Κεντρικά πεδία στα οποία όλες οι φραγμένες τροχιές είναι και περιοδικές
παραλλαγή της απόδειξης του Arnold (σ. 37)

Καθώς ένα σωματίδιο μοναδιαίας μάζας κινείται σε ένα κεντρικό δυναμικό $U(r)$, η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ περικέντρου, που βρίσκεται σε απόσταση r_{min} από το κέντρο της δύναμης, και αποκέντρου, που βρίσκεται σε απόσταση r_{max} από το κέντρο, δίδεται από την έκφραση

$$\Theta(E,L) = \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{L/r^2}{\sqrt{2(E-V(r))}} dr \ ,$$

στην οποία το ενεργό δυναμικό είναι

$$V(r) = \frac{L^2}{2r^2} + U(r) \ .$$

Η γωνία εξαρτάται εκτός από το δυναμικό και από την ενέργεια E και τη στροφορμή του σωματιδίου L. Θα προσδιορίσουμε τα δυναμικά $U(r)$ για τα οποία σχηματίζεται κλειστή και περιοδική τροχιά για ένα συνεχές διάστημα των ενεργειών και στροφορμών. Γενικότερα θέλουμε να λύσουμε ένα πρόβλημα αντιστροφής: παρατηρήσεις της συνάρτησης $\Theta(E,L)$ θα μας οδηγήσουν σε προσδιορισμό του δυναμικού $U(r)$ που τις προκαλεί.

Θα αρχίσουμε την αναζήτηση αυτή των δυναμικών κάνοντας παρατηρήσεις των γωνιών $\Theta(E,L)$ που σχηματίζονται σε σχεδόν κυκλικές τροχιές (περιορίζουμε τα δυναμικά $U(r)$ σε αυτά μόνο που επιτρέπουν τον σχηματισμό κυκλικών τροχιών). Αν κάποιο δυναμικό οδηγεί σε περιοδικές σχεδόν κυκλικές τροχιές έχει πιθανότητες να οδηγεί και σε περιοδικές τροχιές ανεξαρτήτως του πόσο κυκλικές είναι αυτές. Η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς r_c προσδιορίζεται από τα στάσιμα σημεία του ενεργού δυναμικού:

$$V'(r_c) = 0$$

που δίδονται από τις ακτίνες που ικανοποιούν τη σχέση

$$L^2 = r_c^3 U'(r_c) \ .$$

Από τη σχέση αυτή συνάγεται ότι αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη κυκλικής τροχιάς είναι η κεντρική δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο επί της τροχιάς να είναι ελκτική $-U'(r_c) < 0$. Επιπλέον, η τροχιά αυτή είναι ευσταθής αν $V''(r_c) > 0$ το οποίο μπορεί να γραφεί ως

$$\begin{aligned} V''(r_c) &= \frac{3L^2}{r_c^4} + U''(r_c) \\ &= \frac{3U'(r_c)}{r_c} + U''(r_c) \\ &> 0 \ . \end{aligned}$$

Για παράδειγμα αν το δυναμικό είναι ελκτικό της μορφής $U(r) = -a^2 r^{-\nu}$ με $\nu > 0$ η κυκλική τροχιά είναι ευσταθής μόνο αν

$$\nu(2-\nu) > 0 \ ,$$

που περιορίζει τους δυνατούς εκθέτες στο διάστημα $0 < \nu < 2$. Πρακτικά αυτό που συμβαίνει είναι ότι για $\nu > 2$ η φυγοκεντρική δύναμη είναι πάντα μεγαλύτερη της έλξης πάνω από μια συγκεκριμένη ακτίνα και το αντίθετο κάτω από αυτή την ακτίνα, επομένως η ακτινική συντεταγμένη του σώματος δεν μπορεί να εκτελέσει ταλάντωση και το σώμα είτε θα "βουτήξει" στο κέντρο, είτε θα φύγει στο άπειρο.

