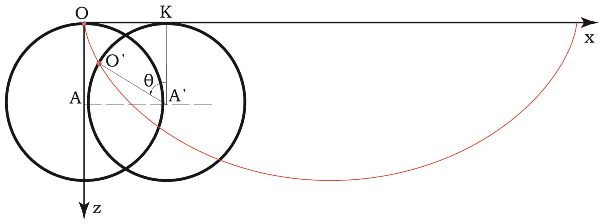
Παράρτημα Ι

1 Το ισόχρονο της ταλάντωσης επί κυκλοειδούς



Σχήμα 1: Κατασκευή της κυκλοειδούς.

Ας θεωρήσουμε μια κυκλική στεφάνη ακτίνας a η οποία κυλίεται, χωρίς να ολισθαίνει, πάνω σε μια ευθεία (για ευκολία υποθέστε ότι η ευθεία είναι ο άξονας x). Η καμπύλη που διαγράφει τότε ένα συγκεκριμένο σημείο της κυκλικής στεφάνης, καθώς αυτή κυλίεται, ονομάζεται *κυκλοειδής* καμπύλη (cycloid). Προκειμένου να κατασκευάσουμε την εξίσωση της κυκλοειδούς, ας φανταστούμε ότι το σημείο που διαγράφει την κυκλοειδή είναι το σημείο του κύκλου που αρχικά εφάπτεται στον άξονα x, που για ευκολία θα υποθέσουμε ότι είναι η αρχή των αξόνων $(0, 0)$. Έστω Ο η αρχική θέση του σημείου αυτού και Ο΄, με συντεταγμένες (x, y), η θέση του εν λόγω σημείου μετά από στροφή της στεφάνης κατά γωνία θ με φορά αντίθετη με αυτή των δεικτών του ρολογιού. Αν Κ είναι το νέο σημείο επαφής της στραμένης στεφάνης και του άξονα x, το μήκος ΟΚ θα είναι ίσο με το μήκος $a\theta$ του τόξου ΚΟ΄ του κύκλου, εφόσον η στεφάνη δεν ολισθαίνει. Συνεπώς η συντεταγμένη x θα είναι ίση με ΟΚ$-a \sin\theta$ και η παραμετρική εξίσωση της κυκλοειδούς καμπύλης με παράμετρο τη γωνία στροφής του κύκλου θ είναι:

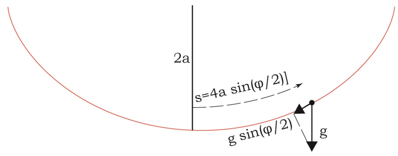
$$x = a(\theta - \sin\theta) \quad , \quad z = a(1 - \cos\theta), \tag{1}$$

με τον άξονα z στραμμένο προς τα κάτω (στην κατεύθυνση της επιτάχυνσης της βαρύτητας). Το μήκος τόξου της κυκλοειδούς από το σημείο Ο στο Ο΄ που αντιστοιχεί σε τιμή της παραμέτρου θ είναι:

$$\begin{aligned} s &= \int_0^\theta \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta'}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\theta'}\right)^2}\, d\theta' \\ &= 2a \int_0^\theta \sin(\theta'/2) d\theta' \\ &= 4a\,(1 - \cos(\theta/2))\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Το δε μοναδιαίο διάνυσμα $\widehat{\mathbf{t}}$ επί της εφαπτομένης στην κυκλοειδή καμπύλη θα είναι το $\widehat{\mathbf{t}} = (dx/ds, dz/ds) = (\sin(\theta/2), \cos(\theta/2))$.

Ας φανταστούμε τώρα ένα σωματίδιο το οποίο ολισθαίνει πάνω σε μια κυκλοειδή καμπύλη (δίχως τριβές) ταλαντούμενο γύρω από το κατώτερο σημείο που αντιστοιχεί στο $\theta = \pi$. Το μήκος τόξου από το σημείο ισορροπίας είναι τότε (με βάση τα προηγούμενα αποτελέσματα)



Σχήμα 2: Ολίσθηση επί της κυκλοειδούς.

$$s = 4a\sin(\phi/2) \ ,$$

με $\phi = \theta - \pi$, ενώ το μοναδιαίο διάνυσμα $\widehat{\mathbf{t}}$ επί της εφαπτομένης της καμπύλης σχηματίζει με τον άξονα x γωνία $-\phi/2$, δεδομένου ότι έχει συνιστώσες $(\cos(\phi/2), -\sin(\phi/2))$ (βλ. σχήμα). Επομένως η επιτάχυνση του σωματιδίου είναι

