Πεδία (10/1/2007)

1 Εισαγωγή στα συνεχή συστήματα

Στο παρόν κεφάλαιο θα επεκτείνουμε το Λαγκρανζιανό φορμαλισμό από τα μηχανικά συστήματα που απαρτίζονται απο διακριτά σωματίδια ή σώματα σε μηχανικά κατ᾽ αρχάς, και αργότερα ακόμη γενικότερα, συνεχή συστήματα, όπως για παράδειγμα μια ολόκληρη χορδή όπου το κάθε στοιχειώδες τμήμα αυτής μπορεί να κινείται ανεξάρτητα από τα άλλα τμήματα αυτής, αλληλεπιδρώντας όμως με αυτά. Μια σημαντική υπόθεση στην οποία θα βασιστούμε κατά την ανάλυση των συνεχών συστημάτων, σε αντίθεση με τα διακριτά συστήματα είναι ότι το συνεχές μέσο, η "κίνηση"[1] του οποίου θα περιγράφεται από κάποιο πεδίο, θα υφίσταται αλληλεπιδράσεις μόνο από τους άμεσους γείτονές του και όχι από μακρινούς γείτονες. Η μετάβαση στα συνεχή μέσα θα απαιτήσει μια τέτοια θεώρηση, αν θέλουμε να έχουμε έναν αρκετά καλό παραλληλισμό μεταξύ της λαγκρανζιανής θεώρησης συνεχών και διακριτών συστημάτων.

Κατ᾽ αντιστοιχία με τη Λαγκρανζιανή των διακριτών συστημάτων που αποτελούνται από ένα διακριτό, ή τέλος πάντων αριθμήσιμο, πλήθος σωματιδίων θεωρούμε μια νέα Λαγκρανζιανή που αφορά σε συνεχή συστήματα, δηλαδή πεδία φυσικών ποσοτήτων που περιγράφονται αντί από τη θέση $q_i(t)$ κάποιου i-οστού σωματιδίου από την τιμή του πεδίου $\phi_{\vec{x}}(t)$ στη θέση $\vec{x}$. Η άκομψη αυτή γραφή αποκτά περισσότερο ουσιαστικό νόημα στη μορφή $\phi(\vec{x},t)$, όπου τότε όμως διαφαίνεται ο ισότιμος ρόλος της θέσης και του χρόνου. Το πεδίο μπορεί να περιγράφει ένα βαθμωτό μέγεθος, ή ένα διανυσματικό μέγεθος, ή ένα τανυστικό μέγεθος με οσουσδήποτε δείκτες, ή ακόμη και διάφορα φυσικά μεγέθη που ανήκουν σε ένα χώρο διαφορετικής διάστασης από τον καθημερινό μας τετραδιάστατο χωρόχρονο, για παράδειγμα η κυματοσυνάρτηση ενός κβαντομηχανικού συστήματος απαιτεί τη γνώση δύο ανεξάρτητων πεδίων του πραγματικού και του φανταστικού μέρους της κυματοσυνάρτησης ή ισοδύναμα της κυματοσυνάρτησης και της συζυγούς κυματοσυνάρτησης του συστήματος. Για συντομία στη γραφή θα ακολουθήσουμε τον ακόλουθο συμβολισμό

$$\phi_{,\mu} \equiv \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \tag{1}$$

με $x^0 = t, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$. Η θέση των δεικτών (πάνω ή κάτω) στη γραφή των χωροχρονικών συντεταγμένων και των παραγώγων δεν θα έχει καμία σημασία όταν αναφερόμαστε σε συστήματα μη σχετικιστικά (όταν οι κινήσεις των μηχανικών μερών συμβαίνουν με ταχύτητες πολύ μικρότερες αυτής του φωτός), αλλά θα έχουν ιδιαίτερη σημασία όταν θα επεκταθούμε και σε σχετικιστικά συστήματα. Έτσι θα διατηρήσουμε μια συνέπεια ως προς τη θέση των δεικτών (όταν ο δείκτης εμφανίζεται επάνω στον παρονομαστή, π.χ. στην παράγωγο ως προς μια συντεταγμένη είναι ισοδύναμο με το να γράφουμε το δείκτη αυτό κάτω στη συντομογραφία της παραγώγου) ακόμη και αν αυτό είναι άσκοπο για τα πρώτα τουλάχιστον παραδείγματα που θα εξετάσουμε, ώστε να μην χρειαστεί αργότερα στα σχετικιστικά συστήματα να δικαιολογούμε τη θέση γραφής. Η Λαγκρανζιανή λοιπόν θα είναι μια συνάρτηση της μορφής (θυμηθείτε τον ισότιμο ρόλο χώρου και χρόνου)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}(\phi, \phi_{,\mu}, x^\mu) \\ &\text{με } \phi = \phi_A \end{aligned} \tag{2}$$

όπου το $_A$ συμβολίζει οιονδήποτε δείκτη προσδιορισμού των συνιστωσών του πεδίου ή των διάφορων θεωρούμενων πεδίων: Κανένας δείκτης, βαθμωτό πεδίο, ένας δείκτης, διανυσματικό πεδίο, δύο ή περισσότεροι δείκτες τανυστικό πεδίο, μη διανυσματικοί δείκτες πεδία που αφορούν άλλες διαστάσεις από τις φυσικές. Στο σημείο αυτό τονίζουμε ότι η θεώρηση της αλληλεπίδρασης εξαιτίας των άμεσων μόνο γειτόνων έχει ήδη εισέλθει στη Λαγκρανζιανή με την εισαγωγή πρώτων μόνο χωρικών παραγώγων των πεδίων και όχι όλων των τάξεων των παραγώγων που θα απαιτούσε μια αλληλεπίδραση εξ

[1] Τα εισαγωγικά έχουν τοποθετηθεί για να μας θυμίζουν ότι εκτός των μηχανικών συνεχών συστημάτων η ανάλυσή μας θα είναι σε θέση να περιγράψει και άλλα φυσικά συστήματα τα οποία μεταβάλλονται με το χρόνο χωρίς κατ᾽ ανάγκη να συμβαίνει κάποια κίνηση σωμάτων.

αποστάσεων μεταξύ των πεδίων. Σκεφθείτε για παράδειγμα πώς θα αναλύονταν ένας όρος αλληλεπίδρασης στη Λαγκρανζιανή της μορφής

$$\phi(\vec{x},t)\phi(\vec{x}+\vec{R},t)\ . \tag{3}$$

Επιπλέον, ένας τέτοιος όρος θα είχε πρόβλημα αφού θα απαιτούσε μετάδοση πληροφορίας με άπειρη ταχύτητα και η διόρθωση αυτού ώστε η πληροφορία να μεταδίδεται το πολύ με την ταχύτητα του φωτός θα επέβαλλε τότε και την εισαγωγή άπειρων χρονικών παραγώγων επίσης.

Η δράση που αντιστοιχεί σε μια τέτοια Λαγκρανζιανή θα είναι κατ' αντιστοιχία με τα διακριτά συστήματα, όπου τώρα ο χώρος παίζει ακριβώς ισοδύναμο ρόλο με το χρόνο των διακριτών συστημάτων,

$$S=\int dt\ dx\ dy\ dz\ \mathcal{L}(\phi,\phi_{,\mu},x^\mu)=\int dV^{(4)}\mathcal{L}(\phi,\phi_{,\mu},x^\mu)\ . \tag{4}$$

Η αρχή του Χάμιλτον απαιτεί η δράση αυτή να αποτελεί ακρότατο ως προς τις τιμές των πεδίων, με δεδομένη την τιμή των πεδίων στα όρια της ολοκλήρωσης

$$\begin{gathered}\phi(t_1,x,y,z),\ \forall x,y,z\\ \phi(t,x_1,y,z),\ \forall t,y,z\\ \ldots\ \text{κ.λ.π.}\end{gathered} \tag{5}$$

Για να είμαστε πιο ακριβείς τα όρια της ολοκλήρωσης μπορεί να μην είναι δυνατό να περιγραφούν με την παραπάνω απλοποιημένη μορφή. Για παράδειγμα, υποθέστε ότι το χωρικό μέρος του θεωρούμενου τετραδιάστατου χώρου είναι σφαιρικό και όχι κυβικό. Το πιο σωστό είναι να θεωρήσει κανείς έναν συμπαγή πεπερασμένο τετραδιάστατο χωροχρονικό όγκο και το τρισδιάστατο σύνορο αυτού ως την περιοχή όπου τα πεδία έχουν δοσμένη τιμή κατά την αναζήτηση στασίμου της δράσης. Το γεγονός ότι και ο χρόνος είναι μεταξύ των διαστάσεων του τετραδιάστατου χώρου κάνει τα πράγματα κάπως πιο δύσκολα στο να σχεδιάσει κανείς τον χώρο αυτό και να φανταστεί το σύνορό του αλλά από μαθηματικής άποψης δεν διαφέρει ουσιαστικά από οτιδήποτε υπολογίζουμε στον καθημερινό τρισδιάστατο χώρο που μας περιβάλλει.

Θεωρούμε, ως συνήθως, μεταβολές στα πεδία $\phi\to\phi+\epsilon\eta$, με ϵ κάποια μικρή ρυθμιζόμενη σταθερά, τέτοιες ώστε να μην αλλάζει η τιμή των πεδίων στο σύνορο

$$\eta(\text{στο σύνορο του θεωρούμενου χωροχρονικού χώρου})=0 \tag{6}$$

και αναζητούμε πεδία τέτοια ώστε η μεταβολή της δράσης

$$\begin{aligned}S[\phi+\epsilon\eta]-S[\phi] &= \int dV^{(4)}[\mathcal{L}(\phi+\epsilon\eta,\phi_{,\mu}+\epsilon\eta_{,\mu},x^\mu)-\mathcal{L}(\phi,\phi_{,\mu},x^\mu)]\\ &= \epsilon\int dV^{(4)}\left[\eta\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}+\eta_{,\mu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\mu}}\right]\end{aligned} \tag{7}$$

να είναι μηδενική. ΄Ομως, (προσοχή ακολούθως στις μερικές-πλήρεις παραγωγίσεις αν και $\eta_{,\mu}=\partial\eta/\partial x^\mu=d\eta/dx^\mu$ αφού τα πεδία ϕ, ή οι υποτιθέμενες μεταβολές αυτών η, είναι συναρτήσεις της χωρικής και χρονικής θέσης οι οποίες με τη σειρά τους είναι ανεξάρτητες η μία από την άλλη)

$$\begin{gathered}\frac{d}{dx^\mu}\left(\eta\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\mu}}\right)=\\ \eta_{,\mu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\mu}}+\eta\frac{d}{dx^\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\mu}}\right)\end{gathered} \tag{8}$$

οπότε

$$\begin{aligned}S[\phi+\epsilon\eta]-S[\phi] &= \epsilon\int dV^{(4)}\eta\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}-\frac{d}{dx^\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\mu}}\right)\right]\\ &+ \epsilon\int dV^{(4)}\frac{d}{dx^\mu}\left(\eta\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\mu}}\right)\end{aligned} \tag{9}$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα μετατρέπεται με χρήση του θεωρήματος του Gauss από χωρικό σε επιφανειακό

$$\int_{\partial V^{(4)}} dS_\mu \eta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} \,, \tag{10}$$

όπου με $\partial V^{(4)}$ έχουμε συμβολίσει το σύνορο του θεωρούμενου τετραδιάστατου χωρίου. ´Ομως, η τιμή του η είναι μηδέν σε όλο το σύνορο (Στο σημείο αυτό, όπως και με τα διακριτά συστήματα, διαφαίνεται η επιπλέον απαίτηση καθορισμού των πεδίων στο σύνορο). ´Ετσι, η απαίτηση για ακρότατο της δράσης οδηγεί στην ακόλουθη εξίσωση για το πεδίο

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{d}{dx^\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}}\right) = 0 \tag{11}$$

και αν το πεδίο έχει πολλές συνιστώσες στην παραπάνω εξίσωση θα υπακούει κάθε συνιστώσα του πεδίου. Αυτή είναι η αντίστοιχη εξίσωση Euler - Lagrange που υπαγορεύει τον τρόπο που θα πρέπει να μεταβάλλονται χωρικά και χρονικά τα πεδία και είναι σε πλήρη αντιστοιχία με την εξίσωση Euler - Lagrange για τα διακριτά σωματίδια (βλ. εδάφιο 2.1) αν σκεφτεί κανείς ότι στα διακριτά συστήματα είχαμε μόνο μια δυναμική μεταβλητή, το χρόνο, αντί τεσσάρων στα συνεχή συστήματα. Η βασική διαφορά από τα διακριτά συστήματα είναι ότι τώρα η εξίσωση "κίνησης" των πεδίων είναι μια εξίσωση με μερικές παραγώγους, μαζί με όλες τις δυσκολίες και προβλήματα στην επίλυση αυτών, που συνεπάγονται οι διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους.