Θεωρούμε λοιπόν άκτινικές κινήσεις της μορφής $r = r_c + \rho$ με $\rho << r_c$,δηλαδή περίπου κυκλικές κινήσεις. Η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ περικέντρου και αποκέντρου πλησίον μιας κυκλικής τροχιάς είναι:

$$
\begin{aligned}
\Theta(E,L) &= \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{L/r^2}{\sqrt{2(E-V(r))}} dr \,, \\
&= \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{L/(r_c+\rho)^2}{\sqrt{2[(V(r_c)+\delta E)-(V(r_c)+V''(r_c)\rho^2/2)]}} d\rho \\
&= \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{L/(r_c+\rho)^2}{\sqrt{V''(r_c)}\sqrt{2\delta E/V''(r_c)-\rho^2}} d\rho
\end{aligned}
$$

με $\epsilon^2 = 2\delta E/V''(r_c)$ αφού το περίκεντρο και το απόκεντρο είναι οι ρίζες του παρονομαστή του πρώτου ολοκληρώματος (εκεί που μηδενίζεται η ακτινική κινητική ενέργεια). Στις παραπάνω εκφράσεις προσεγγίσαμε το δυναμικό γύρω από το ελάχιστό του (που αντιστοιχεί στην κυκλική τροχιά) ως

$$V(r) = V(r_c) + \frac{\rho^2}{2} V''(r_c)$$

΄Ετσι λοιπόν

$$
\begin{aligned}
\Theta(E,L) &= \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{l}{r_c^2\sqrt{V''(r_c)}} \frac{(1-2\rho/r_c+\cdots)d\rho}{\sqrt{\epsilon^2-\rho^2}} \\
&= \frac{L}{r_c^2\sqrt{V''(r_c)}} \left[\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{1}{\sqrt{\epsilon^2-\rho^2}} + \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{2\rho/r_c d\rho}{\sqrt{\epsilon^2-\rho^2}} + O(\epsilon^2) \right] \\
&= \frac{L}{r_c^2\sqrt{V''(r_c)}} [\pi + 0 + O(\epsilon^2)] \\
&= \pi \sqrt{\frac{U'(r_c)}{r_c V''(r_c)}} \\
&= \pi \sqrt{\frac{U'(r_c)}{3U'(r_c) + r_c U''(r_c)}}.
\end{aligned}
$$

Στις τελευταίες δύο εκφράσεις αγνοήσαμε τις διορθώσεις τάξης ϵ^2, θεωρώντας τις αμελητέες με κατάλληλη ρύθμιση της κυκλικότητας της τροχιάς. Παρατηρούμε ότι τροχιές που προκύπτουν από μικρές διαταραχές της κυκλικής τροχιάς έχουν $\Theta(E,L)$ που εξαρτάται μόνο από τη στροφορμή και συνεπώς γράφουμε $\Theta(r_c)$. Παρατηρήσεις της $\Theta(r_c)$ πλησίον κυκλικών τροχιών μπορούν να αντιστραφούν και να αποκαλύψουν το δυναμικό U που τις προκάλεσε. Πράγματι πρέπει να λύσουμε την εξίσωση

$$rU'' = \left(\frac{\pi^2}{\Theta^2} - 3 \right) U' \,,$$

$$U(r) = A \int_{r_0}^{r} d\rho \exp\left(\int_{r_0}^{\rho} \frac{\pi^2/\Theta^2(x) - 3}{x} dx \right).$$

Στην περίπτωση που οι σχεδόν κυκλικές τροχιές κλείνουν και επαναλαμβάνονται θα πρέπει $\Theta(L) = \pi p/q$ όπου p και q είναι ακέραιοι και συνεπώς η Θ πρέπει να είναι ανεξάρτητη από τη στροφορμή δηλαδή πρέπει να είναι σταθερά ανεξάρτητη από το x. Για ευκολία λοιπόν σε αυτές τις περιπτώσεις γράφουμε $\pi^2/\Theta^2(x) = 2 + \nu$, όπου $\nu > -2$. Το δυναμικό είναι:

$$\begin{aligned} U(r) &= A \int_{r_0}^{r} d\rho \exp\left(\int_{r_0}^{\rho} \frac{\nu - 1}{x} dx\right) \\ &= A \int_{r_0}^{r} d\rho \exp\left[(\nu - 1)\ln(\rho/r_0)\right] \\ &= A \int_{r_0}^{r} d\rho \left(\frac{\rho}{r_0}\right)^{\nu-1} \\ &= a\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\nu} + b \ . \end{aligned}$$