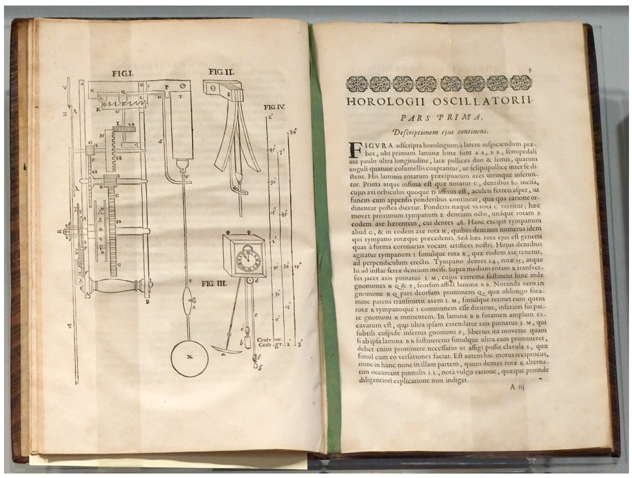
$$\mathbf{a} = \frac{d^2s}{dt^2}\widehat{\mathbf{t}} + \frac{v^2}{\rho}\widehat{\mathbf{n}} \ ,$$

όπου $\rho = 4a\cos(\phi/2)$ η ακτίνα καμπυλότητας της κυκλοειδούς[1] και $v = ds/dt$ το μέτρο της ταχύτητας του σωματιδίου.

Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα στη διεύθυνση της εφαπτομένης της τροχιάς (βλ. σχήμα 2) δίνει την εξίσωση κίνησης:

$$\begin{aligned} \frac{d^2s}{dt^2} &= -g\sin(\phi/2) \\ &= -\frac{g}{4a}s \ , \end{aligned}$$

που αποδεικνύει ότι το σωματίδιο εκτελεί επί της κυκλοειδούς ισόχρονη αρμονική ταλάντωση με περίοδο $T = 2\pi\sqrt{4a/g}$, ανεξάρτητη



Σχήμα 3: Φωτογραφία του βιβλίου του Huyghens "Horologium Oscillatorium sive de motu pendulorum" (1673) στο οποίο παρουσιάζει κατασκευή του ισόχρονου κυκλοειδούς εκκρεμούς.

[1] Η ακτίνα καμπυλότητας υπολογίζεται ως η παράγωγος $|ds/d\psi|$, όπου ds είναι το στοιχειώδες μήκος της καμπύλης και $d\psi$ είναι η γωνία που αντιστοιχεί σε αυτό το τόξο. Για την εν λόγω καμπύλη $ds = 2a\cos(\phi/2)d\phi$ ενώ η $d\psi$ μπορεί να υπολογιστεί από τη στροφή της εφαπτομένης στην καμπύλη αν μεταβάλλουμε την παράμετρο της καμπύλης κατά $d\phi$. Αφού η εφαπτομένη σχηματίζει με τον άξονα x γωνία $-\phi/2$, θα είναι $d\psi = -d\phi/2$. Επομένως από το λόγο των διαφορικών ds και $d\psi$ βρίσκουμε $\rho = 4a\cos(\phi/2)$.

από το πλάτος της ταλάντωσης. Προσέξτε ότι η περίοδος αυτή είναι ακριβώς η περίοδος ενός απλού εκκρεμούς μήκους $l = 4a$ (όσο δηλαδή είναι το συνολικό μήκος του εκκρεμούς το οποίο περιτυλισσόμενο πάνω σε μια κυκλοειδή καμπύλη αναγκάζεται να εκτελεί κυκλοειδή κίνηση –βλ. επόμενο εδάφιο) όταν αυτό εκτελεί μικρές ταλαντώσεις. Στην περίπτωση που εξετάζουμε όμως, δεν υπάρχει κανένας περιορισμός στο πλάτος της αιώρησης.

2 Το κυκλοειδές εκκρεμές του Huyghens (1673)