2 Θεώρημα Noether για συνεχή συστήματα

Ας αναζητήσουμε τώρα συμμετρίες και αντίστοιχες διατηρούμενες ποσότητες των συνεχών συστημάτων, όπως κάναμε και με τα διακριτά συστήματα. Η πιο γενική πεδιο-χωροχρονική συνεχής συμμετρία του υπό μελέτη φυσικού συστήματος (κατ' αντιστοιχία των χωρο-χρονικών συμμετριών για τα σωματίδια) είναι η ακόλουθη

$$\begin{aligned} \phi \rightarrow \phi'(x') &= \phi(x) + \epsilon\psi(x) \\ x^\mu \rightarrow x'^\mu &= x^\mu + \epsilon\sigma^\mu(x) \end{aligned} \tag{12}$$

όπου το x μόνο του συμβολίζει όλες τις χωροχρονικές συντεταγμένες. Στην περίπτωση που τα πεδία είναι περισσότερα του ενός ή έχουμε περισσότερες της μίας συνιστώσας αυτού τα θεωρούμενα $\psi(x)$ είναι και αυτά άλλα τόσα όσα είναι και τα διαφορετικά ϕ. Στο σημείο αυτό αξίζει να τονίσουμε ότι οι υποτιθέμενοι μετασχηματισμοί των πεδίων στη μορφή που είναι γραμμένοι είναι κάπως αφύσικοι[2] αφού συνήθως εμείς θέλουμε να ελέγξουμε ποιες μεταβολές των πεδίων σε ένα παγιωμένο χωροχρονικό υπόβαθρο αποτελούν συμμετρία της δράσης. Προκειμένου, όμως, να διατηρήσουμε την αντιστοιχία με τα διακριτά συστήματα όσο πιο καθαρή γίνεται, όπου στο εδάφιο 5.4XXX περί γενικού θεωρήματος της Noether θεωρήσαμε τις καινούργιες συντεταγμένες Q_i συναρτήσεις του μετασχηματισμένου νέου χρόνου T, ως μετασχηματισμούς των πεδίων θα θεωρήσουμε αυτούς που γράψαμε παραπάνω. Εξάλλου ο πιο φυσικά θεωρούμενος μετασχηματισμός των πεδίων $\phi'(x) - \phi(x)$ συνδέεται άμεσα με το μετασχηματισμό τον οποίο έχουμε ήδη θεωρήσει:

$$\begin{aligned} \phi'(x^\mu) - \phi(x^\mu) = \phi'(x'^\mu - \epsilon\sigma^\mu) - \phi(x^\mu) = \left(\phi'(x'^\mu) - \epsilon\frac{\partial\phi'}{\partial x^\nu}\sigma^\nu + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right) - \phi(x) = \\ \epsilon\left(\psi(x^\mu) - \frac{\partial\phi'}{\partial x^\nu}\sigma^\nu\right) + \mathcal{O}(\epsilon^2)\,. \end{aligned} \tag{13}$$

Στις παραπάνω εκφράσεις επειδή οι παράγωγοί της ϕ' εμφανίζονται στους όρους τάξης ϵ μπορούν να θεωρηθούν είτε συναρτήσεις των x είτε των x' αφού η διαφοροποίηση μεταξύ αυτών είναι με τη σειρά της τάξης ϵ.

[2]Ευχαριστούμε τον κ. Χατζηιωάννου για την υπόδειξη αυτή.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι κάποιες ποσότητες διατηρούνται όταν οι παραπάνω μετασχηματισμοί των πεδίων και των συντεταγμένων αποτελούν συμμετρία της δράσης. Έστω, λοιπόν,

$$\begin{aligned} S'_\epsilon - S &= \mathcal{O}(\epsilon^2) \Rightarrow \\ \int dV'^{(4)} \mathcal{L}(\phi', \phi'_{,\mu'}, x') - \int dV^{(4)} \mathcal{L}(\phi, \phi_{,\mu}, x) &= \epsilon \cdot 0 + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned} \tag{14}$$

Λόγω θεωρούμενης μεταβολής των συντεταγμένων (αντίστοιχα με τη μεταβολή της μεταβλητής του χρόνου στα διακριτά συστήματα) το χωρίο για το οποίο ορίζεται η δράση μεταβάλλεται και αυτό, προς τούτο και $dV'^{(4)}$. Ας εκτελέσουμε μερικούς πρόχειρους υπολογισμούς τώρα. Κατ' αρχάς λόγω των χωροχρονικών μετασχηματισμών ο συνολικός όγκος ολοκλήρωσης έχει αλλάξει. Μπορούμε όμως και πάλι να εκτελέσουμε την ολοκλήρωση στις αρχικές συντεταγμένες εισάγοντας επιπλέον την Ιακωβιανή ορίζουσα του μετασχηματισμού (βλ. και εδάφιο 10.2XXX)

$$\int dV'^{(4)} \ldots = \int dV^{(4)} \det(\partial x'^\mu / \partial x^\nu) \ldots \tag{15}$$

Όμως,

$$A^\mu_\nu \equiv \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \delta^\mu_\nu + \epsilon \frac{\partial \sigma^\mu}{\partial x^\nu} \Rightarrow \det(A^\mu_\nu) = 1 + \epsilon \sigma^\mu_{,\mu} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{16}$$

XXX(Για να δείξετε την παραπάνω ισότητα δείξτε ότι αναπτύσσοντας την παραπάνω ορίζουσα ως προς οποιαδήποτε γραμμή ή στήλη μόνο το διαγώνιο στοιχείο ενδέχεται να δώσει όρο τάξης ϵ. Όλα τα άλλα θα δώσουν όρους τάξης τουλάχιστον ϵ^2.) Επίσης,

$$\begin{aligned} \phi'_{,\mu'} = \frac{\partial \phi'}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial \phi'}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} &= \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} + \epsilon \frac{\partial \psi}{\partial x^\nu} \right) \left(\delta^\nu_\mu - \epsilon \frac{\partial \sigma^\nu}{\partial x^\mu} \right) \\ & \phi_{,\mu} + \epsilon (\psi_{,\mu} - \phi_{,\nu} \sigma^\nu_{,mu}) \; . \end{aligned} \tag{17}$$

Συγκεντρώνοντας όλα τα παραπάνω στοιχεία θα έχουμε

$$S'_\epsilon - S = \int dV^{(4)} \left[(1 + \epsilon \sigma^\rho_{,\rho}) \left(\mathcal{L} + \epsilon \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} (\psi_{,\mu} - \phi_{,\nu} \sigma^\nu_{,\mu}) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \sigma^\mu \right) - \mathcal{L} \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2) \; . \tag{18}$$

Συμμετρία λοιπόν θα έχουμε αν

$$\int dV^{(4)} \left[\sigma^\rho_{,\rho} \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} (\psi_{,\mu} - \phi_{,\nu} \sigma^\nu_{,\mu}) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \sigma^\mu \right] = 0 \; . \tag{19}$$

Αν επικαλεστούμε και τις εξισώσεις κίνησης του πεδίου

$$\int dV^{(4)} \left[\sigma^\rho_{,\rho} \mathcal{L} + \frac{d}{dx^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} \right) \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} (\psi_{,\mu} - \phi_{,\nu} \sigma^\nu_{,\mu}) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \sigma^\mu \right] = 0 \tag{20}$$

Και μια τελευταία τροποποίηση στη γραφή του τελευταίου όρου

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} &= \frac{d\mathcal{L}}{dx^\mu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\nu}} \frac{\partial \phi_{,\nu}}{\partial x^\mu} \\ &= \frac{d\mathcal{L}}{dx^\mu} - \frac{d}{dx^\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\nu}} \right) \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\nu}} \frac{\partial \phi_{,\nu}}{\partial x^\mu} \; . \end{aligned} \tag{21}$$

Τώρα είμαστε έτοιμοι να συμαζέψουμε τους όρους σε πιο συμπαγή μορφή:

$$\begin{aligned} 0 &= \int dV^{(4)} \left[\frac{d}{dx^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} \psi \right) + \frac{d}{dx^\nu} (\mathcal{L} \sigma^\nu) - \frac{d}{dx^\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\nu}} \phi_{,\mu} \sigma^\mu \right) \right] \\ &= \int dV^{(4)} \left[\frac{d}{dx^\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\nu}} \psi \right) + \frac{d}{dx^\nu} \left(\mathcal{L} \sigma^\nu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\nu}} \phi_{,\mu} \sigma^\mu \right) \right] \end{aligned} \tag{22}$$

Αν ορίσουμε τώρα τον πίνακα

$$T_\mu^\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\nu}} \phi_{,\mu} - \mathcal{L} \delta_\mu^\nu \tag{23}$$

ώστε να γράψουμε σε μια κάπως πιο συμπαγή μορφή το προηγούμενο αποτέλεσμα τότε η συμμετρία που υποθέσαμε εξ αρχής οδηγεί σε

$$0 = \int dV^{(4)} \frac{d}{dx^\nu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\nu}} \psi - T_\mu^\nu \sigma^\mu \right] = \int_{\partial V^{(4)}} dS_\nu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\nu}} \psi - T_\mu^\nu \sigma^\mu \right] . \tag{24}$$

Για τη γραφή του τελευταίου ολοκληρώματος επικαλεστήκαμε το θεώρημα του Gauss, ενώ η ολοκλήρωση γίνεται πάνω στην υπερεπιφάνεια (3 διαστάσεων) που αποτελεί σύνορο του τετραδιάστατου χωρίου.

3 Συμμετρίες - Διατηρήσεις

1. Ας εξετάσουμε σε τι είδους διατηρήσεις οδηγούν οι καθαρές συμμετρίες σε χωροχρονικές μεταθέσεις $\psi = 0, \sigma^\mu$ όπου σ^μ τυχαίοι σταθεροί αριθμοί.

$$0 = \int dV^{(4)} \sigma^\nu \frac{d}{dx^\nu} T_\mu^\nu \tag{25}$$

Αφού οι αριθμοί σ^ν είναι σταθεροί αριθμοί και το χωρίο της ολοκλήρωσης είναι αυθαίρετο

$$T_{\mu,\nu}^\nu = 0, \forall \mu \ , \tag{26}$$

δηλαδή,

$$\begin{aligned} T_{\mu,0}^0 + T_{\mu,i}^i &= 0 \Rightarrow \\ \frac{d}{dt} T_\mu^0 + \frac{d}{dx^i} T_\mu^i &= 0 \Rightarrow \\ 0 = \frac{d}{dt} \int d^3x T_\mu^0 &+ \int d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{T}_\mu \\ = \frac{d}{dt} \int d^3x T_\mu^0 &+ \int_{\partial V^{(3)}} d\vec{S} \cdot \vec{T}_\mu \end{aligned} \tag{27}$$

Στις παραπάνω σχέσεις έχουμε χρησιμοποιήσει δείκτες από το λατινικό αλφάβητο για να υποδηλώσουμε καθαρά χωρικές συντεταγμένες εν αντιθέση με τους ελληνικούς δείκτες που χρησιμοποιήθηκαν για να δηλώσουν είτε χρονικές είτε χωρικές συντεταγμένες. Επίσης χρησιμοποήσαμε διανυσματικό συμβολισμό για να συμπτύξουμε τις τρεις συνιστώσες του πίνακα T_μ^i για κάθε μία τιμή του δείκτη μ. Παρακάτω θα δείξουμε πράγματι ότι οι τριάδες των συνιστωσών αυτών του πίνακα T_ν^μ συμπεριφέρονται πράγματι ως ευκλείδεια διανύσματα σε μετασχηματισμούς στροφής.