Στη περίπτωση που $\nu = 0$ λαμβάνουμε λογαριθμική λύση. Αν επιπλέον απαιτήσουμε να υπάρχει και ευσταθής κυκλική τροχιά επιβάλεται έξτρα περιορισμός στον εκθέτη. Συνολικά λοιπόν τα ακόλουθα δυναμικά μόνο οδηγούν σε περιοδικές σχεδόν κυκλικές τροχιές:

$$U(r) = \begin{cases} a^2 r^{\nu}, & \nu > 0 \ ; \\ -a^2 r^{-\nu}, & 0 < \nu < 2 \, ; \\ k \ln r, & \nu = 0. \end{cases} \tag{1}$$

και οι αντίστοιχες γωνίες είναι

$$\Theta = \frac{\pi}{\sqrt{2 \pm \nu}} \tag{2}$$

Ειδικά η τελευταία περίπτωση δυναμικού (με $\nu = 0$) οδηγεί όπως φαίνεται σε γωνία Θ η οποία είναι άρρητο πολλαπλάσιο του π ($\Theta = \pi/\sqrt{2}$) και επομένως το δυναμικό αυτό (το οποίο σημειωτέον θα αποτελούσε το δυναμικό της βαρύτητας στις 2 διαστάσεις) δεν θα οδηγούσε γενικά (για οποιαδήποτε τιμή των E, L) σε περιοδικές τροχιές.

Κάνουμε τώρα την αντικατάσταση $x = L/r$

$$V(x) = \frac{x^2}{2} + U(L/x)$$

οπότε η γωνία μεταξύ περικέντρου και αποκέντρου παίρνει την απλούστερη μορφή

$$\Theta(E, L) = \int_{x_{min}}^{x_{max}} \frac{dx}{\sqrt{2(E - V(x))}} \ .$$

Γραμμένη σε αυτή τη μορφή η γωνία $\Theta(E, L)$ δεν είναι άλλη από την ημιπερίοδο μονοδιάστατης κίνησης σωματιδίου ενέργειας E στο δυναμικό $V(x)$. (Η διαφορά στις διαστάσεις των δύο αποτελεσμάτων οφείλεται στις διαφορετικές διαστάσεις της ποσότητας x κάθε φορά – διαστάσεις ταχύτητας στην περίπτωση της γωνίας και διαστάσεις μήκους στην περίπτωση της ημιπεριόδου.) Θέλουμε τώρα να προσδιορίσουμε το δυναμικό $V(x)$ από συνεχείς μετρήσεις της συνάρτησης $\Theta(E, L)$ στη γενική περίπτωση χωρίς να περιοριστούμε σε σχεδόν κυκλικές τροχιές μόνο. Η παραπάνω εξίσωση είναι η ολοκληρωτική εξίσωση του Abel η οποία έχει κομψή κλειστή λύση. ʹΕστω ότι το ελάχιστο της $V(x)$ πραγματοποιείται στο x_c. Αλλάζουμε την μεταβλητή της ολοκλήρωσης σε $V(x)$ και έστω $x_1(V)$ η καμπύλη του δυναμικού για $x_{max} > x > x_c$ και $x_2(V)$ για $x_c > x > x_{min}$. Το ολοκλήρωμα αλλάζοντας μεταβλητή γίνεται τώρα

$$\Theta(E, L) = \int_{E_c}^{E} \frac{d(x_1 - x_2)}{dV} \frac{dV}{\sqrt{2(E - V)}} \ ,$$

το οποίο αντιστρέφεται παρατηρώντας ότι

$$\begin{aligned} \int_{E_c}^{E} \frac{\Theta(S, L) dS}{\sqrt{E - S}} &= \int_{E_c}^{E} dS \int_{E_c}^{S} \frac{d(x_1 - x_2)}{dV} \frac{dV}{\sqrt{2(S - V)(E - S)}} \\ &= \int_{E_c}^{E} \frac{d(x_1 - x_2)}{dV} dV \int_{V}^{E} \frac{dS}{\sqrt{2(S - V)(E - S)}} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2}} (x_1(E) - x_2(E)) \ . \end{aligned} \tag{3}$$

