ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξέταση στη Μηχανική του Μεταπτυχιακού

17 Μαρτίου 2006

Τμήμα Π. Ιωάννου & Θ. Αποστολάτου

Απαντήστε και στα 4 Θέματα με σαφήνεια και απλότητα. Οι ολοκληρωμένες απαντήσεις εκτιμώνται ιδιαιτέρως. Καλή σας επιτυχία.

ΘΕΜΑ Α (25 μονάδες) Θεωρήστε ένα σωματίδιο που κινείται στο χώρο υπό την επίδραση του δυναμικού:

$$V = \sigma \vec{k} \cdot \vec{L} \, ,$$

όπου $\vec{k}$ μοναδιαίο διάνυσμα στη διεύθυνση του z και $\vec{L}$ η στροφορμή του ως προς την αρχή.

1. Γράψτε έναν απειροστό μετασχηματισμό στροφής ως προς κάποιο άξονα $\vec{n}$ και προσδιορίστε την πρώτης τάξης μεταβολή της Λαγκραντζιανής. Σε ποιούς μετασχηματισμούς στροφής παραμένει η Λαγκραντζιανή αναλλοίωτη; Προσδιορίστε την ποσότητα που διατηρείται.
2. Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης σε κυλινδρικές πολικές συντεταγμένες, (r, θ, z).
3. Σχεδιάστε την κίνηση αν το σωματίδιο αρχικά βρίσκεται σε κάποιο σημείο του χώρου με ταχύτητα: $\dot{r} = 0, \dot{\theta} = \sigma, \dot{z} = 0$.
4. Τι συμβαίνει αν αρχικά έχει ταχύτητα: $\dot{r} = 0, \dot{\theta} = 2\sigma, \dot{z} = 0$;

ΘΕΜΑ Β (25 μονάδες) Θεωρήστε τη ροή:

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = -\nabla \left(\beta \, \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{2} \right) + \Omega(t) \, \vec{k} \times \vec{r} \, ,$$

όπου το $\vec{r}$ έχει καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y, z), β είναι σταθερά, t ο χρόνος και $\vec{k}$ το μοναδιαίο διάνυσμα στη z διεύθυνση.

1. Γράψτε τις τρεις καρτεσιανές εξισώσεις της τροχιάς ενός σωματιδίου που κινείται με αυτή τη ροή.
2. Σωματίδια σχηματίζουν αρχικά κυκλική περιφέρεια $\gamma(0) : x^2 + y^2 = 1$ στο επίπεδο $z = 1$. Δείξτε ότι για κάθε t τα σωματίδια θα βρίσκονται επί της κυκλικής περιφέρειας $\gamma(t)$:
$$x^2 + y^2 = a^2(t) \quad , \quad z = \frac{1}{a^2(t)} \, .$$
Προσδιορίστε το $a(t)$ και σχεδιάστε γενικά τις τροχιές και τη κίνηση αυτού του δακτυλίου σωματιδίων.
3. Για ποία συνάρτηση $\Omega(t)$ η κυκλοφορία:
$$\oint_{\gamma(0)} \vec{u}(\vec{r}, 0) \cdot d\vec{r} = \oint_{\gamma(t)} \vec{u}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{r}$$
διατηρείται;
4. Γράψτε τις εξισώσεις που πρέπει να ικανοποιεί η ροή αυτή για να προκύπτει ως ροή ενός ιδανικού και ασυμπίεστου ρευστού σταθερής πυκνότητας και δείξτε ότι οι δυναμικές εξισώσεις ικανοποιούνται μόνο αν η $\Omega(t)$ αυξάνεται εκθετικά με τον τρόπο που προσδιορίσατε στο προηγούμενο ερώτημα, και με στροβιλισμό
$$\vec{\omega}(t) = \omega_0 e^{2\beta t} \, \vec{k} \, .$$
[Υπ. Για να το αποδείξτε αυτό υπολογίστε τον στροβιλισμό της ροής και γράψτε την εξίσωση εξέλιξης του στροβιλισμού. (Ισχύει η ταυτότητα $\vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = \nabla(|\vec{u}|^2/2) + \omega \times \vec{u}$.)]

ΘΕΜΑ Γ (25 μονάδες)

Σφαίρα ακτίνας a κινείται με ταχύτητα $\vec{U}(t)$ μέσα σε ένα ιδανικό ρευστό σταθερής πυκνότητας ρ που είναι ακίνητο σε πολύ μεγάλες αποστάσεις από τη σφαίρα. Θεωρούμε ότι η ροή του ρευστού είναι αστρόβιλη και ότι προκύπτει από το δυναμικό:

$$\phi(r,\theta,t) = \left(A(t)r + \frac{B(t)}{r^2}\right)\cos\theta\ ,$$

όπου r η απόσταση από το κέντρο της κινούμενης σφαίρας και θ η πολική γωνία με την σύμβαση η $\theta = 0$ να συμπίπτει με τη στιγμιαία διεύθυνση του $\vec{U}(t)$.