Αντιπαραβάλλοντας την παραπάνω σχέση με την εξίσωση συνέχειας της ύλης για ένα δοσμένο χωρίο του τρισδιάστατου χώρου

$$\frac{d}{dt} \int_{V^{(3)}} d^3x \ \rho + \int_{\partial V^{(3)}} d\vec{S} \cdot \vec{j} \ , = 0 \tag{28}$$

μπορούμε να αποδώσουμε το ακόλουθο φυσικό νόημα στις διάφορες συνιστώσες του πίνακα T_μ^ν: T_μ^0 είναι η πυκνότητα κάποιας φυσικής ποσότητας ενώς $\vec{T}_\mu$ είναι η πυκνότητα ρεύματος μεταφοράς αυτής της ποσότητας. Πιο συγκεκριμένα, όπως θα φανεί καθαρά με συγκεκριμένα φυσικά παραδείγματα που θα ακολουθήσουν T^0_0 είναι η πυκνότητα ενέργειας που περιέχεται στο πεδίο, $\vec{T}_0$ είναι η πυκνότητα ρεύματος μεταφοράς ενέργειας, $-T^0_i$ είναι η πυκνότητα της $i-$συνιστώσας της ορμής, και $-\vec{T}_i$ είναι η πυκνότητα ρεύματος μεταφοράς της $i-$συνιστώσας της ορμής. Υπό την έννοια αυτή, οι φυσικές ποσότητες των οποίων οι πυκνότητες εκφράζονται από τις συνιστώσα T^0_μ διατηρούνται, και σύμφωνα με την ορολογία που χρησιμοποιούμε η συμμετρία της δράσης σε μεταθέσεις χωρο-χρονικές οδηγεί σε τέσσερα αντίστοιχα *διατηρούμενα ρεύματα*.

Τώρα που ξέρουμε τι διατηρείται εξαιτίας της συμμετρίας σε μεταθέσεις των συντεταγμένων, ας υπολογίσουμε την απόκλιση του T^ν_μ, $T^\nu_{\mu,\nu}$, για ένα οποιοδήποτε φυσικό πεδίο.

$$\begin{aligned} T^\nu_{\mu,\nu} &= \frac{d}{dx^\nu}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\nu}}\phi_{,\mu} - \mathcal{L}\delta^\nu_\mu\right] \\ &= \frac{d}{dx^\nu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\nu}}\right)\phi_{,\mu} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\nu}}\phi_{,\mu,\nu} - \frac{d\mathcal{L}}{dx^\mu} \\ = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\phi_{,\mu} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\nu}}\phi_{,\mu,\nu} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\phi_{,\mu} &- \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\nu}}\phi_{,\mu,\nu} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu} \\ &= -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu}\ . \end{aligned} \tag{29}$$

Με άλλα λόγια, όπως ίσως το περιμέναμε, καταλήξαμε ότι τα παραπάνω διατηρούμενα ρεύματα είναι διατηρούμενα μόνο εφόσον η λαγκρανζιανή πυκνότητα του πεδίου δεν έχει άμεση εξάρτηση από τις χωροχρονικές συντεταγμένες, γεγονός που αναμένεται φυσικά τουλάχιστον για τα ελεύθερα πεδία αφού διαφορετικά κάτι τέτοιο θα σήμαινε διάκριση των διαφόρων θέσεων του χώρου και του χρόνου. Επομένως, τα διατηρούμενα ρεύματα έχουν γενική εφαρμογή στα φυσικά πεδία.

2. Στη συνέχεια θα μελετήσουμε ακόμη μια δυνατή συμμετρία των συνεχών συστημάτων. Έστω ότι ένα σύστημα παρουσιάζει συμμετρία σε στροφές των χωρικών συντεταγμένων. Βασική προϋπόθεση για να υπάρχει μια τέτοια συμμετρία είναι ο χώρος του πεδίου να είναι τουλάχιστον δισδιάστατος. Επομένως μια τέτοια συμμετρία δεν έχει εφαρμογή στη μελέτη των εγκάρσιων διαταραχών μιας χορδής ακόμη και αν αυτές δεν συμβαίνουν αποκλειστικά σε ένα επίπεδο, έχει όμως στη μελέτη των διαταραχών της μεμβράνης ενός τυμπάνου. Έστω λοιπόν η συμμετρία

$$\psi = 0\ ,\ \sigma^0 = 0\ ,\ \sigma^i = \epsilon^i{}_{jk}\hat{n}^j x^k \tag{30}$$

όπου το $\epsilon^i{}_{jk}$ είναι ο κλασικός πλήρως αντισυμμετρικός τανυστής τρίτης τάξης που λαμβάνει τις τιμές $+1$ (-1) αναλόγως αν οι δείκτες ijk, ανεξαρτήτως της θέσης τους πάνω-κάτω, αποτελούν άρτια (περιττή) μετάθεση των αριθμών 123 και 0 αλλιώς, ενώ το $\hat{n}$ είναι ένα αυθαίρετο μοναδιαίο διάνυσμα που καθορίζει τη διεύθυνση γύρω από την οποία εκτελείται η στροφή των συντεταγμένων. Σύμφωνα με τη σχέση (24) αυτή η συμμετρία θα συνεπάγεται

$$\frac{d}{dx^\nu}\left(T^\nu_i \epsilon^i{}_{jk}\hat{n}^j x^k\right) = 0\ . \tag{31}$$

Δηλαδή,

$$\epsilon^i{}_{jk}\hat{n}^j\left(\frac{d}{dt}(T^0_i)x^k + \frac{d}{dx^l}(T^l_i x^k)\right) = 0 \tag{32}$$

Αν ολοκληρώσουμε την παραπάνω σχέση σε κάποιο χωρίο του τρισδιάστατου χώρου θα έχουμε

$$\begin{aligned} \epsilon^i{}_{jk}\hat{n}^j\left(\frac{d}{dt}\int d^3x(T^0_i x^k) + \int d^3x\frac{d}{dx^l}(T^l_i x^k)\right) &= 0 \Rightarrow \\ \epsilon^i{}_{jk}\hat{n}^j\left(\frac{d}{dt}\int d^3x(T^0_i x^k) + \int_{\partial V^{(3)}} dS_l(T^l_i x^k)\right) &= 0\ . \end{aligned} \tag{33}$$

Αν επιπλέον επεκτείνουμε το χωρικό χωρίο σε τόσο μεγάλη έκταση ώστε να συμπεριλάβει ολόκληρη την έκταση που έχει το πεδίο (πέραν αυτής το πεδίο θεωρείται ότι δεν έχει προλάβει να διαδοθεί) το επιφανειακό ολοκλήρωμα είναι μηδενικό και επομένως η ποσότητα

$$\epsilon^{i}{}_{jk}\hat{n}^{j}\int d^{3}x(T_{i}^{0}x^{k}) \tag{34}$$

θα διατηρείται[3]. Αν κατασκευάσουμε το διάνυσμα

$$L_{j}\equiv\epsilon^{i}{}_{jk}\int d^{3}xT_{i}^{0}x^{k} \tag{35}$$

καταλήγουμε στο ότι η ποσότητα $\hat{n}\cdot\vec{L}$ θα διατηρείται. Επομένως, διατηρείται η συνιστώσα του $\vec{L}$ η οποία είναι παράλληλη στην κατεύθυνση $\hat{n}$. Εάν, επιπλέον, η υποτιθέμενη συμμετρία είναι συμμετρία για κάθε κατεύθυνση $\hat{n}$ τότε διατηρείται το διάνυσμα $\vec{L}$. Από τη μορφή που έχει εκ κατασκευής το $\vec{L}$, μπορούμε να δώσουμε σε αυτό τον τίτλο της στροφορμής του πεδίου, αφού το $-T_{i}^{0}$ δεν είναι άλλο από την πυκνότητα ορμής του πεδίου. Ας εξετάσουμε τώρα, όπως και με την περίπτωση του ίδιου του T_{μ}^{ν}, κατά πόσο η παραπάνω διατήρηση ισχύει ανεξαρτήτως της υποτιθέμενης συμμετρίας, δεδομένης της διατήρησης του T_{μ}^{ν}:

$$\epsilon^{i}{}_{jk}\left(\frac{d}{dt}(T_{i}^{0})x^{k}+\frac{d}{dx^{l}}(T_{i}^{l}x^{k})\right)=\epsilon^{i}{}_{jk}\left[\left(\frac{d}{dt}T_{i}^{0}+\frac{d}{dx^{l}}T_{i}^{l}\right)x^{k}+T_{i}^{l}\delta_{l}^{k}\right]=\epsilon^{i}{}_{jk}T_{i}^{k}\,. \tag{36}$$

Εδώ εμφανίζεται κάτι καινούργιο που μάλλον δεν το περιμέναμε. Συγκεκριμένα, η μοναδική απαίτηση για να διατηρείται η στροφορμή του πεδίου είναι η συμμετρικότητα του T_{k}^{i}, δηλαδή

$$T_{k}^{i}=T_{i}^{k}\,. \tag{37}$$

Προηγουμένως είχαμε καταλήξει στη διατήρηση της στροφορμής μέσω του θεωρήματος της Noether από την απαίτηση να είναι η δράση συμμετρική σε στροφές των χωρικών συντεταγμένων. Είναι τα δύο συμπεράσματα ισοδύναμα; Όχι ακριβώς. Αν πράγματι η Λαγκρανζιανή έχει μορφή που μένει αναλλοίωτη σε στροφές των χωρικών αξόνων, π.χ. οι χωρικές μεταβολές εμφανίζονται μόνο σε όρους της μορφής $(\vec{\nabla}\phi)\cdot(\vec{\nabla}\phi)$, τότε το χωρικό κομμάτι του πίνακα T_{j}^{i} είναι συμμετρικό και επομένως διατηρείται η στροφορμή. Αν όμως η Λαγκρανζιανή δεν έχει αυτή τη συμμετρία, τότε είναι σίγουρο ότι δεν διατηρείται η στροφορμή; Απ' ότι φαίνεται θα μπορούσαμε να την κάνουμε να διατηρείται αν μπορούσαμε να μετατρέψουμε τον πίνακα T_{j}^{i} σε συμμετρικό. Μα μπορούμε να επέμβουμε στην κατασκευή του πίνακα και να τον αλλοιώσουμε; Ναι, γιατί η βασική ιδιότητα του T_{μ}^{ν} που μας έδωσε τη δυνατότητα να του αποδώσουμε φυσικό περιεχόμενο είναι η διατήρηση $T_{\mu,\nu}^{\nu}=0$. Αν μπορούσαμε να τον αλλάξουμε κατάλληλα και να τον καταστήσουμε συμμετρικό, δίχως να πειράξουμε την ιδιότητά του αυτή θα κατφέρναμε να διατηρήσουμε και τη στροφορμή του πεδίου.

Έστω, λοιπόν, κάποιες ποσότητες Σ_{μ}^{ν} οι οποίες προστιθέμενες καταλλήλως στον T_{μ}^{ν} τον μετατρέπουν σε συμμετρικό:

$${T^{(S)}}^{\nu}_{\mu}=T_{\mu}^{\nu}+\Sigma_{\mu}^{\nu} \tag{38}$$

όπου ο νεοεισαχθείς συμμετροποιητικός όρος Σ_{μ}^{ν} έχει κατασκευαστεί έτσι ώστε ${T^{(S)}}^{\nu}_{\mu}={T^{(S)}}^{\mu}_{\nu}$ και έχει επιπλέον την ιδιότητα

$$\Sigma_{\mu,\nu}^{\nu}=0 \tag{39}$$

[3] Αν είχαμε επεκτείνει ανάλογα το χωρικό χωρίο και στην περίπτωση της διατήρησης $T_{\mu,\nu}^{\nu}=0$, θα είχαμε καταλήξει στη διατήρηση της ενέργειας και της ορμής που περικλείεται στο πεδίο εντός του χωρίου αυτού.

έτσι ώστε η διατήρηση του T_μ^ν να συνεπάγεται αυτόματα και τη διατήρηση του συμμετρικού ${T^{(S)}}^\nu_{\ \mu}$. Μια έξυπνη τέτοια επιλογή για το Σ_μ^ν θα ήταν

$$\Sigma_\mu^\nu = {S_\mu^{\nu\lambda}}_{,\lambda} \tag{40}$$

με επιπλέον ιδιότητα

$$S_\mu^{\nu\lambda} = -S_\nu^{\lambda\mu} \tag{41}$$

αφού τότε

$$\Sigma_{\mu,\nu}^\nu = {S_\mu^{\nu\lambda}}_{,\lambda,\nu} = 0 \tag{42}$$

εξαιτίας της συμμετρικότητας της μετάθεσης των μερικών παραγώγων ως προς x^λ και x^ν και της αντισυμμετρικότητας, εκ κατασκευής, του $S_\mu^{\nu\lambda}$ στους δείκτες ν και λ. Με την πρόσθεση λοιπόν του νέου όρου καταφέραμε και τη διατήρηση του T_μ^ν να κρατήσουμε και τη συμμετρικότητά του να εξασφαλίσουμε ώστε να επιτύχουμε τη διατήρηση της στροφορμής.

