

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Ασκήσεις Μηχανικής Μεταπτυχιακού

25 Νοεμβρίου 2009

1. Σύστημα έχει Χαμιλτονιανή

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

με $V(x)$ τέτοιο ώστε η κινήση να είναι περιοδική. Το σύστημα έχει προετοιμαστεί να έχει ενέργεια E αλλά δεν έχουμε γνώση της θέσης και της ορμής του σωματιδίου. Ποια η πυκνότητα πιθανότητας να βρίσκεται το σωματίδιο σε κάποια θέση a ;

2. Θεωρήστε ότι έχουμε συστήματα κατανομημένα αρχικά με πυκνότητα $\rho(x, p, 0) = \exp(-x^2 - p^2)$ στο χώρο των φάσεων. Υπολογίστε την πυκνότητα $\rho(x, p, t)$ στις περιπτώσεις που η δυναμική διέπεται από τις εξής Χαμιλτονιανές:

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{(x-1)^2}{2}, \quad H = \frac{p^2}{2} - \frac{x^2}{2}, \quad H = \frac{p^2}{2} - x.$$

Αν θέλετε σχεδιάστε την εξέλιξη ενός αρχικού χωρίου σε ένα υπολογιστή.

3. Προσδιορίστε πρώτα τον διαδότη $\Phi(t)$ που εξελίσσει τις καταστάσεις του αρμονικού ταλαντωτή με Χαμιλτονιανή:

$$H = \frac{p^2}{2} + \omega^2 \frac{x^2}{2}$$

Τώρα θεωρήστε ότι ο ταλαντωτής εναλλάσσεται συνεχώς μεταξύ δύο καταστάσεων: την κατάσταση στην οποία η συχνότητα του είναι $\omega_+ = \omega + \epsilon$ η οποία διαρκεί επί χρονικό διάστημα π και στη κατάσταση στην οποία η συχνότητα είναι $\omega_- = \omega - \epsilon$ και η οποία και αυτή διαρκεί επί χρονικό διάστημα π . Ο ταλαντωτής δηλαδή εξελίσσεται ως εξής: $\dots + - + - + - + - \dots$ και όπως είναι εμφανές η εναλλαγή $+ -$ που έχει συνολική διάρκεια 2π επαναλαμβάνεται περιοδικά με περίοδο $T = 2\pi$. Υπολογίστε το διαδότη $\Phi(T)$ που διέπει την εξέλιξη των καταστάσεων κατά μία περίοδο. Θεωρήστε τώρα το χωρίο αρχικών καταστάσεων $|x| < 1$ και $|p| < 1$. Προσδιορίστε το σχήμα του χωρίου αυτού μετά από χρόνο nT συναρτήσει του n . Τι συμβαίνει στο χωρίο αυτό όταν $\omega = 1/2$ και $\epsilon = 0.1$; (Αν θέλετε χρησιμοποιήστε υπολογιστή).