Ο υπολογισμός του τελευταίου ολοκληρώματος γίνεται απλά με την αντικατάσταση $S = (E+V)/2 + z(E-V)/2$. Η αλλαγή της σειράς των ολοκληρωμάτων στη δεύτερη σειρά οφείλεται στο ότι η ολοκλήρωση στον δισδιάστατο χώρο των V, S γίνεται στο ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο που έχει ως βάση τον άξονα των S οπότε μπορούμε να ολοκληρώσουμε είτε πρώτα ως προς V (από E_c έως $V(S) = S$) και μετά ως προς S (από E_c έως E), είτε πρώτα ως προς S (από $S(V) = V$ έως E) και μετά ως προς V (από E_c έως E). Συνεπώς η συνάρτηση $\Theta(E, L)$ για όλα τα ενεργά δυναμικά σχετίζεται σύμφωνα με την παραπάνω έκφραση με τις διαφορές $(x_1(E) - x_2(E))$.

Τώρα, για να είναι περιοδική η τροχιά θα πρέπει να υπάρχει ρητός αριθμός p/q τέτοιος ώστε $\Theta(E, L) = \pi p/q$ και συνεπώς εφόσον η $\Theta(E, L)$ είναι συνεχής συνάρτηση της ενέργειας και της στροφορμής αυτή η συνάρτηση πρέπει να είναι σταθερά και ανεξάρτητη της ενέργειας και της στροφορμής. Από τη παραπάνω σχέση έχουμε συνεπώς

$$\begin{aligned}\int_{E_c}^{E} \frac{\Theta(S,L)dS}{\sqrt{E-S}} &= \pi\,\frac{p}{q}\int_{E_c}^{E}\frac{dS}{\sqrt{E-S}} \\ &= 2\pi\,\frac{p}{q}\sqrt{E-E_c}\end{aligned}$$

Με άλλα λόγια θα πρέπει τα δύο όρια του ολοκληρώματος γιά κάθε ενεργειακό επίπεδο να συνδέονται με την ενέργεια αυτή μέσω της σχέσης

$$\frac{x_1(E) - x_2(E)}{\sqrt{E-E_c}} = 2\sqrt{2}\,\frac{p}{q} \tag{4}$$

Η σχέση αυτή δείχνει ότι μόνο το δυναμικό του αρμονικού ταλαντωτή μεταξύ των συμμετρικών δυναμικών $(x_1(E) - x_c = x_c - x_2(E))$ οδηγεί σε ισόχρονες ταλαντώσεις ανεξάρτητες της ενέργειας. Όπως δείχνει και ο Landau ολόκληρη η οικογένεια των δυναμικών που προέρχονται από κάποιον αρμονικό ταλαντωτή με κατάλληλη ταυτόχρονη μετακίνηση και των δύο πτερύγων του δυναμικού έτσι ώστε να μην καταστρέφεται η σχέση (4) οδηγεί σε ισόχρονες ταλαντώσεις και για το πρόβλημά μας σε περιοδικές τροχιές.

Τα μόνα δυναμικά λοιπόν που οδηγούν σε περιοδικές τροχιές είναι αυτά για τα οποία ισχύει

$$V(x) = V\left(x + 2\sqrt{2}\,\frac{p}{q}\sqrt{V(x) - V_c}\right) \tag{5}$$

όπου για κάθε x με $x < x_c$.