Το μόνο που μένει είναι να ελέγξουμε κατά πόσο είναι εφικτό να βρούμε κάποιο ${S_\nu^{\mu\lambda}}_{,\lambda}$ τέτοιο ώστε να μπορεί να συμμετροποιηθεί οποιοδήποτε ασύμμετρο εκ κατασκευής T_ν^μ. Το ζητούμενο αντικείμενο θα πρέπει να σχετίζεται με το ασύμμετρο κομμάτι του T_ν^μ ως ακολούθως:

$${S_\mu^{\nu\lambda}}_{,\lambda} = {T^{(S)}}^\nu_{\ \mu} - T_\mu^\nu = -\frac{1}{2}(T_\mu^\nu - T_\nu^\mu) \ . \tag{43}$$

Για κάθε επιλογή των δεικτών ν, μ το δεξιό μέλος της παραπάνω σχέσης είναι κάποια συνάρτηση της χωροχρονικής θέσης. Επομένως ζητείται ένα αντικείμενο με 4 συνιστώσες (δείκτης λ) τέτοιο ώστε η χωροχρονική του απόκλιση να ισούται με τη δεδομένη συνάρτηση. Αυτό είναι πάντα εφικτό μαθηματικά (θυμηθείται ότι δεδομένης της οποιασδήποτε πυκνότητας φορτίου μπορούμε να βρούμε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου παντού η οποία συνδέεται με την πυκνότητα φορτίου μέσω μιας χωρικής στην περίπτωση αυτή απόκλιση). Γνωρίζοντας λοιπόν για κάθε τιμή των δεικτών μ, ν το αντικείμενο $S_\nu^{\nu\lambda}$ μπορούμε μέσω αυτού να συμμετροποιήσουμε τον πίνακα ενέργειας - ορμής. Αν το $S_\mu^{\nu\lambda}$ ληφθεί αυθαίρετα τότε αυτό αλλάζει τις συνιστώσες του T_μ^ν δίχως να τον καταστήσει συμμετρικό. Η επιπλέον τώρα απαίτηση το συμμετροποιητικό αντικείμενο να είναι και αντισυμμετρικό στους δύο επάνω δείκτες ώστε ο καινούργιος T_μ^ν να μπορεί να θεωρηθεί πίνακας ενέργειας - ορμής (διατηρούμενα ρεύματα) δεν ικανοποιείται αυτόματα αφού η μοναδική λύση της εξίσωσης

$$S_\mu^{\nu\lambda}(x)_{,\lambda} = A_\mu^\nu(x) \tag{44}$$

δεν έχει κανένα λόγο να είναι και αντισυμμετρική στους δείκτες $\nu\lambda$. Συμβαίνει όμως σε όλα τα γνωστά φυσικά πεδία η λύση αυτή να οδηγεί σε αντισυμμετρικό $S_\mu^{\nu\lambda}(x)$ (βλ. παρακάτω στα ηλεκτρομαγνητικά πεδία). Στην πραγματικότητα πίσω από αυτή την απρόσμενη αντισυμμετρικότητα των συμμετροποιητικών όρων κρύβεται η συμμετρία σε στροφές των συντεταγμένων όταν προστεθεί ο κατάλληλος συμμετροποιητικός όρος (βλ. ηλεκτρομαγνητικό πεδίο) πράγμα το οποίο είναι ισοδύναμο με την απαιτούμενη αντισυμμετρία του S.

3. Τέλος θα εξετάσουμε την περίπτωση μιας διαφορετικής συμμετρίας. Αυτής που προκύπτει από μετασχηματισμούς των πεδίων αυτών καθ᾽ αυτών. Ένας τέτοιος μετασχηματισμός μπορεί να προκύψει είτε αν η Λαγκρανζιανή δεν περιέχει όρους που εξαρτώνται από το πεδίο (παρά μόνο από παραγώγους αυτού) οπότε η πρόσθεση ενός σταθερού πεδίου $\psi =$ σταθερά οδηγεί στην ίδια Λαγκρανζιανή, είτε αν η Λαγκρανζιανή αποτελείται από τουλάχιστον δύο συνιστώσες πεδίου και με κατάλληλη αλλαγή των συνιστωσών αυτών η Λαγκρανζιανή παραμένει ίδια. Στην πρώτη περίπτωση η διατηρούμενη ποσότητα δεν είναι άλλη από τις εξισώσεις Euler - Lagrange (δείξτε το), ενώ στη δεύτερη περίπτωση οδηγούμαστε σε κάποιο νέο είδος διατηρούμενου ρεύματος που αφορά τα πεδία.

4 Πίνακας ενέργειας - ορμής

Θα πρέπει κάποια στιγμή να δικαιολογήσουμε γιατί προηγουμένως, που μελετούσαμε τη διατήρηση του T^{ν}_{μ}, γράψαμε το T^{l}_{μ} ως $\vec{T}_{\mu}$. Πέραν του ότι πρόκειται για μια τριάδα ποσοτήτων (για δεδομένη τιμή του δείκτη μ) χρειάζεται και να πληρεί κάποια συνταγή μετασχηματισμού για να μπορεί να χαρακτηριστεί χωρικό διάνυσμα. Συγκεκριμένα θα πρέπει να μετασχηματίζεται σε στροφές όπως τα διανύσματα. Εμείς θα δείξουμε κάτι πιο γενικό που υπό μια έννοια συμπεριλαμβάνει και την παραπάνω απαίτηση. Θα δείξουμε ότι το καθαρά χωρικό κομμάτι του T^{ν}_{μ}, δηλαδή το T^{i}_{j} οφείλει να είναι ένας τανυστής του τρισδιάστατου φυσικού χώρου. Ξεκινάμε κατ' αρχάς από την παρατήρηση ότι η τιμή της Λαγκρανζιανής (όντας τουλάχιστον για τα μηχανικά συστήματα η διαφορά κινητικής και δυναμικής ενέργειας) θα πρέπει να είναι ανεξάρτητη του συστήματος συντεταγμένων που εμείς χρησιμοποιούμε για να στήσουμε το χωρικό υπόβαθρο πάνω στο οποίο θα μετρήσουμε τα πεδία. Συνεπώς, η Λαγκρανζιανή θα είναι μια βαθμωτή ποσότητα και δεν θα εξαρτάται από τον προσανατολισμό του καρτεσιανού συστήματος των χωρικών συντεταγμένων. Έτσι, το κομμάτι αυτής που περιλαμβάνει τις χωρικές μεταβολές του πεδίου $\phi_i = \vec{\nabla}\phi$ δεν μπορεί παρά να εμπεριέχεται σε εσωτερικά γινόμενα της μορφής $(\vec{\nabla}\phi) \cdot (\vec{\nabla}\phi)$, [4] ή $\vec{A}(x) \cdot (\vec{\nabla}\phi)$, ή τέλος συναρτήσεις των παραπάνω. Από τη δεύτερη περίπτωση θα πρέπει να αποκλειστεί η εξάρτηση του διανύσματος $\vec{A}(x)$ από τις χωρικές συντεταγμένες αλλιώς δεν θα ίσχυε η ανεξαρτησία της Λαγκρανζιανής από τις χωρικές συντεταγμένες, επομένως το διάνυσμα $\vec{A}$ μόνο χρονική εξάρτηση θα μπορούσε να έχει. [5] Ας έρθουμε τώρα στην κατασκευή του T^{i}_{j} (βλ. σχέση (23).

$$T^{i}_{j} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,i}} \phi_{,j} - \delta^{i}_{j} \mathcal{L} \,. \tag{45}$$

Η παράγωγος $\partial \mathcal{L} / \partial \phi_{,i}$, σύμφωνα με τα παραπάνω λεχθέντα, είναι μια βαθμωτή συνάρτηση επί το $\phi_{,i}$ ή το A_i, δηλαδή, είναι ένα διάνυσμα. Επομένως το T^{i}_{j} είναι ένα γινόμενο διανυσμάτων $\phi_{,i}\phi_{,j}$ ή $A_i \phi_{,j}$ επί μια βαθμωτή συνάρτηση μείον το δ^{i}_{j}, ο οποίος είναι ο απλούστερος τανυστής δεύτερης τάξης τανυστής (είναι απλώς ο μοναδιαίος πίνακας), επί μια βαθμωτή συνάρτηση την $\mathcal{L}$. Συνολικά λοιπόν το T^{i}_{j} είναι ένας τανυστής, του τρισδιάστατου πάντα χώρου. Με τον ένα δείκτη σταθερό, η τριάδα που σχηματίζεται από τον άλλο δείκτη αποτελεί τις συνιστώσες ενός διανύσματος αφού ολόκληρος ο τανυστής μετασχηματίζεται κατάλληλα σε στροφές του συστήματος συντεταγμένων. Θα πρέπει να τονίσουμε βέβαια ότι όταν εκτελούμε στροφές των συντεταγμένων δεν είναι δυνατό να απαιτούμε να μετασχηματίζεται ως διάνυσμα μόνο η τριάδα T^{i}_{j} κρατώντας την τιμή του δείκτη j σταθερή και αλλάζοντας μόνο τις i κατευθύνσεις. Κάτι τέτοιο θα ήταν εντελώς παράλογο αφού και οι δύο δείκτες μαζί αλλάζουν όταν στρίβουμε τις συντεταγμένες. Το υποτιθέμενο διάνυσμα $\vec{T}_j$ αλλάζει εν γένει μέτρο όταν στρίβει το σύστημα συντεταγμένων (σκεφθείτε τι γίνεται με τις συνιστώσες του τανυστή $A^i B^j$ για μια δομένη σταθερή τιμή του δείκτη j). Όσο για το αντικείμενο T^{i}_{0}, αυτό είναι διάνυσμα με όλη τη σημασία της λέξης, αφού ισούται με το διάνυσμα (όπως επιχειρηματολογήσαμε παραπάνω) $\partial \mathcal{L} / \partial \phi_{,i}$ επί το ϕ_0 (το υπόλοιπο κομμάτι είναι μηδέν αφού $\delta^{i}_{0} = 0$).

Παραδείγματα

1. Χορδή εκτεινόμενη κατά μήκος του άξονα z:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\phi^{2}_{,0} - c^2 \phi^{2}_{,z} \right] \tag{46}$$

Η Λαγκρανζιανή αυτή είναι αναλοίωτη σε χωρικές-z και χρονικές μεταθέσεις. Ο πίνακας ενέρ-

[4] Μια πιο πλούσια από πλευράς αλληλεπιδράσεων Λαγκρανζιανή θα μπορούσε ίσως να περιλαμβάνει και όρους της μορφής $(\vec{\nabla}\phi^{(A)}) \cdot (\vec{\nabla}\phi^{(B)})$ όπου οι δείκτες A και B υποδηλώνουν διαφορετικές συνιστώσες πεδίων. Ακόμη, όμως, και σε αυτή την περίπτωση το επιχείρημά μας εξακολουθεί να ισχύει.

[5] Για να είμαστε πιο σαφείς η ύπαρξη ενός τέτοιου εσωτερικού γινομένου θα ήταν εντελώς αφύσικη για έναν κόσμο ισοτροπικό και χρονικά ομογενή αφού ένα τέτοιο διάνυσμα που αλληλεπιδρά με το πεδίο θα επέβαλε κάποια προκαθορισμένη χωρική κατεύθυνση και θα εμφάνιζε το σύμπαν διαφορετικό σε διαφορετικές χρονικές στιγμές.

γειας - ορμής θα είναι

$$T_\mu^\nu = \begin{pmatrix} T_0^0 = \frac{1}{2}\left[\phi_{,0}^2 + c^2\phi_{,z}^2\right] & T_z^0 = \phi_{,0}\phi_{,z} \\ T_0^z = -c^2\phi_{,0}\phi_{,z} & T_z^z = -\frac{1}{2}\left[\phi_{,0}^2 + c^2\phi_{,z}^2\right] \end{pmatrix} \tag{47}$$

Ισχύει

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E} = +c^2(\phi_{,0}(z=L)\phi_{,z}(z=L) - \phi_{,0}(z=0)\phi_{,z}(z=0)) \tag{48}$$

όπου

$$\mathcal{E} = \int_0^L dz \frac{1}{2}\left[\phi_{,0}^2 + c^2\phi_{,z}^2\right] \tag{49}$$

Στα άκρα όμως $\phi(z=L,t) = \phi(z=0,t) = 0$ οπότε

$$\mathcal{E} = \text{σταθ} \tag{50}$$

Επίσης,

$$\frac{d}{dt}\int_0^L dz\phi_{,0}\phi_{,z} = +\frac{1}{2}\left[\phi_{,0}^2 + c^2\phi_{,z}^2\right]_{z=0}^{z=L} = \frac{1}{2}[\phi_{,z}(z=L)^2 - \phi_{,z}(z=0)^2] \tag{51}$$

Για μια οδεύουσα προς τα δεξιά διαταραχή με σχήμα καμπάνας, το μπροστινό μέρος του παλμού θα κινείται προς τα πάνω με αρνητική χωρική κλίση και αντίθετα το πίσω μέρος του παλμού. Επομένως το πρώτο ολοκλήρωμα δίνει το αντίθετο της ορμής που μεταφέρει η χορδή (φανταστείτε μια χάντρα περασμένη στη χορδή: καθώς ο παλμός ταξιδεύει κατά πάνω της θα τη θέσει σε κίνηση στην κατεύθυνση που προχωρά ο παλμός). Έτσι η μεταβολή της ολικής ορμής που περικλείεται στη χορδή (μια χάντρα περασμένη στη χορδή θα σπρωχθεί από μια οδεύουσα διαταραχή της χορδής) οφείλεται στο μέτρο της κλίσης της χορδής στα άκρα. Αν μια οδεύουσα διαταραχή μικρού εύρους σε σχέση με το μήκος της χορδής φτάσει στο δεξί άκρο $z = L$ και δημιουργήσει μια κλίση της χορδής στη θέση αυτή η ορμή που μεταφέρει η χορδή θα αρχίσει να μικραίνει και στη συνέχεια να αλλάζει πρόσημο με αποτέλεσμα ο παλμός να ανακλαστεί.