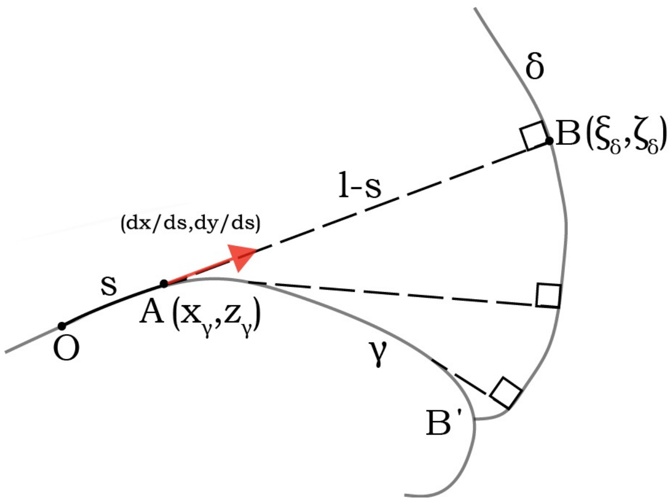
Πώς κατασκευάζεται όμως ένα τέτοιο μηχανικό ρολόι. Η συνήθης επιλογή για να μειωθούν οι απώλειες από τις τριβές είναι η κατασκευή ρολογιών με τη μορφή του κοινού εκκρεμούς. Τα συνήθη εκκρεμή όμως εκτελούν κυκλική επίπεδη κίνηση και όχι κυκλοειδή, και όπως υπολογίσαμε σε προηγούμενο Παράρτημα η περίοδος ενός επίπεδου κυκλικού εκκρεμούς μεγαλώνει με το πλάτος της ταλάντωσης. Μπορεί άραγε να κατασκευασθεί ένα κυκλοειδές εκκρεμές (ένα εκκρεμές που εκτελεί κυκλοειδή τροχιά); Την απάντηση την έδωσε ο Huyghens: αν στο σημείο που εφάπτονται δύο συνεχόμενα φύλλα της κυκλοειδούς καμπύλης[2] αναρτήσουμε νήμα μήκους $4a$ (ακριβώς όσο το ήμισυ του συνολικού μήκους της κυκλοειδούς), τότε το άκρο του νήματος θα διαγράφει και πάλι κυκλοειδή καμπύλη και συνεπώς μια μάζα αναρτημένη στο άκρο αυτού του νήματος θα εκτελεί ισόχρονη ταλάντωση. Η καμπύλη που διαγράφεται από το άκρο ενός νήματος όταν αυτό τυλίγεται πάνω σε μία άλλη καμπύλη λέγεται εκτυλισσόμενη της αρχικής καμπύλης[3] (βλ. σχήμα 4). Η εξίσωση της εκτυλισσόμενης προκύπτει ως ακολούθως: Έστω το τμήμα ΟΑ μήκους s του νήματος ΟΒ (το οποίο έχει συνολικό μήκος l) βρίσκεται "τυλιγμένο" πάνω στην καμπύλη γ με παραμετρική μορφή $(x(\theta), z(\theta))$. Το τμήμα ΑΒ, μήκους $l - s$, έχει τη διεύθυνση της εφαπτομένης της γ στο σημείο Α και συνεπώς οι συντεταγμένες του σημείου Β της εκτυλισσόμενης καμπύλης δ θα είναι:

$$\xi_\delta(\theta) = x_\gamma(\theta) + \frac{dx_\gamma}{ds}(l - s) \quad , \quad \zeta_\delta(\theta) = z_\gamma(\theta) + \frac{dz_\gamma}{ds}(l - s) \ .$$

Στην παραπάνω παραμετρική έκφραση για την εκτυλισσόμενη θεωρούμε ότι το μήκος τόξου s και το εφαπτομενικό διάνυσμα $(dx_\gamma/ds, dz_\gamma/ds)$ είναι συναρτήσεις της παραμέτρου θ. Κατασκευάσαμε δε την εφαπτομένη παραγωγίζοντας ως προς s (και όχι ως προς θ) για να είναι το εφαπτομενικό διάνυσμα μοναδιαίου μέτρου, έτσι ώστε

[2] Στο σημείο αυτό δεν υπάρχει εφαπτομένη και είναι $d\mathbf{r}(\theta)/d\theta = 0$, όπου $\mathbf{r}$ είναι το διάνυσμα θέσης επί της κυκλοειδούς.

[3] Ο αγγλικός όρος είναι involute ενώ σε ελληνικά λεξικά μαθηματικών όρων παρατίθεται ο όρος ενειλιγμένη. Θεωρούμε ότι ο όρος εκτυλισσόμενη καμπύλη αποδίδει πιο καθαρά το πραγματικό της νόημα.



