

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Ασκήσεις Μηχανικής Μεταπτυχιακού

15 Δεκεμβρίου 2009

1. Ο κανονικός μετασχηματισμός $Q = f(q, p, \lambda)$, $P = g(q, p, \lambda)$ που εξαρτάται συνεχώς και διαφορίσιμα από τη συνεχή παράμετρο λ παράγεται από τον γεννήτορα $S_1(q, Q, \lambda)$ ή ισοδύναμα από τον $S_2(q, P, \lambda)$ που συνδέονται με τη σχέση: $S_2(q, P, \lambda) = S_1(q, Q, \lambda) + PQ$. Δείξτε ότι τότε είναι:

$$\frac{\partial S_2}{\partial \lambda} = \frac{\partial S_1}{\partial \lambda}$$

2. Ο κανονικός μετασχηματισμός $(q, p) \rightarrow (Q, P)$ ορίζει τη νέα θέση Q ως $Q = q^2$. Προσδιορίστε την αντιστοιχούσα ορμή P και σχεδιάστε τους (Q, P) άξονες στο χώρο των φάσεων στο επίπεδο (q, p) . Πως μετασχηματίζεται η Χαμιλτονιανή $H = p^2 + q^2$; Προσδιορίστε τη τροχιά στις συντεταγμένες (Q, P) και έπειτα στις (q, p) .

3. Θεωρήστε κίνηση σωματιδίου μάζας m στο δυναμικό $V(x) = m(x + a)^2/2$ για $x < 0$ και $V(x) = m(x - a)^2/2$ για $x > 0$. Υπάρχουν τρεις περιοχές με περιοδικές κινήσεις και σε καθε μία μπορούν να ορισθούν αντίστοιχες μεταβλητές γωνίας-δράσης (θ_i, I_i) . Για κάθε περιοχή προσδιορίστε την I_i και την χαμιλτονιανή $H(I_i)$ και εξαντού προσδιορίστε την $\omega(I_i)$. Μπορείτε να προσδιορίσετε τις θ_i ;

4. Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται στο μονοδιάστατο δυναμικό

$$V(x) = \begin{cases} 0, & |x| < x_0 \\ \frac{1}{2}k(x - x_0)^2, & |x| \geq x_0 \end{cases}$$

όπου $x_0 > 0$. Προσδιορίστε τις μεταβλητές γωνίες δράσης και προσδιορίστε τη τροχιά σε αυτές τις συντεταγμένες. Υπάρχουν τιμές της ενέργειας του σωματιδίου ώστε αυτό να εκτελεί ισόχρονες ταλαντώσεις;