2. Ας φανταστούμε στη συνέχεια μια γενίκευση της παραπάνω Λαγκρανζιανής που περιγράφει ελαστικά κύματα σε ζελέ. Τώρα η διαταραχή περιγράφεται με ένα διάνυσμα το $\vec{\phi}$ που περιγράφει τη μετατόπιση από τη θέση ισορροπίας κάθε στοιχείου όγκου του σώματος του ζελέ.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[\vec{\phi}_{,0}^2 - c^2\vec{\phi}_{,i}\cdot\vec{\phi}_{,i}\right] \tag{52}$$

Η εξίσωση κίνησης είναι

$$\vec{\phi}_{,00} - c^2\vec{\nabla}^2\vec{\phi} = 0 \tag{53}$$

Παρατηρούμε ότι ο μετασχηματισμός

$$\vec{x} \to \vec{x}' = \vec{x} + \epsilon\hat{n}\times\vec{x} \tag{54}$$

αποτελεί συμμετρία της Λαγκρανζιανής (να δειχτεί). Επομένως θα έχουμε και τη διατήρηση του

$$0 = \frac{d}{dx^a}(T_b^a\sigma^b) = \frac{d}{dx^a}(T_b^a(\hat{n}\times\vec{x})^b) \tag{55}$$

Ολοκληρώνοντας πάλι σε ολόκληρη τη χωρική περιοχή θα έχουμε

$$\frac{d}{dt}\int d^3x(T_b^0(\hat{n}\times\vec{x})^b) + \int d^3x\vec{\nabla}\cdot(\vec{T}_b(\hat{n}\times\vec{x})^b) = 0 \tag{56}$$

Το δεύτερο ολοκλήρωμα γίνεται

$$\begin{aligned} & \int d^3x \vec{\nabla} \cdot (\epsilon_{acb} \hat{n}^a \vec{T}_b x^c) \\ = & \int d^3x \epsilon^b_{ac} \hat{n}^a \vec{\nabla} \cdot (\vec{T}_b x^c) \\ = & \int d^3x \epsilon^b_{ac} \hat{n}^a (T^i_b x^c)_{,i} \\ = & \int d^3x \epsilon^b_{ac} \hat{n}^a (T^i_{b,i} x^c + T^c_b) \end{aligned} \tag{57}$$

το οποίο εξαφανίζεται αφού το κομμάτι $T^i_{b,i}$ αποτελεί μια τέλεια απόκλιση η οποία δεν συνεισφέρει καθόλου στο χωρικό ολοκλήρωμα αν ο υπό μελέτη όγκος περιλαμβάνει περιοχή μεγαλύτερη από το χώρο όπου τα πεδία είναι μη μηδενικά. Το δεύτερο κομμάτι είναι εκ ταυτότητος μηδέν αν ο $T^i_j = T^j_i$ είναι δηλαδή συμμετρικός ο πίνακας ενέργειας ορμής. [Υπολογίστε τον πίνακα ενέργειας ορμής του συγκεκριμένου φυσικού προβλήματος.] Η τελεύταια αυτή απαίτηση αν και ικανοποιείται από την εν λόγω Λαγκρανζιανή, δεν αποτελεί ουσιαστικό πρόβλημα αφού στις διάφορες συνιστώσες του πίνακα ενέργειας - ορμής αποδώσαμε το φυσικό νόημα της πυκνότητας και πυκνότητας ρεύματος ενέργειας και ορμής το ποίο δεν θα άλλαζε αν επαναορίζαμε τον T^μ_ν ως τον ακόλουθο συμμετρικό πίνακα

$$T^{(S)\mu}{}_\nu = T^\mu_\nu + S^{\mu\lambda}_\nu{}_{,\lambda} \tag{58}$$

όπου ο συμμετροποιητικός όρος $S^{\mu\lambda}_\nu{}_{,\lambda}$ έχει κατασκευαστεί έτσι ώστε $T^{(S)\mu}{}_\nu = T^{(S)\nu}{}_\mu$ και έχει επιπλέον την ιδιότητα

$$S^{\mu\lambda}_\nu = -S^{\lambda\mu}_\nu \tag{59}$$

Εκτελώντας αυτή την αλλαγή ο καινούργιος $T^{(S)\mu}{}_\nu$ έχει και αυτός, εκ κατασκευής, την ιδιότητα $T^{(S)\,\mu}{}_{\nu,\mu} = 0$ αφού $S^{\mu\lambda}_\nu{}_{,\lambda,\mu} = -S^{\lambda\mu}_\nu{}_{,\lambda,\mu} = -S^{\lambda\mu}_\nu{}_{,\mu,\lambda} = 0$. Στο σημείο αυτό ας ελέγξουμε κατά πόσο είναι εφικτό να βρούμε κάποιο $S^{\mu\lambda}_\nu$ τέτοιο ώστε να μπορεί να συμμετροποιήσει οποιοδήποτε ασύμμετρο εκ κατασκευής T^μ_ν. Το ζητούμενο αντικείμενο θα πρέπει να σχετίζεται με το ασύμμετρο κομμάτι του T^μ_ν ως ακολούθως:

$$S^{\mu\lambda}_\nu{}_{,\lambda} = T^{(S)\mu}{}_\nu - T^\mu_\nu = \frac{1}{2}(T^\nu_\mu - T^\mu_\nu) \tag{60}$$

Το δεξιό μέλος της παραπάνω σχέσης είναι κάποια συνάρτηση της χωροχρονικής θέσης. Επομένως ζητείται ένα αντικείμενο με 4 συνιστώσες (δείκτης λ) τέτοιο ώστε η χωροχρονική του απόκλιση να ισούται με τη δεδομένη συνάρτηση. Αυτό είναι πάντα εφικτό μαθηματικά (θυμηθείται ότι δεδομένης της οποιασδήποτε πυκνότητας φορτίου μπορούμε να βρούμε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου παντού η οποία συνδέεται με την πυκνότητα φορτίου μέσω μιας χωρικής στην περίπτωση αυτή απόκλιση). Γνωρίζοντας λοιπόν για κάθε τιμή των δεικτών μ, ν το αντικείμενο $S^{\mu\lambda}_\nu$ μπορούμε μέσω αυτού να συμμετροποιήσουμε τον πίνακα ενέργειας - ορμής. Αν το $S^{\mu\lambda}_\nu$ ληφθεί αυθαίρετα τότε αυτό αλλάζει τις συνιστώσες του T^μ_ν δίχως να τον καταστήσει συμμετρικό. Η επιπλέον τώρα απαίτηση το συμμετροποιητικό αντικείμενο να είναι και αντισυμμετρικό στους δύο επάνω δείκτες ώστε ο καινούργιος T^μ_ν να μπορεί να θεωρηθεί ως πίνακας ενέργειας - ορμής (διατηρούμενα ρεύματα) δεν ικανοποιείται αυτόματα, αλλά στις περισσότερες περιπτώσεις φυσικών πεδίων αυτό συμβαίνει (βλ. παρακάτω στα ηλεκτρομαγνητικά πεδία). Όταν λοιπόν ο πίνακας ενέργειας - ορμής είναι, ή μπορεί να καταστεί συμμετρικός, διατηρείται και η ποσότητα

$$L_{\hat{n}} = \int d^3x (T^0_b (\hat{n} \times \vec{x})^b) = \hat{n} \cdot (\hat{e}_i \epsilon_{ij}{}^k \int d^3x \, x^j T^0_k) \tag{61}$$

και εφόσον το $\hat{n}$ είναι αυθαίρετο θα διατηρείται και το

$$L_i = \epsilon_{ij}{}^k \int d^3x \; x^j T_k^0 \tag{62}$$

3. Τέλος ας θεωρήσουμε την περίπτωση όπου εκτός απο τις παραπάνω συμμετρίες που αφορούν σε μετασχηματισμούς των χωροχρονικών θέσεων υπάρχει και συμμετρία σε μετασχηματισμούς των ίδιων των πεδίων. Για παράδειγμα ας υποθέσουμε πως στην Λαγκρανζιανή πυκνότητα εμφανίζονται δύο πεδία στη μορφή ζευγαριών $\phi^{(1)}_{,\mu}\phi^{(1)}_{,\mu} + \phi^{(2)}_{,\mu}\phi^{(2)}_{,\mu}$ για κάθε δείκτη μ (δίχως την αθροιστική σύμβαση). Τότε φαίνεται αμέσως ότι μια στροφή στο χώρο των πεδίων αποτελεί συμμετρία της Λαγκρανζιανής. Πράγματι ο μετασχηματισμός

$$\begin{aligned} \phi^{(1)} &\rightarrow \phi^{(1)'} = \phi^{(1)} + \epsilon\phi^{(2)} \\ \phi^{(1)} &\rightarrow \phi^{(2)'} = \phi^{(2)} - \epsilon\phi^{(1)} \end{aligned} \tag{63}$$

αποτελεί συμμετρία της Λαγκρανζιανής με αντίστοιχο διατηρούμενο μέγεθος το

$$\int_{\partial V} dS_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^{(1)}_\nu}\phi^{(2)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^{(2)}_\nu}\phi^{(1)} \right) \tag{64}$$

Η ποσότητα εντός των παρενθέσεων μπορεί να θεωρηθεί ως κάποιο διατηρούμενο ρεύμα.

5 Μονόχορδο

6 Αλληλεπίδραση πεδίου με σωμάτιο

Στο εδάφιο αυτό θα εξετάσουμε ένα πρόβλημα μηχανικού πεδίου το οποίο με κάποιο τρόπο αλληλεπιδρά με ένα σωμάτιο, έτσι ώστε αφενός μεν το σωμάτιο να αλλάζει την κινητική του κατάσταση εξαιτίας του πεδίου και αφετέρου η κίνηση του σωματιδίου να αλλοιώνει την κίνηση του πεδίου. Το σύστημα αυτό που θα εξετάσουμε αν και απλοϊκό έχει ιδιαίτερη σημασία στην περιγραφή φυσικών συστημάτων αφού στον κόσμο που μας περιβάλλει συνυπάρχουν πεδία και σωματίδια που πολλές φορές αλληλεπιδρούν. Για παράδειγμα τα ηλεκτρικά φορτισμένα σωματίδια παράγουν ηλεκτρομαγνητικά πεδία που με τη σειρά τους ασκούν δυνάμεις στον ίδιο τους τον εαυτό. Κατά την ανάλυση του μηχανικού μας συστήματος ολόκληρο το εύρος της δυσκολίας του γενικότερου προβλήματος αλληλεπίδρασης πεδίου - σωματιδίου θα ξεδιπλωθεί μπροστά μας και τα μαθηματικά εργαλεία που θα χρησιμοποιήσουμε θα είναι αυτά που θα πρέπει να χρησιμοποιήσει κανείς για να αναλύσει το οποιοδήποτε αντίστοιχο φυσικό πρόβλημα.