1. Προσδιορίστε τις συναρτήσεις $A(t)$ και $B(t)$.

2. Η κινητική ενέργεια του ρευστού είναι:

   $$T = -\frac{\rho}{2}\int_S \phi\frac{\partial\phi}{\partial r}dS$$

   όπου S η επιφάνεια της σφαίρας. Δείξτε ότι:

   $$T = \frac{1}{4}M|\vec{U}(t)|^2\ .$$

   όπου $M = 4\pi a^3\rho/3$ η μάζα του εκτοπιζομένου από τη σφαίρα υγρού.

3. Κατασκευάστε την ενεργό Λαγκραντζιανή συνάρτηση μίας σφαίρας μάζας M_0 που κινείται με ταχύτητα $\vec{U}(t)$ σε ένα αστρόβιλο ιδανικό ρεύστο σταθερής πυκνότητας που εκτείνεται μέχρι το άπειρο εντός του ομογενούς πεδίου βαρύτητας έντασης $\vec{g}$. Γράψτε τις εξισώσεις κίνησης, και εξηγήστε τη φυσική σημασία κάθε όρου.

4. Δείξτε ότι μία σφαιρική φυσαλλίδα που έχει πυκνότητα ρ_a με $\rho_a << \rho$ αρχίζει να κινείται στο ομογενές πεδίο βαρύτητας κατακόρυφα με επιτάχυνση που είναι σε καλή πρόσεγγιση ίση με $-2\vec{g}$.

ΘΕΜΑ Δ (25 μονάδες)

Θεωρήστε μία ακλόνητη σφαίρα ακτίνας b και μία ομόκεντρη σφαίρα ακτίνας $a < b$ που περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\Omega}$. Η περιοχή μεταξύ των δύο σφαιρών καταλαμβάνεται από ρευστό ιξώδους μ και σταθερής πυκνότητας ρ. Υποθέτουμε ότι οι αδρανειακές δυνάμεις είναι αμελητέες και η ροή περιγράφεται από τις εξισώσεις ενός Stokesian ρευστού.

1. Ποία αδιάστατη σταθερά πρέπει να είναι μικρή για να ισχύει αυτή η προσέγγιση.

2. Γράψτε τις εξισώσεις που διέπουν την ροή και δείξτε με γενικά επιχειρήματα ότι το πεδίο της πίεσης p είναι ομογενές και ότι η μονή μορφή του πεδίου ταχυτήτων που επιτρέπεται είναι:

   $$\vec{u} = \vec{\Omega} \times \vec{x}\ f(r)$$

   όπου $\vec{x}$ το διάνυσμα θέσης με αρχή το κέντρο των σφαιρών και $r = |\vec{x}|$. Περιγράψτε το πεδίο ταχύτητας που προκύπτει.

3. Επιβεβαιώστε ότι η παραπάνω ροή ικανοποιεί την εξίσωση συνέχειας.

4. Τι συνοριακές συνθήκες πρέπει να ικανοποιεί η συνάρτηση $f(r)$; Δείξτε ότι η συνάρτηση αυτή ικανοποιεί την εξίσωση:

   $$r\left(\frac{f'}{r}\right)' + 5\frac{f'}{r} = 0\ ,$$

   όπου η παραγώγηση ως προς r συμβολίζεται με τον τόνο, $'$. Προσδιορίστε τώρα την $f(r)$.

5. Υπολογίστε τον τανυστή παραμόρφωσης e_{ij} της ροής αυτής (μην αντικαταστήστε την συγκεκριμένη μορφή της $f(r)$) και δείξτε ότι είναι:

$$\vec{x} \times \vec{\Sigma} = \mu \vec{x} \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{x}\right) \, r f'(r) \; .$$

όπου:

$$\Sigma_i = \sigma_{ij} x_j \; .$$

6. Υπολογίστε τη ροπή που ασκείται από το ρευστό στην εσωτερική σφαίρα. Δείξτε ότι στην εξωτερική σφαίρα ασκείται ίση και αντίθετη ροπή.

