

# ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

## Τμήμα Φυσικής

### Ασκήσεις Μηχανικής Μεταπτυχιακού

22 Δεκεμβρίου 2009 Σας ευχόμαστε χρόνια πολλά και καλή χρονιά

I. Είδαμε ότι το ελεύθερο σωματίδιο έχει 10 συμμετρίες: η Λαγκραντζιανή είναι αναλλοίωτη στις χωρικές μεταθέσεις (3 γεννήτορες), στις στροφές (3 γεννήτορες), στους γαλιλαϊκούς μετασχηματισμούς (3 γεννήτορες) και στη χρονική μετάθεση (1 γεννήτορας) και σε κάθε συμμετρία αντιστοιχεί και μία διατηρούμενη ποσότητα (10 διατηρήσιμες ποσότητες). Δείξτε ότι το ίδιο ισχύει για δύο (ή πολλά) σωματίδια που αλληλεπιδρούν με νεωτώνειες δυνάμεις και προσδιορίστε τις αντιστοιχούσες διατηρούμενες ποσότητες.

II. Πόσες ποσότητες διατηρούνται αν το ελεύθερο σωματίο έχει φορτίο και κινείται σε σταθερό μαγνητικό πεδίο;

III. Στη άσκηση αυτή θα ελέγξουμε την ακρίβεια των αδιαβατικών αναλλοιώτων. Θεωρήστε τον αρμονικό ταλαντωτή με μεταβλητή συχνότητα:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2(\epsilon t)x^2}{2}$$

και  $\epsilon \ll 1$ .

1. Δείξτε ότι το αδιαβατικό αναλλοίωτο είναι:

$$I = \frac{E}{\omega(\epsilon t)}$$

2. Χωρίς καμμία προσέγγιση δείξτε ότι οι εξισώσεις κίνησης σε μεταβλητές γωνίας - δράσης είναι:

$$\dot{\theta} = \omega + \frac{\epsilon \omega'}{2\omega} \sin 2\theta, \quad \dot{I} = -\epsilon \frac{I\omega'}{\omega} \cos 2\theta.$$

με  $\omega' = d\omega(t)/dt$ .

3. Για τη συγκεκριμένη περίπτωση:

$$\omega = \omega_0(1 + \epsilon t)$$

για  $t > 0$  και τις τιμές  $\omega_0 = 1$ ,  $\epsilon = 0.1$ , υπολογίστε αριθμητικά την εξέλιξη του  $I$ ,  $\theta$  για το χρονικό διάστημα  $[0, 1/\epsilon^2]$  αν αρχικά  $I(0) = 1$ ,  $\theta(0) = 0$  αλλά και της τιμής της ενέργειας  $E(t)$  συναρτήσει του χρόνου. Σχολιάστε το αποτέλεσμα σας.