Ξεκινάμε λοιπόν με το υποδειγματικό σύστημα πεδίου-σωματιδίου που θα είναι μια μονοδιάστατη χορδή απείρου μήκους με συγκεκριμένη γραμμική πυκνότητα και τεντωμένη υπό σταθερή τάση. Στη χορδή αυτή μπορούν να διαδίδονται εγκάρσιες διαταραχές, αλλά αυτές δεν διαδίδονται ως ακριβώς ελεύθερα κύματα, διότι υπάρχει επιπλέον μια σημειακή μάζα (χάντρα) η οποία μπορεί να κινείται κατά μήκος της χορδής χωρίς τριβές. Αν η χορδή είναι οριζόντια μέσα σε ένα πεδίο βαρύτητας (που για ευκολία θεωρούμε ότι δεν επιφέρει αλλοιώσεις στο ευθύγραμμο σχήμα της χορδής όταν αυτή βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας), τότε η παρουσία της χάντρας θα αλλοιώσει το σχήμα της χορδής και η ίδια θα δέχεται δυνάμεις από τη χορδή όταν φτάσουν σε αυτήν διαταραχές της χορδής από μακριά. Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι στη χορδή διαδίδονται διαμήκεις (αντί εγκάρσιες) διαταραχές και η μεν παρουσία της χορδής προκαλεί πυκνώματα ή αραιώματα στη χορδή, η δε χορδή προκαλεί δυνάμεις αντίστασης στη χάντρα όταν υπάρχουν διαφορές πύκνωσης της χορδής εκατέρωθεν της χάντρας. Η Λαγκρανζιανή (όχι Λαγκρανζιανή πυκνότητα τώρα) του συστήματος που θα θεωρήσουμε θα είναι

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2 + \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{2}\rho(\dot{\phi}^2 - c^2\phi'^2) - \int_{-\infty}^{\infty} dx \phi \; q\delta(x - x(t)) \; . \tag{65}$$

Παρατηρούμε ότι οι δύο πρώτοι όροι αφορούν ένα ελεύθερο σωματίδιο και ένα ελεύθερο πεδίο αντίστοιχα, ενώ ο τρίτος όρος που συζευγνύει το πεδίο ϕ με το σωματίδιο που βρίσκεται στη θέση $x(t)$ μέσω της δέλτα συνάρτησης είναι ο όρος αλληλεπίδρασης. Η αλληλεπίδραση που θεωρήσαμε έχει την πιο απλή μορφή που θα μπορούσαμε να κατασκευάσουμε, αφού η Λαγκρανζιανή αλληλεπίδρασης δεν είναι τίποτε άλλο από την τιμή του πεδίου στη θέση της χάντρας $-q\phi(x(t))$, με έναν κατάλληλο πολλαπλασιαστικό όρο q μπροστά, που μετράει την ένταση της αλληλεπίδρασης. Ο όρος αυτός είναι αυτός που θα καθορίσει ακριβώς τι φυσικό σύστημα περιγράφουμε. Όταν θα γράψουμε τις εξισώσεις Euler - Lagrange για το σωματίδιο χρειαζόμαστε τους όρους που περιέχουν το $x(t)$ και τις χρονικές παραγώγους αυτού (πρώτος και τρίτος όρος, ο τελευταίος με τη μορφή που παίρνει μετά την ολοκλήρωση, βλ. παραπάνω):

$$m\ddot{x}(t) = -q\phi'(x(t)) \, . \tag{66}$$

Με άλλα λόγια το πεδίο παίζει το ρόλο δυναμικού πεδίο το οποίο ασκεί δύναμη στο σωματίδιο. Όσο για το πεδίο, οι εξισώσεις κίνησης πηγάζουν από τους όρους της Λαγκρανζιανής πυκνότητας που περιέχεται το πεδίο ϕ και οι χωροχρονικές παραγώγους αυτού (δεύτερος και τρίτος όρος, ο τελευταίος με τη μορφή της σχέσης (66)). Οι εξισώσεις αυτές είναι οι ακόλουθες

$$\rho(\ddot{\phi} - c^2\phi'') = -q\delta(x - x(t)) \, . \tag{67}$$

Στη συνέχεια θα επιχειρήσουμε να λύσουμε τη δεύτερη εξίσωση, παραβλέποντας προς το παρόν το ότι δεν γνωρίζουμε την κίνηση του σωματίου $x(t)$.

Ας επιχειρήσουμε κατ᾽ αρχάς να βρούμε μια στατική λύση των παραπάνω δύο εξισώσεων, δηλαδή ας ψάξουμε για λύσεις της μορφής $x(t) = x_X =$ σταθερό, $\phi(x,t) = \phi(x)$. Με ολοκλήρωση της εξίσωσης (67) γύρω από τη θέση της χάντρας θα έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{x_X-}^{x_X+} \phi'' dx = \frac{q}{\rho c^2} \int_{x_X-}^{x_X+} \delta(x - x_X) dx &= \frac{q}{\rho c^2} \quad \Rightarrow \\ \phi'(x_X+) - \phi'(x_X-) &= \frac{q}{\rho c^2} \quad \Rightarrow \\ \phi &= \frac{q}{2\rho c^2}|x - x_X| \, . \end{aligned} \tag{68}$$

Για να είμαστε ακριβείς η τελευταία σχέση στην οποία καταλήξαμε για το πεδίο δεν αποτελεί μονοσήμαντη λύση της αμέσως προηγούμενης σχέσης. Επελέχθη απλώς ως η πιο συμμετρική ώστε η δύναμη που ασκείται στη χάντρα να είναι μηδενική και η χάντρα να παραμένει για πάντα στη θέση της. Εδώ μάλιστα εμφανίζεται και το εξής πρόβλημα. Η δύναμη που δρα στη χάντρα δίδεται από την χωρική παράγωγο του πεδίου στη θέση αυτής. Όμως ταυτόχρονα η κλίση του πεδίου παρουσιάζει ασυνέχεια στη θέση της χάντρας. Έτσι ο υπολογισμός της δύναμης στη χάντρα θα γίνει λαμβάνοντας τη μέση τιμή δεξιάς και αριστερής κλίσης στη θέση της χάντρας. Εμείς κατασκευάσαμε το πεδίο έτσι ώστε οι δύο αυτές κλίσεις να είναι ίσες και αντίθετες και η στάσιμη λύση να οδηγεί σε συνεπή λύση (μη επιταχυνόμενη χάντρα).

Και τώρα ας προχωρήσουμε να λύσουμε την εξίσωση που διέπει τη μορφή του πεδίου στη γενική περίπτωση, όπου τα πράγματα είναι χρονοεξαρτώμενα. Η μορφή που έχει η διαφορική εξίσωση (67) είναι αυτή μιας μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης. Τέτοιες εξισώσεις λύνονται αρκετά εύκολα, αρκεί να κατασκευάσει κανείς πρώτα τη *συνάρτηση Green* αυτών (βλ. σχετικά στο Μαθηματικό Παράρτημα XXX). Δηλαδή να τη λύσει, δεδομένου ότι το μη ομογενές μέρος αυτής είναι μια συνάρτηση δέλτα σε όλες τις διαστάσεις που υπάρχουν στη διαφορική εξίσωση. Συνήθως η κατασκευή της συνάρτησης Green για ένα φυσικό πρόβλημα είναι εύκολη αν βασιστεί κανείς σε φυσικά επιχειρήματα. Εδώ θα ακολουθήσουμε τη μαθηματική κατασκευή αυτής, η οποία οδηγεί με συνέπεια στη εύρεσή της για κάθε αντίστοιχη ομογενή διαφορική εξίσωση και στο τέλος θα προσπαθήσουμε να δικαιολογήσουμε τη λύση αυτή ως απευθείας φυσική κατασκευή. Θα επιχειρήσουμε λοιπόν να λύσουμε πρώτα την εξίσωση

$$\frac{\partial^2 G(x,t;x_0,t_0)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 G(x,t:x_0,t_0)}{\partial x^2} = \delta(x - x_0)\delta(t - t_0) \tag{69}$$

όπου για να διαχωρίσουμε τη λύση αυτού του προβλήματος από το πρόβλημα που αρχικά θέλαμε να λύσουμε ονομάσαμε τη λύση G αντί ϕ. Η αναγραφή και των παραμέτρων x_0, t_0 διακριτά από τις μεταβλητές x, t στη G οφείλεται στο ότι το συγκεκριμένο πρόβλημα έχει αυτές τις παραμέτρους. Η λύση $G(x,t)$ τούτου του προβλήματος είναι η συνάρτηση Green του αρχικού μας προβλήματος. Γνωρίζοντας τη συνάρτηση Green η λύση του προβλήματός μας (67) είναι η

$$\phi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt_0 \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \, G(x,t : x_0, t_0) \left(-\frac{q}{\rho} \right) \delta(x_0 - x(t_0)) \; . \tag{70}$$

Το ότι πράγματι η συνάρτηση (70) αποτελεί λύση της (67) μπορεί κανείς εύκολα να το διαπιστώσει εφαρμόζοντας κατευθείαν σε αυτή το γραμμικό τελεστή d' Alembert σε μία διάσταση $\Box \equiv \partial^2/\partial t^2 - c^2 \partial^2/\partial x^2$ οπότε ο τελεστής θα περάσει μέσα στο ολοκλήρωμα που βρίσκεται η μοναδική εξάρτηση από τις μεταβλητές x, t, θα δημιουργήσει τη δισδιάστατη δέλτα, και θα καταλήξει στην αρχική εξίσωση την οποία θέλαμε να επιλύσουμε.

Ας περάσουμε λοιπόν στην κατασκευή της συνάρτησης Green για το πρόβλημά μας. Επειδή το δεξιό μέλος της εξίσωσης (69) είναι συνάρτηση μόνο των $x - x_0$ και $t - t_0$ φανταζόμαστε ότι το ίδιο θα ισχύει και για τη συνάρτηση G, δηλαδή

$$G(x, t; x_0, t_0) = G(x - x_0, t - t_0) \; . \tag{71}$$

Αλλάζοντας λοιπόν τις μεταβλητές μας σε $X = x - x_0$ και $T = t - t_0$ έχουμε να λύσουμε την ακόλουθη, κάπως πιο ξεκάθαρη, διαφορική εξίσωση

$$\frac{\partial^2 G(X,T)}{\partial T^2} - c^2 \frac{\partial^2 G(X,T)}{\partial X^2} = \delta(X)\delta(T) \; . \tag{72}$$

Ας ξαναγράψουμε τη συνάρτηση Green μέσω του μετασχηματισμού Fourier αυτής

$$G(X,T) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_X \int_{-\infty}^{\infty} dk_T \; e^{i(k_X X + k_T T)} \tilde{G}(k_X, k_T) \; . \tag{73}$$

Δρώντας με τον τελεστή d' Alembert στη συνάρτηση Green γραμμένη με την παραπάνω μορφή λαμβάνουμε

$$\Box_{T,X} G(X,T) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_X \int_{-\infty}^{\infty} dk_T \; (-k_T^2 + c^2 k_X^2) e^{i(k_X X + k_T T)} \tilde{G}(k_X, k_T) \tag{74}$$

και συγκρίνοντας την έκφραση αυτή με την έκφραση για τη δισδιάστατη δέλτα

$$\delta(X)\delta(T) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_X \int_{-\infty}^{\infty} dk_T \; e^{i(k_X X + k_T T)} \; , \tag{75}$$

αντιλαμβανόμαστε ότι ο μετασχηματσιμός Fourier της συνάρτησης Green είναι

$$\tilde{G}(k_X, k_T) = \frac{1}{c^2 k_X^2 - k_T^2} \; . \tag{76}$$

Το τρυκ που εφαρμόσαμε προκειμένου να κατασκευάσουμε τη συνάρτηση Green, είναι κατ' ουσίαν ανάλογο με το τρυκ που εφαρμόζει κανείς στην εύρεση της λύσης του αρμονικού ταλαντωτή με απόσβεση, όπου υποθέτει ότι οι λύσεις είναι εκθετικές (της μορφής e^{Ht}) και στη συνέχεια η διαφορική εξίσωση μετατρέπεται σε ένα αλγεβρικό πρόβλημα για τον εκθέτη H. Στην περίπτωσή μας γράφει κανείς μέσω του αναπτύγματος Fourier τη λύση ως γραμμικό συνδυασμό κυματικών λύσεων $e^{i(k_X X + k_T T)}$ και στη συνέχεια επιλύει ένα αλγεβρικό πρόβλημα για τα πλάτη των διαφόρων κυματικών λύσεων $\tilde{G}(k_X, k_T)$.