Λύσεις

Θέμα Β

1. Η τροχιά κάθε σωματιδίου δίνεται από τις:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\beta x - \Omega(t) y \; , \\ \frac{dy}{dt} &= -\beta y + \Omega(t) x \; , \\ \frac{dz}{dt} &= 2\beta z \; . \end{aligned}$$

2. Από τη τρίτη προκύπτει ότι $z = z_0 e^{2\beta t}$ και συνεπώς σημεία που βρίσκονται κάποια στιγμή στο ίδιο επίπεδο θα παραμείνουν σε ένα επίπεδο. Πολλαπλασιάζοντας τη πρώτη με x και τη δεύτερη με y προκύπτει

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(x^2 + y^2) = -\beta(x^2 + y^2)$$

που συνεπάγεται ότι

$$x^2 + y^2 = (x_0^2 + y_0^2) e^{-2\beta t} \; .$$

Άρα για την περίπτωση που αναφέρεται θα είναι $a^2(t) = e^{-2\beta t}$ (η ροή αυτή χαρακτηρίζει τη ροή κοντά στη επιφάνεια ενός στροβίλου). Οι τροχιές είναι εκθετικά μειούμενης ακτίνας έλικες.

3. Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα είναι

$$C(t) = a(t) \int_0^{2\pi} u_\theta d\theta \; .$$

Εάν $\phi = -\beta(x^2/2 + y^2/2 - z^2)$ η ταχύτητα στην εφαπτομενική διεύθυνση του κύκλου είναι:

$$u_\theta = -\frac{1}{a(t)} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \Omega a(t) \; .$$

Το κλειστό ολοκλήρωμα του πρώτου μηδενίζεται διότι προέρχεται από δυναμικό, και το δεύτερο δίνει ότι η κυκλοφορία είναι:

$$C(t) = 2\pi a^2(t) \Omega(t) \; .$$

Εάν η κυκλοφορία είναι αναλλοιώτη θα πρέπει:

$$\Omega(t) = \frac{a^2(0)}{a^2(t)} \Omega(0) = e^{2\beta t} \Omega(0) \; ,$$

δηλαδή η γωνιακή ταχύτητα πρέπει να μεγαλώνει εκθετικά.

4. Οι εξισώσεις που πρέπει να ικανοποιεί αυτή η ροή είναι:

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+\vec{u}\cdot\nabla\vec{u}\right)=-\nabla p\ \ ,\quad \nabla\cdot\vec{u}=0\ .$$

Το ασυμπίεστο ικανοποιείται για κάθε $\Omega(t)$ διότι αφενός $\nabla^2\phi=0$, αφετέρου:

$$\partial_i(\Omega\epsilon_{i3k}x_k)=\Omega\epsilon_{i3i}=0\ ,$$

οπότε πράγματι $\nabla\cdot\vec{u}=0$. Η δυναμική εξίσωση μπορεί να γραφεί:

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+\vec{\omega}\times\vec{u}=-\nabla\left(\frac{p}{\rho}+\frac{|\vec{u}|^2}{2}\right)\ ,$$

και η πίεση να απαληφθεί λαμβάνοντας τον στροβιλισμό της εξίσωσης, οπότε:

$$\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t}+\nabla\times(\vec{\omega}\times\vec{u})=0\ .$$

Ο στροβιλισμός είναι:

$$\vec{\omega}=\nabla\times\vec{u}=2\Omega(t)\ \vec{k}$$

και

$$\begin{aligned}\nabla\times(\vec{\omega}\times\vec{u})&=2\Omega(\phi_{xx}+\phi_{yy})\ \vec{k}\\&=-4\beta\Omega(t)\vec{k}\ .\end{aligned}$$

Συνεπώς η εξίσωση στροβιλισμού απαιτεί:

$$\frac{d\Omega}{dt}-2\beta\Omega=0\ ,$$

με

$$\Omega=\Omega_0e^{2\beta t}\ .$$

Θέμα Γ

1. Οι συνοριακές συνθήκες είναι $\vec{u}\to 0$ όταν $r\to\infty$ που συνεπάγεται ότι $A=0$ και στην επιφάνεια της σφαίρας, $r=a$:

$$\vec{u}\cdot\hat{e}_r=\frac{\partial\phi}{\partial r}=\vec{U}\cdot\hat{e}_r=U\cos\theta\ ,$$

συνεπώς

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial r}\right|_{r=a}=-2\frac{B}{a^3}\cos\theta$$

και εξαυτού

$$B(t)=-\frac{a^3U(t)}{2}\ ,$$

οπότε το δυναμικό της ροής μίας κινούμενης σφαίρας είναι:

$$\phi(r,\theta,t)=-\frac{a^3U(t)}{2r^2}\cos\theta$$

2. Η κινητική ενέργεια είναι:

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\rho}{2}\int_S \phi(a,\theta,t))\,\frac{\partial\phi}{\partial r}\bigg|_{r=a} dS \\
&= \frac{\rho}{2}\int_0^{\pi} \frac{aU(t)}{2}\cos\theta\, U(t)\cos\theta\,(2\pi a^2\sin\theta\, d\theta) \\
&= -\pi\frac{\rho a^3U^2(t)}{2}\int_0^{\pi}\cos^2\theta d(\cos\theta) \\
&= \pi\frac{\rho a^3U^2(t)}{3} \\
&= \frac{MU^2(t)}{4}
\end{aligned}$$

όπου $M = 4\pi a^3\rho/3$.

3. Η δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι $M_0\vec{g}$ και η άνωση $-M\vec{g}$ οπότε το δυναμικό της βαρύτητας για το σώμα μέσα στο ρευστό είναι: $V = -(M_0 - M)\vec{g}\cdot\vec{X}$, όπου $\vec{X}$ το κέντρο της σφαίρας. Η Λαγκραντζιανή είναι

$$L = \frac{M_0}{2}|\dot{\vec{X}}|^2 + \frac{M}{4}|\dot{\vec{X}}|^2 + (M_0 - M)\vec{g}\cdot\vec{X}\ .$$

και η εξίσωση κίνησης:

$$M_0\ddot{\vec{X}} + \frac{M}{2}\ddot{\vec{X}} = (M_0 - M)\vec{g}\ ,$$

όπου ο δεύτερος όρος είμαι η επιτάχυνση του ρευστού που επάγεται λόγω της κίνησης της σφαίρας και είναι βεβαίως ίση και αντίθετη με τη δύναμη που ασκείται στο σώμα από το ρευστό.

4. Εάν $M_0 << M$, όπως συμβαίνει στη περίπτωση της φυσαλλίδας, τότε σε πολύ καλή προσέγγιση:

$$\frac{M}{2}\ddot{\vec{X}} = -M\vec{g}\ ,$$

δηλαδή η άνωση επιταχύνει τη μισή μάζα και συνεπώς η αρχική επιτάχυνση της φυσαλλίδας είναι $-2\vec{g}$.

Θέμα Δ

1. Οι αδρανειακοί όροι είναι τάξης $\rho U^2/L$ όπου $U = \Omega a$ η τυπική ταχύτητα της ροής, $L = b - a$ η τυπική κλίμακα μήκους της ροής, ενώ η δύναμη από την τριβή είναι τάξης $\mu U/L^2$, συνεπώς για να μπορέσουμε να αμελήσουμε τους αδρανειακούς όρους θα πρέπει να είναι:

$$\rho\frac{U^2}{L} << \mu\frac{U}{L^2}\ ,$$

επομένως

$$\frac{LU}{\nu} = \frac{\Omega a(b-a)}{\nu} << 1\ .$$

2. Οι εξισώσεις κίνησης είναι (δεδομένου ότι η πυκνότητα είναι σταθερή και ομογενής):

$$\mu\nabla^2\vec{u} = \nabla p \quad , \quad \nabla\cdot\vec{u} = 0\ \ .$$

με συνοριακές συνθήκες $\vec{u} = \vec{\Omega}\times\vec{x}$ στο $r = a$ και $\vec{u} = 0$ στο $r = b$. Οι εξισώσεις είναι γραμμικές και τα πεδία της ροής πρέπει να είναι γραμμικώς εξαρτώμενα από το ψευδοδιάνυσμα Ω (δεν αλλάζει πρόσημο με τους κατοπτρισμούς $\vec{x}\to-\vec{x}$), λόγω δε της σφαιρικής συμμετρίας το μόνο διάνυσμα που μπορεί να υπεισέρχεται στις λύσεις είναι το διάνυσμα θέσης $\vec{x}$ και κατα τα άλλα τα πεδία μπορούν να εξαρτώνται μόνο από το r.

Η πίεση είναι βαθμωτό μέγεθος και πρέπει να είναι σταθερά. Αν ήταν $\Omega \cdot \vec{x}\, g(r)$, που είναι γραμμική συνάρτηση της γωνιακής ταχύτητας, η πίεση θα ήταν ψευδοβαθμωτή, όπερ άτοπον.

Η μορφή της ταχύτητας που δίνεται ικανοποιεί όλες τις συνθήκες που αναφέραμε και ορίζει διάνυσμα. Με τη ταχύτητα αυτή κάθε φλοιός που βρίσκεται σε απόσταση r κινείται με γωνιακή ταχύτητα $f(r)\vec{\Omega}$, οπότε έχουμε διαφορική περιστροφή κατά φλοιούς.