Σχήμα 4: Η εκτυλισσόμενη μιας επίπεδης καμπύλης γ είναι η καμπύλη δ που διαγράφεται από το άκρο τεντωμένου νήματος μήκους l που είναι αρχικά τυλιγμένη πάνω στην γ καθώς αυτή ξετυλίγεται. Το νήμα στο σχήμα έχει μήκος l, καί εκτείνεται από το Ο στο Β' όταν είναι ολόκληρο τυλιγμένο στην γ. Όταν μόνο το τμήμα ΟΑ μήκους s είναι τυλιγμένο επί της καμπύλης, το αντίστοιχο σημείο της εκτυλισσόμενης καμπύλης δ είναι το σημείο Β, με το τμήμα ΑΒ, μήκους $l-s$, να είναι εφαπτόμενο της γ στο σημείο Α ενώ η ΑΒ είναι κάθετος στην εκτυλισσόμενη τροχιά δ. Η καμπύλη γ μπορεί αντίστροφα να θεωρηθεί ως η περιβάλλουσα καμπύλη που εφάπτεται στις καθέτους της δ και ονομάζεται ορθοπεριβάλλουσα της δ.[4] Συνεπώς η ορθοπεριβάλλουσα της εκτυλισσόμενης μιας καμπύλης είναι η αυτή καμπύλη. Όμοια και η εκτυλισσόμενης της ορθοπεριβάλλουσας μιας καμπύλης είναι η αυτή καμπύλη. Εδώ ίσως χρειάζεται να προσθέσουμε ότι η αντιστοιχία εκτυλισσόμενης και ορθοπεριβάλλουσας δεν είναι ένα προς ένα, αφού η εκτυλισσόμενη έχει ως παράμετρο το "μήκος του νήματος" και επομένως μπορούμε να δημιουργήσουμε πολλές εκτυλισσόμενες μιας καμπύλης, οι οποίες όμως όλες θα οδηγήσουν στην ίδια ορθοπεριβάλλουσα.

πολλαπλασιαζόμενο με $l-s$ να αποδίδει το διάνυσμα $(\xi_\delta - x_\gamma, \zeta_\delta - z_\gamma)$. Για την κυκλοειδή $\mathbf{r}(\theta)$ με συντεταγμένες (1) κάνοντας χρήση και της (2) προκύπτει ότι

$$\xi(\theta) = a(\theta + \sin\theta) \quad , \quad \zeta(\theta) = a(3+\cos\theta) \ ,$$

και συνεπώς το διάνυσμα θέσης της εκτυλισσόμενης $\mathbf{r}^*(\theta)$ της (1) για $|\theta| < \pi$ είναι

$$\mathbf{r}^*(\theta) = \mathbf{r}(\theta - \pi) + (\pi a, 2a) \ ,$$

δηλαδή η εκτυλισσόμενη με μήκος $l = 4a$ μιας κυκλοειδούς με παράμετρο a είναι και πάλι μια κυκλοειδής μετατοπισμένη από την αρχική στον άξονα x κατά πa, στον άξονα z κατά $2a$ και με παράμετρο $\theta - \pi$, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.

[4] Ο αγγλικός όρος είναι evolute. Προτιμήσαμε αντί της μετάφρασης "εξειλιγμένη", η οποία δίνεται σε μεταφράσεις μαθηματικών όρων, τον πιο περιγραφικό όρο ορθοπεριβάλλουσα.

Άσκηση: Δείξτε ότι η εκτυλισσόμενη της κυκλοειδούς (1) όταν $l \neq 4a$ και $|\theta| < \pi$ είναι:

$$\xi(\theta) = a(\theta + \sin\theta) + (l - 4a)\sin(\theta/2) \quad , \quad \zeta(\theta) = a(3 + \cos\theta) + (l - 4a)\cos(\theta/2) \ . \tag{3}$$

1. Είναι αυτή κυκλοειδής; Μη βιαστείτε να απαντήσετε αρνητικά βασιζόμενοι στο ότι δεν έχει την ίδια μορφή με την (1) (θα μπορούσε ίσως να υπάρχει κάποια άλλη παράμετρος $u(\theta)$ έτσι ώστε οι $(\xi(u), \zeta(u))$ να λάβουν την κλασική παραμετρική μορφή κυκλοειδούς με ακτίνα στεφάνης R και μετατοπισμένη κατά (x_0, z_0)). Για να το ελέγξτε λοιπόν σχηματίστε το $d\xi/d\zeta$ από τη (3) και από την κλασσική παραμετρική (1) με παράμετρο u και ακτίνα κύκλου R και δείξτε ότι $u = -theta$. Στη συνέχεια εισάγετε στις δύο παραμετρικές μορφές μια τυχαία γωνία, $u_1 = -\theta_1 = \pi/2$ για παράδειγμα, και δείξτε ότι οδηγεί σε διαφορετικά αποτελέσματα ότι τιμή και αν έχει η R. (Η γωνία $u_0 = -\theta_0 = 0$ καθορίζει την πιθανή μετατόπιση (x_0, z_0).) Ποιο είναι το συμπέρασμά σας;

2. Το εκκρεμές αυτό με μέγιστο πλάτος $\theta = \pi$ είναι ισόχρονο;