Τώρα είμαστε έτοιμοι να δώσουμε μια τελική αναλυτική μορφή στη συνάρτηση Green. Αρκεί να εκτελέσουμε την ολοκλήρωση της έκφρασης (73) με τον Fourier μετασχηματισμό της G που βρήκαμε παραπάνω.

$$G(X,T) = -\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty} dk_X e^{ik_X X}\int_{-\infty}^{\infty} dk_T \frac{e^{ik_T T}}{k_T^2 - c^2 k_X^2}\ . \tag{77}$$

Ο υπολογισμός του δεύτερου ολοκληρώματος (ως προς k_T) παρουσιάζει δυσκολία στα σημεία $k_T = \pm c|k_X|$, αλλά με μια ελαφρώς παραλλαγμένη τροχιά επί του μιγαδικού επιπέδου μπορούμε να παρακάμψουμε το πρόβλημα. Για παράδειγμα επιλέγοντας να διασχίσουμε όχι την ευθεία των πραγματικών k_T αλλά την ευθεία που είναι παράλληλη σε αυτή αλλά περνά "ξυστά" πάνω ή κάτω από αυτήν. Οι προαναφερθέντες πόλοι της ολοκληρωτέας ποσότητας έτσι αποφεύγονται και η ολοκλήρωση μπορεί να υπολογιστεί κλείνοντας την τροχιά με ένα κατάλληλο ημικύκλιο άπειρης ακτίνας ώστε να μην συνεισφέρει στην ολοκλήρωση. Η μέθοδος των ολοκληρωτικών υπολοίπων[6] αρκεί τότε να μας παράσχει το αποτέλεσμα του επιθυμητού ολοκληρώματος. Αν επιλέξουμε να διασχίσουμε τον άξονα των πραγματικών k_T από κάτω και να κλείσουμε τη διαδρομή μας με το ημικύκλιο στον ημιχώρο των θετικών φανταστικών τιμών θα περικλείσουμε τους δύο πόλους. Για να μπορέσουμε όμως να λάβουμε κάποια λογική τιμή για το ολοκλήρωμά μας θα πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι το άνω ημικύκλιο δεν συνεισφέρει στην ολοκλήρωση. Αυτό συμβαίνει εφόσον

$$\lim_{R\to\infty} e^{iRe^{i\theta}T} = 0\ , \tag{78}$$

για $\pi \geq \theta \geq 0$, δηλαδή για $T > 0$. Αν για θετικές τιμές του T είχαμε επιλέξει την κλειστή διαδρομή να αποτελείται από την πάνω από τους πόλους ευθεία και το άνω ημικύκλιο, λόγω του ότι οι πόλοι θα έμεναν απ' έξω και της μηδενικής συνεισφοράς του ημικυκλίου στην ολοκλήρωση το αποτέλεσμα του ολοκληρώματος θα ήταν μηδέν.

Αντίστοιχα, για $T < 0$, η κλειστή τροχιά που περιλαμβάνει τους δύο πόλους περνά πάνω από τους πόλους και κλείνει με το κάτω ημικύκλιο, με την ολοκλήρωση κατά μήκος του ημικυκλίου να σβήνει καθώς μεγαλώνει η ακτίνα του ημικυκλίου δίνει μια τιμή στην ολοκλήρωση ως προς k_T, αλλά μηδενίζεται αν η ολοκλήρωση ως προς k_T αντικατασταθεί με αυτή που περνά κάτω από τους πόλους, εφόσον δεν περιλαμβάνει τους πόλους.

Ακολουθώντας λοιπόν τους κανόνες της μιγαδικής ολοκλήρωσης κατά μήκος κλειστών καμπυλών θα έχουμε

$$\int_{-\infty-i\epsilon}^{\infty-i\epsilon} dk_T \frac{e^{ik_T T}}{k_T^2 - c^2 k_X^2}\begin{cases} +0^{(\text{άνω})} = +2\pi i\left(\frac{e^{ic|k_X|T}}{2c|k_X|} - \frac{e^{-ic|k_X|}}{2c|k_X|}\right), & \text{όταν } T > 0\ , \\ +0^{(\text{κάτω})} = 0, & \text{όταν } T < 0\ , \end{cases} \tag{79}$$

και

$$\int_{-\infty+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} dk_T \frac{e^{ik_T T}}{k_T^2 - c^2 k_X^2}\begin{cases} +0^{(\text{κάτω})} = 0, & \text{όταν } T > 0\ , \\ +0^{(\text{άνω})} - 2\pi i\left(\frac{e^{ic|k_X|T}}{2c|k_X|} - \frac{e^{-ic|k_X|}}{2c|k_X|}\right), & \text{όταν } T < 0\ . \end{cases} \tag{80}$$

Το μηδέν στο αριστερό σκέλος των δύο παραπάνω εκφράσεων έχει γραφεί για να μας θυμίζει τη μηδενική συμβολή των ημικυκλιών (είτε άνω, είτε κάτω) στην ολοκλήρωση. Πιο συνοπτικά

$$\begin{aligned} \int_{-\infty-i\epsilon}^{\infty-i\epsilon} dk_T \frac{e^{ik_T T}}{k_T^2 - c^2 k_X^2} &= -2\pi\Theta(T)\frac{\sin(c|k_X|T)}{c|k_X|} \\ \int_{-\infty+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} dk_T \frac{e^{ik_T T}}{k_T^2 - c^2 k_X^2} &= +2\pi\Theta(-T)\frac{\sin(c|k_X|T)}{c|k_X|}\ . \end{aligned} \tag{81}$$

[6]Η θεωρία των μιγαδικών συναρτήσεων μας δίνει τη δυνατότητα να υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα αναλυτικών συναρτήσεων (δηλαδή συναρτήσεων που έχει νόημα η παράγωγός τους επί του μιγαδικού επιπέδου) κατά μήκος κλειστών διαδρομών δεδομένων των πόλων που παρουσιάζει η συνάρτηση εντός της θεωρούμενης κλειστής διαδρομής. Συγκεκριμένα, για μια συνάρτηση η οποία μπορεί να γραφεί ως $f(z)$, η οποία παρουσιάζει πόλους στα σημεία z_i και επομένως μπορεί να αναπτυχθεί ως $g_i/(z - z_i)$ κοντά στα σημεία αυτά, το ολοκλήρωμα $\oint_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum \pm g_i(z_i)$ με το πρόσημο να καθορίζεται από τη φορά διαγραφής της κλειστής διαδρομής γύρω από τον κάθε πόλο.

Στο σημείο αυτό ας σημειώσουμε μόνο ότι οι δύο περιπτώσεις (ολοκλήρωση πάνω ή κάτω από τον άξονα των πραγματικών τιμών του k_X) που προέκυψαν ως αναγκαία[7] μαθηματική τροποποίηση των υπολογισμών θα πρέπει να ανταποκρίνεται σε κάποια διαφορετική φυσική κατάσταση, την οποία υπαινίσσεται η συνάρτηση βήματος $\Theta(\pm T)$. Και τώρα ας ολοκληρώσουμε τον υπολογισμό μας για τη συνάρτηση Green και στις δύο περιπτώσεις που αναγκαστήκαμε να τροποποιήσουμε τον υπολογισμό μας ώστε να έχει νόημα αυτός.

$$G(X,T) = \pm\frac{\Theta(\pm T)}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk_X e^{ik_X X}\frac{\sin(c|k_X|T)}{c|k_X|}\,, \tag{82}$$

με το πάνω ή κάτω πρόσημο ανάλογα με τη διαδρομή της ολοκλήρωσης. Αν τώρα, χρησιμοποιήσουμε την αρτιότητα της συνάρτησης $\sin(x)/x$ και αναλύσουμε ταυτόχρονα και το ημίτονο $\sin(a)$ σε $(e^{ia} - e^{-ia})/(2i)$ καταλήγουμε μετά από ανασύνταξη των όρων στο ακόλουθο ολοκλήρωμα

$$G(X,T) = \pm\frac{\Theta(\pm T)}{4\pi i}\left(\int_{-\infty}^{\infty} dk_X \frac{e^{ik_X(X+cT)}}{ck_X} - \int_{-\infty}^{\infty} dk_X \frac{e^{ik_X(X-cT)}}{ck_X}\right)\,. \tag{83}$$

Τα δύο παραπάνω ολοκληρώματα δεν είναι τίποτε άλλο από συναρτήσεις βήματος των μη ολοκληρωτέων μεταβλητών τους. Η διαπίστωση αυτή μπορεί να γίνει είτε με ολοκλήρωση σε κλειστές διαδρομές στο μιγαδικό πεδίο, είτε απλά παρατηρώντας ότι αν τα ολοκληρώματα αυτά παραγωγιστούν ως προς τις μη ολοκληρωτέες μεταβλητές τους θα οδηγήσουν σε συναρτήσεις δέλτα. Έτσι

$$G(X,T) = \pm\frac{\Theta(\pm T)}{4\pi i}\frac{2\pi i}{c}\left[\Theta(X+cT) - \Theta(X-cT)\right] = \pm\frac{\Theta(\pm T)}{2c}\left[\Theta(X+cT) - \Theta(X-cT)\right]\,. \tag{84}$$

Αν μελετήσουμε λίγο την συμπεριφορά των δύο θήτα συναρτήσεων εντός της αγκύλης θα δούμε ότι οι δύο λύσεις είναι οι ακόλουθες πολύ απλές λύσεις: Είτε $1/2c$ εντός του μελλοντικού "κώνου διάδοσης σήματος στη χορδή" ($cT \geq X \geq -cT$) για $T > 0$, είτε $1/2c$ εντός του παρελθοντικού "κώνου διάδοσης σήματος στη χορδή" ($-cT \geq X \geq cT$) για $T < 0$. Ας δούμε λίγο τι κρύβεται σε αυτή τη λύση, που επαναλαμβάνουμε, αναπαριστά την εξέλιξη του κυματισμού στη χορδή αν αυτή διεγερθεί τη χρονική στιγμή $T = 0$ στο σημείο $X = 0$ με "στιγμιαίο" τοπικά και χρονικά τρόπο (συνάρτηση δέλτα). Τι εννοούμε όμως όταν λέμε να "διεγερθεί"; Η απάντηση δεν είναι η προφανής, να πάρουμε και να τεντώσουμε τη χορδή με τον "δέλτα" τρόπο. Κάτι τέτοιο θα εισερχόταν ως αρχική συνθήκη στην ομογενή εξίσωση (67). Η σωστή απάντηση είναι ότι η λύση αυτή αντιστοιχεί στην στιγμιαία εμφάνιση (ακολουθούμενη από εξαφάνιση) μιας χάντρας με κατάλληλη μάζα στη θέση $X = 0$. Αυτό τώρα μοιάζει ακόμη πιο περίεργο αφού δεν περιμέναμε η παρουσία της χάντρας και μόνο να δημιουργεί διαταραχές κατά μήκος της χορδής. Όμως, όλα κρύβονται στην επιλογή του όρου αλληλεπίδρασης στη Λαγκρανζιανή. Η δική μας (η απλούστερη δυνατή, αλλά συνάμα αυθαίρετη) επιλογή ήταν τέτοια ώστε να οδηγεί σε κύματα η παρουσία και μόνο της χάντρας. Μάλιστα τα κύματα από αυτή τη χάντρα - φάντασμα όπως είναι λογικό κινούνται και προς τα δεξιά και προς τα αριστερά εξαπλούμενα με την ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων στη χορδή ως όφειλαν εξαιτίας της συμμετρίας που παρουσιάζει η αρχική διαταραχή. Το δε πλάτος των κυμάτων είναι σταθερό. Τέλος οι δύο διαφορετικές λύσεις ανταποκρίνονται σε διαφορετικές ιστορίες του συστήματος. Αυτή με τον όρο $\Theta(T)$ αντιστοιχεί σε μια ήρεμη αρχικά χορδή, ενώ η άλλη σε μια χορδή με αρχική διέγερση τέτοια όπως αυτή περιγράφεται από τα κύματα, η οποία αμέσως μετά την εμφάνιση - εξαφάνιση της χάντρας ηρεμεί αμέσως. Κατ' ουσίαν, η δεύτερη λύση είναι ακριβώς η ίδια με την πρώτη αρκεί να αντιστρέψει κανείς τη φορά του χρόνου ($T \to -T$) και επομένως εξίσου φυσική, αφού αν "παίξει" κανείς το βίντεο της πρώτης λύσης, που περιγράφει κύματα που δημιουργούνται τη στιγμή $T = 0$ και διαδίδονται στη συνέχεια κατά μήκος της χορδής, ανάποδα –κάτι που είναι απόλυτα σύμφωνο με τους νόμους της νευτώνειας μηχανικής– θα δει κύματα να συγκλίνουν από τα άκρα της χορδής προς το σημείο $X = 0$ και με το που σχηματίζουν

[7]Θα μπορούσε, κάλιστα, να επιλεγεί και μια άλλη πιο περίεργη διαδρομή, για παράδειγμα πάνω από τον θετικό πόλο και κάτω από τον αρνητικό πόλο.

μια ισχυρή διαταραχή στο σημείο αυτό τη στιγμή $T=0$ η στιγμιαία παρουσία της χάντρας εξαφανίζει πλήρως αυτή τη διαταραχή και η χορδή επανέρχεται στην κατασταση ισορροπίας.

