



## ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

### Τμήμα Φυσικής

#### Ασκήσεις Μηχανικής Μεταπτυχιακού

9 Ιανουαρίου 2012

Έστω ο ερμιτιανός πίνακας:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & .1 & 0 \\ .1 & 2 & 2.2 \\ 0 & 2.2 & 2 \end{pmatrix}$$

- (α) Προκειμένου να βρούμε τις ιδιοτιμές του πειραματικά θα εκτελέσουμε το ακόλουθο Monte Carlo πείραμα. Θα θεωρήσουμε τυχαία διανύσματα  $a = (x, y, z)$  και θα υπολογίσουμε για καθένα από αυτά το πηλίκο Rayleigh

$$R[a] = \frac{(a, Ha)}{(a, a)}.$$

Στο τέλος θα κατασκευάσουμε ένα ιστόγραμμα που θα δείχνει πόσο συχνά εμφανίστηκε κάποια τιμή του  $R$ . “Βλέπετε” στο διάγραμμα αυτό τις ιδιοτιμές; [Ίσως προβληματιστείτε τι εύρος τυχαίων τιμών να λάβετε για τα  $x, y, z$ . Προχωρήστε αυθαίρετα.]

- (β) Μήπως φάγαμε πολύ υπολογιστικό χρόνο άσκοπα; Συγκρίνατε την τιμή της  $R[a]$  με αυτή της  $R[2a]$ . Παίζει ρόλο στην τιμή του πηλίκου  $R$  το μέτρο του διανύσματος, ή η κατεύθυνσή του, ή και τα δύο; Σκεφθείτε πώς θα εκμεταλευτείτε την πληροφορία αυτή προκειμένου η τυχαιότητα να χρησιμοποιείται πιο αποδοτικά στην κάλυψη όλων των δυνατών διανυσμάτων που οδηγούν σε διαφορετικές τιμές πηλίκου.
- (γ) Κατασκευάστε μοναδιαία διανύσματα τυχαίας κατεύθυνσης  $a = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$  με  $\theta, \phi$  τυχαίες γωνίες από 0 ως  $\pi$  η πρώτη και από 0 ως  $2\pi$  η δεύτερη. Ξαναφτιάξτε το ιστόγραμμα τιμών του  $R$ . Υπάρχει καθόλου συμφωνία με τα ευρήματα του (α);
- (δ) Τώρα έχετε μάθει αρκετά ώστε να σκεφθείτε αν όλα τα προηγούμενα βήματα ήταν λογικά. Αυτό που θέλετε είναι να διαλέξετε εντελώς τυχαία την κατεύθυνση του διανύσματος  $a$ , χωρίς να προτιμήσετε κάποια διεύθυνση. Αυτό κάνατε στο ερώτημα (γ); Αν δεν είστε σίγουροι ζωγραφίστε τα τυχαία σημεία που πήρατε για να δείτε αν είναι ομοιόμορφα κατανεμημένα σε μια σφαίρα.
- (ε) Πώς θα αλλάζατε την κατανομή των τυχαίων τιμών της  $\theta$  ώστε να κατανεμίσετε ομοιόμορφα τα διανύσματα σε μια σφαίρα; Αν η κατανομή που θέλετε να επιτύχετε είναι η  $f(\theta)$  ποια μεταβλητή θα πάρετε ομοιόμορφα τυχαία αντί της  $\theta$ ; Κάντε το και πάρετε πάλι το ιστόγραμμα. Παρατηρείτε συσσώρευση τιμών του  $R$  κοντά στις ιδιοτιμές του πίνακα;
- (στ) Τώρα συγκρίνατε τα ιστογράμματα των (α), (γ), (ε). Γιατί είναι πιο εμφανείς οι ιδιοτιμές στο (ε); Εξηγήστε γιατί οι ακραίες ιδιοτιμές δεν εμφανίζονται ως κορυφές στο ιστόγραμμα αλλά ως ελάχιστα. [Σκεφθείτε το σχήμα της επιφάνειας που σχηματίζεται από την συνάρτηση  $f(a) = R[a]$  και την τομή αυτής με την  $(a, a) = C$  για διάφορες τιμές του  $C$ .]