3. Είναι:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_i}{\partial x_i} &= \frac{\partial(\epsilon_{ijk}\Omega_j x_k\, f(r))}{\partial x_i} \\
&= \epsilon_{ijk}\Omega_j\delta_{ik}f(r) + \epsilon_{ijk}\Omega_j x_k x_i \frac{f'}{r} \\
&= 0
\end{aligned}$$

λόγω της αντισυμμετρίας του ϵ_{ijk}.

4. Θα πρέπει $f(a) = 1$ και $f(b) = 0$. Εφόσον η p είναι σταθερή η συνάρτηση f προσδιορίζεται από την $\mu\nabla^2\vec{u} = 0$, η οποία γράφεται:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_a \partial x_a} &= \frac{\partial}{\partial x_a}\left(\epsilon_{ijk}\Omega_j\delta_{ka}f(r) + \epsilon_{ijk}\Omega_j x_k x_a \frac{f'}{r}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_a}\left(\epsilon_{ija}\Omega_j f(r) + \epsilon_{ijk}\Omega_j x_k x_a \frac{f'}{r}\right) \\
&= \epsilon_{ija}\Omega_j x_a \frac{f'}{r} + \epsilon_{ijk}\Omega_j\delta_{ak}x_a\frac{f'}{r} + \epsilon_{ijk}\Omega_j x_k\delta_{aa}\frac{f'}{r} + \epsilon_{ijk}\Omega_j x_k x_a x_a \frac{1}{r}\left(\frac{f'}{r}\right)' \\
&= 5\epsilon_{ijk}\Omega_j x_k \frac{f'}{r} + \epsilon_{ijk}\Omega_j x_k r\left(\frac{f'}{r}\right)' \\
&= \left(\vec{\Omega}\times\vec{x}\right)_i \left(5\frac{f'}{r} + r\left(\frac{f'}{r}\right)'\right) \\
&= 0\,,
\end{aligned}$$

και συνεπώς θα πρέπει:

$$r\left(\frac{f'}{r}\right)' + 5\frac{f'}{r} = 0\,.$$

Θέτωντας $f = r^\lambda$ αμέσως βρίσκουμε $\lambda = 0\ ,\ -3$ και τότε $f = Ar^{-3} + B$, οπότε μέσω των συνοριακών συνθηκών καταλήγουμε ότι:

$$\vec{u} = \left(\vec{\Omega}\times\vec{x}\right)\,\frac{b^3a^3}{b^3 - a^3}\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{b^3}\right)\ .$$

5. Ο τανυστής τάσης είναι:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}$$

όπου

$$2e_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\,.$$

Η συνθήκη ότι οι αδρανειακές δυνάμεις είναι αμελητέες σημαίνει ότι οι εξισώσεις ροής μπορεί να γραφούν ως:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} &= 2\mu\frac{\partial e_{ij}}{\partial x_j} \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

Εάν $n_i = x_i/r$ είναι η προς τα έξω κάθετος, τότε εφαρμογή του θεωρήματος του Gauss δίνει ότι η ροπή στην εσωτερική σφαίρα

$$G_i^a = \int_{S(a)} \epsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl} n_l dS \ ,$$

όπου $S(a)$ η επιφάνεια της σφαίρας ακτίνας a, σχετίζεται με την ροπή στην εξωτερική σφαίρα G_i^b

$$G_i^b = -\int_{S(b)} \epsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl} n_l dS \ ,$$

όπου $S(b)$ η επιφάνεια της σφαίρας ακτίνας b (το αρνητικό πρόσημο υπάρχει διότι το ρευστό που ασκεί τη δύναμη είναι στο εσωτερικό της εξωτερικής σφαίρας) μέσω της σχέσης:

$$\begin{aligned}
G_i^a &= \int_{S(a)} \epsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl} n_l dS \\
&= \int_{S(b)} \epsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl} n_l dS - \int_V \frac{\partial(\epsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl})}{\partial x_l} dV \\
&= -G_i^b - \int_V \epsilon_{ilk} \sigma_{kl} dV - \int_V \epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l} dV \\
&= -G_i^b
\end{aligned}$$

Τα δύο ολοκληρώματα στον μεταξύ των δύο σφαιρών όγκο V μηδενίζονται διότι το σ_{ij} είναι συμμετρικό και η ροή είναι Stokesian. Αυτό βέβαια αναμένεται διότι η συνολική στροφορμή του συστήματος πρέπει να είναι σταθερή.