Ας επανέλθουμε τώρα στο φυσικό μας πρόβλημα που αφορά την αλληλεπίδραση της συνεχώς υπαρκτής και μάλιστα κινούμενης χάντρας. ΄Οπως είπαμε η λύση που περιγράφει τη διαταραχή της χορδής θα είναι αυτή που δίδεται από τη σχέση (70)

$$\phi = -\frac{q}{\rho c}\int_{-\infty}^{\infty} dt_0 \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \delta(x_0 - x(t_0)) \frac{\pm\Theta(\pm(t-t_0))}{2c}\left[\Theta(x-x_0+ct-ct_0) - \Theta(x-x_0-ct+ct_0)\right] . \tag{85}$$

Ποια συνάρτηση Green θα επιλέξουμε να χρησιμοποιήσουμε εδώ; XXXXX Η απάντηση εξαρτάται από το ποιο φυσικό πρόβλημα έχουμε να επιλύσουμε. ΄Εστω ότι έχουμε το στατικό πρόβλημα που μελετήσαμε στην αρχή. Η χάντρα βρίσκεται συνεχώς στη θέση $x(t) = x_X$. Το πεδίο θα είναι τότε

$$\begin{aligned}\phi &= -\frac{q}{2\rho c^2}\int_{-\infty}^{ct} d(ct_0)\left[\Theta(x-x_X+ct-ct_0) - \Theta(x-x_X-ct+ct_0)\right] \\ &= -\frac{q}{2\rho c^2}\left[ct - |x-x_X| - (-\infty)\right] .\end{aligned} \tag{86}$$

Η τελευταία έκφραση εξήχθη υπολογίζοντας το διάστημα των t_0 που οδηγούν σε θετική τιμή το όρισμα των συναρτήσεων Θ. Το άπειρο που εμφανίστηκε στην παραπάνω έκφραση μπορεί να φαίνεται προβληματικό αλλά δεν είναι. Μπορεί κανείς να το αγνοήσει σαν να ήταν μια σταθερά η οποία δεν οδηγεί σε διαφορετικά φυσικά αποτελέσματα. Είναι ακριβώς σαν τη αυθαίρετη σταθερά που μπορεί κανείς να προσθέσει σε μια συνάρτηση δυναμικού χωρίς να αλλάξει τη δύναμη που αυτό συνεπάγεται. Παρατηρούμε ότι η χωρική εξάρτηση είναι ακριβώς αυτή που είχαμε αρχικά υπολογίσει για μια στατική κατάσταση. Η δε χρονική εξάρτηση, αν και ανευ φυσικής σημασίας αφού αλλάζει συνολικά την τιμή του πεδίου σε ολόκληρη τη χορδή, σχετίζεται με το ότι η πληροφορία περί ύπαρξης της χάντρας και ανάλογης διαμόρφωσης του πεδίου μεταδίδεται κατά μήκος της χορδής με ταχύτητα αυτή της διάδοσης των κυμάτων c. ΄Ετσι, αν για παράδειγμα τοποθετούσαμε τη χάντρα στη χορδή τη στιγμή $t=0$, η ολοκλήρωση ως προς dt_0 θα αρχιζε όχι από το $-\infty$ αλλά από το 0. Στην περίπτωση αυτή αν υπολογίσουμε τα διαστήματα όπου τα ορίσματα των Θ είναι θετικά θα έχουμε

$$\phi = -\frac{q}{2\rho c^2}\begin{cases} 0, & \text{για } ct < |x-x_X| , \\ ct - |x-x_X|, & \text{για } ct > |x-x_X| , \end{cases} \tag{87}$$

δηλαδή το πεδίο παίρνει την προηγούμενη μορφή του εντός της περιοχής που έχει προλάβει να διαδοθεί η πληροφορία περί ύπαρξης χάνδρας, ενώ είναι μηδενικό έξω από την περιοχή αυτή (ακόμη εκεί αγνοείται η ύπαρξη της χάντρας).

Ας δοκιμάσουμε τώρα το πεδίο μιας χάντρας που κινείται με σταθερή ταχύτητα. Για να κινείται η χάντρα με σταθερή ταχύτητα θα πρέπει η κλίση του πεδίου δεξιά και αριστερά από τη χάντρα να είναι η ίδια. ΄Εστω ότι η θέση της χάντρας σε κάθε χρονική στιγμή είναι $x_X(t_0) = vt_0$ (με $v > 0$). Το όρισμα της πρώτης Θ είναι θετικό εφόσον

$$x - vt_0 + ct - ct_0 > 0 \Rightarrow t_0 < \frac{x+ct}{v+c} \tag{88}$$

΄Ετσι το ολοκλήρωμα της πρώτης Θ δίνει $\min[t, (x+ct)/(v+c)] - (-\infty)$. Ας αγνοήσουμε το άπειρο ως μη έχον ιδιαίτερη φυσική σημασία. Το όρισμα της δεύτερης Θ θα είναι θετικό εφόσον

$$x - vt_0 - ct + ct_0 > 0 \Rightarrow \begin{cases} t_0 < \frac{x-ct}{v-c}, & \text{για } v > c , \\ t_0 > \frac{-x+ct}{c-v}, & \text{για } v < c . \end{cases} \tag{89}$$

΄Ετσι, το ολοκλήρωμα της δεύτερης Θ δίνει $\min[t, (x-ct)/(v-c)] - (-\infty)$, όταν $v > c$ και $\max[0, t - (-x+ct)/(c-v)]$, όταν $v < c$.

Συνοψίζοντας, για $v > c$ (όταν δηλαδή η χάντρα τρέχει γρηγορότερα από την ταχύτητα διάδοσης των κυματικών διαταραχών)

$$\begin{aligned}
\phi &= -\frac{q}{2\rho c^2}\left(\min\left[t, \frac{x+ct}{v+c}\right] - \min\left[t, \frac{x-ct}{v-c}\right]\right) \\
&= -\frac{q}{2\rho c^2}\left(\frac{ct+\min[x,vt]}{v+c} - \frac{-ct+\min[x,vt]}{v-c}\right) \\
&= -\frac{q}{2\rho c^2}\frac{2c}{v^2-c^2}\left(vt - \min[x,vt]\right) \\
&= \frac{q}{\rho c}\left\{\begin{array}{ll} 0, & \text{για } x > vt\ , \\ \frac{1}{v^2-c^2}(x-vt), & \text{για } x < vt\ . \end{array}\right.
\end{aligned} \tag{90}$$

Το περίεργο αυτό αποτέλεσμα είναι αναμενόμενο, αφού η χάντρα τρέχει τόσο γρήγορα ώστε μπροστά από αυτήν δεν πλολαβαίνει να φτάσει καμιά κυματική πληροφορία. Έτσι το πεδίο μποροστά της παραμένει μηδενικό. Η διαφορετική χωρική κλίση μπροστά και πίσω από τη χάντρα σημαίνει ότι δεν είναι δυνατό να κινείται αυτή ισοταχώς χωρίς εξωτερική επέμβαση. Η επιτάχυνση της χάντρας θα είναι αρνητική και η χάντρα θα έχει την τάση να φρενάρει. Για να είναι η λύση που περιγράψαμε ακριβής θα πρέπει να ασκούμε στη χάντρα σταθερή θετική δύναμη και ίση με

$$F = \frac{q^2}{2\rho c(v^2-c^2)}\ , \tag{91}$$

σύμφωνα με τη σχέση (66), αφού τόση δύναμη ασκείται στο πίσω μέρος της χάντρας από το πεδίο. Το πεδίο που δημιουργείται από την ταχέως κινούμενη χάνδρα είναι ανάλογο με την ακτινοβολία Cherenkov που ασκείται σε ένα φορτισμένο σωματίδιο όταν ταξιδεύει μέσα σε ένα μέσο γρηγορότερα από την ταχύτητα του φωτός στο μέσο αυτό. Τέλος, αν η ταχύτητα της χάνδρας είναι μικρότερη από την ταχύτητα διάδοσης των διαταραχών ($v < c$)

$$\begin{aligned}
\phi &= -\frac{q}{2\rho c^2}\left(\min\left[t, \frac{x+ct}{u+c}\right] - (-\infty) - \max\left[0, t - \frac{-x+ct}{c-u}\right]\right) \\
&= -\frac{q}{2\rho c^2}\left(\frac{ct+\min[x,ut]}{u+c} - \frac{-tu+\max[x,ut]}{c-u} - (-\infty)\right) \\
&= -\frac{q}{2\rho c^2}\left\{\begin{array}{ll} \frac{ct-x}{c-u}, & \text{για } x > ut \\ \frac{ct+x}{c+u}, & \text{για } x < ut \end{array}\right. + \infty\ .
\end{aligned} \tag{92}$$

Το άπειρο που εμφανίζεται και σε αυτή την περίπτωση μπορεί να αγνοηθεί ως μη έχον ιδιαίτερη φυσική σημασία. Επιπλέον, η διαφορετική χωρική κλίση δεξιά και αριστερά από τη χάνδρα συνεπάγεται ανισομερή δράση δύναμης στη χάνδρα. Και σε αυτή την περίπτωση θα πρέπει να ασκείται στη χάνδρα μια εξωτερική δύναμη προς τα δεξιά για να καταφέρει αυτή να κινείται με σταθερή ταχύτητα, ειδάλως θα επιβραδυνθεί από το πεδίο που ακτινοβολεί η ίδια και στο τέλος θα σταματήσει. Η δύναμη που θα πρέπει να ασκηθεί εξωτερικά είναι

$$F = \frac{uq^2}{2\rho c^2(c^2-u^2)}\ . \tag{93}$$

Προτού κλείσουμε το εδάφιο αυτό ας αναλογιστούμε τι θα συνέβαινε αν υπήρχαν δύο χάντρες στη χορδή με αντίστοιχα φορτία αλληλεπίδρασης q_1, q_2. Τότε το πεδίο θα είχε τη μορφή της γραμμικής επαλληλίας των δύο πεδίων που θα δημιουργούσε από μόνη της η κάθε χάνδρα. Έστω, για ευκολία, ότι οι χάνδρες είναι ακίνητες στις θέσεις x_1, x_2. Το πεδίο θα είναι

$$\phi = \frac{1}{2\rho c^2}(q_1|x-x_1| + q_2|x-x_2|)\ . \tag{94}$$

Στην παραπάνω έκφραση αγνοήθηκε οποιαδήποτε χρονοεξάρτηση η οποία μας δίνει πληροφορίες σχετικά με το επί πόσο χρόνο υπάρχουν οι χάνδρες για να διαμορφώσουν το πεδίο, αλλά η οποία δεν έχει καμία δυναμική σημασία. Η πρώτη χάνδρα θα αισθάνεται δύναμη όσο η κλίση του πεδίου στη θέση αυτής επί το φορτίο q_1. Η κλίση του πεδίου στη θέση αυτής οφείλεται αφενός μεν στον εαυτό της (με συμμετρικό τρόπο) και αφετέρου στην άλλη χάνδρα. Έτσι η μοναδική συνεισφορά στη δύναμη είναι εξαιτίας της άλλης χάνδρας

$$F_{1\leftarrow 2} = -q_1 \frac{q_2}{2\rho c^2} \left. \frac{d|x - x_2|}{dx} \right|_{x_1} = \frac{q_1 q_2}{2\rho c^2} \frac{|x_2 - x_1|}{x_2 - x_1} \,. \tag{95}$$

Με άλλα λόγια τα δύο φορτία έλκονται αν είναι ομώνυμα (ή απωθούνται αν είναι ετερώνυμα) με δύναμη ανάλογη του γινομένου των δύο φορτίων, ανεξάρτητα από την απόσταση που τα ενώνει και με μια σταθερά έλξης που συνδέεται με τα χαρακτηριστικά της χορδής.

Η πεδιο-σωματιδιακή περιγραφή που κατασκευάσαμε είναι μια καθαρά κλασική μη σχετικιστική περιγραφή μιας θεωρίας για τη βαρύτητα σε μια διάσταση. Πράγματι, το αντίστοιχο της νευτώνειας βαρύτητας σε μια διάσταση έχει τα χαρακτηριστικά που βρήκαμε παραπάνω, μόνο που επιπλέον η θεωρία μας είναι πιο πλούσια αφού επιτρέπει στις πεδιακές διαταραχές να διαδίδονται με πεπερασμένη ταχύτητα και να υπάρχει ακτινοβολία (δημιουργούμενο πεδίο) όταν τα σωματίδια τιθενται σε κίνηση.

7 Ηλεκτρομαγνητικό πεδίο

8 Γενική σχετικότητα