιλισμός του να δίνει πολικό διάνυσμα. Επομένως $\vec{A} = f(r)\vec{U}\times\vec{n}$ και το $\vec{U}\times\vec{n}$ είναι στη διεύθυνση ϕ.

$$\vec{u} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\cdot\begin{vmatrix} \vec{e}_r & r\vec{e}_\theta & r\sin\theta\,\vec{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ 0 & 0 & \psi \end{vmatrix} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\cdot\vec{e}_r\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \frac{r\vec{e}_\theta}{r^2\sin\theta}\left(-\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)$$

$$\vec{u} = \left(\frac{1}{r^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\theta},\ -\frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial r},\ 0\right)$$

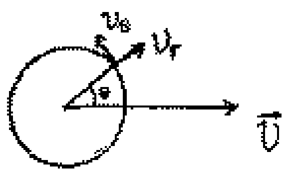
$$\vec{\nabla}\times\vec{u} = \vec{\omega} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\cdot\begin{vmatrix} \vec{e}_r & r\vec{e}_\theta & r\sin\theta\,\vec{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ \frac{1}{r^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\theta} & -\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial r} & 0 \end{vmatrix} = \frac{\vec{e}_\varphi}{r}\left[-\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right]$$

$$= -\frac{\vec{e}_\varphi}{r}\cdot\frac{1}{\sin\theta}\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \sin\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta}\,\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right]$$

$$\vec{\omega} = C\,\frac{\vec{V}\times\vec{X}}{r^3} = \frac{C\,V\sin\theta}{r^2}\,\vec{e}_\varphi$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{\sin\theta}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\,\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = -C\,\frac{V\sin^2\theta}{r} \qquad (**)$$

Συνοριακές συνθήκες



$$\left.\begin{aligned} V_r &= V\cos\theta \\ V_\theta &= -V\sin\theta \end{aligned}\right\}\ \text{οπότε για } r=a \text{ (πάνω στη σφαίρα)}\quad u_r = V\cos\theta\,,\ u_\theta = -V\sin\theta$$

Η γωνιακή εξάρτηση του ψ είναι προφανής από την $(**)$

$\psi = f(r)\sin^2\theta$ ($\rightarrow$ με μία παραγώγιση ως προς θ γίνεται $\sin\theta\cos\theta/\sin\theta$ $\rightarrow \cos\theta$, με μία ακόμη παραγώγιση γίνεται $\sin\theta\cdot\sin\theta \rightarrow \sin^2\theta$)

οπότε: $\quad f'' - \dfrac{2f}{r^2} = -C\,\dfrac{V}{r}$

Μια απλή λύση της μη ομογενούς είναι $f(r) = \dfrac{CVr}{2}$

Οι λύσεις της ομογενούς είναι της μορφής $f(r) \sim r^{a}$

$a(a-1)r^{a-2} - 2r^{a-2} = 0 \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow \underline{a=-1}$ και $\underline{a=2}$

οπότε βρήκαμε δύο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις: Ar^{-1} και Br^2.

$f(r) = \dfrac{CVr}{2} + \dfrac{A}{r} + Br^2$ γενική λύση

Παρατηρήσεις

1) Το $f'' - \dfrac{2f}{r^2}$ αναπαριστά τον στροβιλισμό, επομένως οι δύο λύσεις της ομογενούς είναι οι αστρόβιλες λύσεις! Η $CVr/2$ είναι η λύση που έχει στροβιλισμό.

2) Επειδή θέλουμε η ταχύτητα να μηδενίζεται στο άπειρο πρέπει $B=0$. Αν $B\neq 0$ θα είχαμε στο άπειρο σταθερή ταχύτητα $u=B$.

$$\psi = \left(\frac{CVr}{2} + \frac{A}{r} \right) \sin^2\theta$$

– Ποια είναι τα C, A που ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες;

$$\left. \begin{aligned} u_r\Big|_{r=a} &= \frac{2f(a)\cos\theta}{a^2} = V\cos\theta \\ u_\theta\Big|_{r=a} &= -\frac{\sin\theta}{a} f'(a) = -V\sin\theta \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} f(a) &= \frac{Va^2}{2} \\ f'(a) &= Va \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} f(a) &= \frac{CVa}{2} + \frac{A}{a} = \frac{Va^2}{2} \quad (\times a) \\ f'(a) &= \frac{CV}{2} - \frac{A}{a^2} = Va \quad (\times a^2) \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} \frac{CVa^2}{2} + A &= \frac{Va^3}{2} \\ \frac{CVa^2}{2} - A &= Va^3 \end{aligned} \right\} \; CVa^2 = \frac{3}{2} Va^3$$

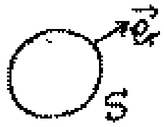
και $2A = -\dfrac{Va^3}{2}$ οπότε έτσι προσδιορίζουμε το πεδίο ταχύτητας.

$$\psi = \left[\frac{3}{4} Var - \frac{Va^3}{4r} \right] \sin^2\theta \quad \text{οπότε}$$

$$u_r = V\left[3ar - \frac{a^3}{r}\right] \frac{\cos\theta}{2r^2} \quad \text{και} \quad u_\theta = -\frac{V}{2r}\sin\theta \left[\frac{3a}{2} + \frac{a^3}{2r^2}\right]$$

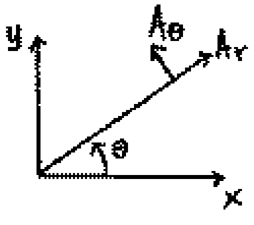
Στο άπειρο η ταχύτητα πάει ως $u = O\left(\frac{1}{r}\right)$.

– Ποια είναι η δύναμη που ασκείται στη σφαίρα;



$\vec{F} = \int_S \left(\sigma_{r\theta} \vec{e}_\theta + \sigma_{rr} \vec{e}_r \right) dS$. Το ολοκλήρωμα αυτό μπορεί να υπολογιστεί και στο άπειρο επειδή $\dfrac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$.

$$\int \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dV = \int_{S_\infty} \sigma_{ij} n_j dS - \int_S \sigma_{ij} n_j dS = 0 \Rightarrow \int_S \sigma_{ij} n_j dS = \int_{S_\infty} \sigma_{ij} n_j dS$$



$$A_x = A_r\cos\theta - A_\theta \sin\theta$$
$$A_y = A_r \sin\theta + A_\theta \cos\theta$$

Είναι
$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \sin\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}$$
$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta \frac{\partial}{\partial r} + \cos\theta \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}$$

Υπολογίζω το $\left.\dfrac{\partial u_x}{\partial x}\right|_{\theta=0}$: $\quad \sigma_{rr} = -p + 2\mu \dfrac{\partial u_r}{\partial r} = -p + 2\mu \left.\dfrac{\partial u_x}{\partial x}\right|_{\theta=0}$

$\sigma_{r\theta} = \mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)$ παίρνουμε τους καρτεσιανούς άξονες στραμμένους κατά θ και υπολογίζουμε στο $\theta=0$:

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = \sin\theta \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(u_r\cos\theta - u_\theta\sin\theta\right) + \cos\theta\,\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(u_r\cos\theta - u_\theta\sin\theta\right)$$

$$\left.\frac{\partial u_x}{\partial y}\right|_{\theta=0} = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u_r}{\partial\theta} - \frac{u_\theta}{r}$$

Ομοίως υπολογίζουμε $\left.\frac{\partial u_y}{\partial x}\right|_{\theta=0}$

και αντικαθιστώντας βρίσκουμε το $\sigma_{r\theta}$.