Ας λάβουμε πρώτα τη περίπτωση του δυναμικού τύπου $U(r) = a^2 r^\nu$ με $\nu > 0$ (που οδηγεί σε περιοδικές περίπου κυκλικές τροχιές) για το οποίο $\lim_{r\to\infty} U(r) = \infty$. Ο ρητός αριθμός είναι όπως δείξαμε

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{\sqrt{2+\nu}}\ .$$

Το αριστερό μέλος της (5) στο όριο $x \to 0$ $(r \to \infty)$ δίνει:

$$V \approx a^2 \frac{L^\nu}{x^\nu} \to \infty\ .$$

Στο ίδιο όριο το δεξιό μέλος της (5) τείνει στο άπειρο τετραγωνικά (μόνο ο όπος $x^2/2$ του ενεργού δυναμικού είναι σημαντικός τότε) και συνεπώς στο όριο αυτό η (5) απαιτεί:

$$\begin{aligned}a^2\frac{L^\nu}{x^\nu} &= \frac{1}{2}\left(2\sqrt{2}\frac{p}{q}a\frac{L^{\nu/2}}{x^{\nu/2}}\right)^2 \\ &= 4\frac{p^2}{q^2}a^2\frac{L^\nu}{x^\nu}\ .\end{aligned}$$

Ο μόνος ρητός που ικανοποιεί αυτή την ασυμπτωτική σχέση είναι ο

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{2}\ ,$$

που συνεπάγεται ότι $\nu = 2$ και το μόνο δυναμικό είναι αυτό το αρμονικού ταλαντωτή. Επειδή η λύση που βρήκαμε είναι ασυμπτωτική, πρέπει να ελέγξουμε αν είναι και ακριβής. Γνωρίζουμε όμως από την ανάλυση του δισδιάστατου ισότροπου αρμονικού ταλαντωτή με ανάλυση σε καρτεσιανές συντεταγμένες ότι η κίνηση είναι περιοδική αφού οι συχνότητες είναι ίδιες στους δύο άξονες. Η ακτινική ταλάντωση ολοκληρώνεται όταν το σώμα έχει διαγράψει γωνία $2\Theta = \pi$ και η τροχιά είναι έλλειψη με κέντρο της έλλειψης το κέντρο του δυναμικού.

Ας λάβουμε τώρα την άλλη περίπτωση για δυναμικά τύπου

$$U = -a^2(L/x)^{-\nu} = -a^2 x^\nu / L^\nu \ ,$$

με $\nu < 2$ και

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{\sqrt{2-\nu}} \ .$$

Για $x = 0$ ($r \to \infty$) το δυναμικό $U = 0$ (και $V = 0$). Η άλλη ρίζα του $V(x) = 0$ είναι τέτοια ώστε

$$x_1(0)^{\nu-2} = \frac{L^\nu}{2a^2}.$$

Αυτή η ρίζα θα πρέπει σύμφωνα με την (5) να απέχει από την άλλη ρίζα ($x_2(0) = 0$) κατά

$$2\sqrt{2}\frac{p}{q}\sqrt{-V_c} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2-\nu}}\ \sqrt{-V_c}.$$

Η τιμή του V_c για τα εν λόγω δυναμικά βρίσκεται ότι είναι (από απαίτηση $V'(x_c) = 0$)

$$x_c^{\nu-2} = \frac{L^\nu}{\nu a^2} \Rightarrow V(x_c) = x_c^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\nu}\right).$$

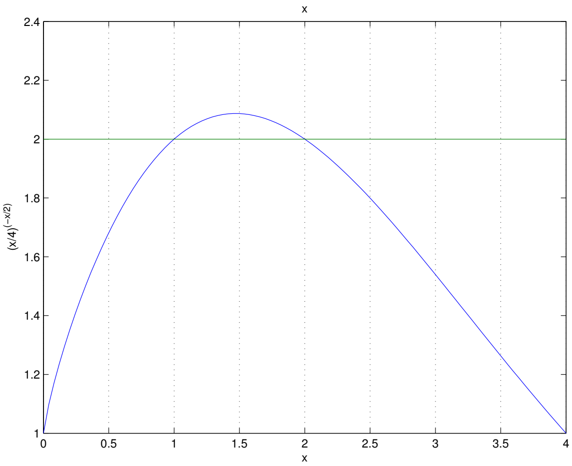
Έτσι

$$\begin{aligned}
x_1(0) &= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2-\nu}} x_c \sqrt{\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{\nu}\right)} \Rightarrow \\
x_c\left(\frac{\nu}{2}\right)^{1/(\nu-2)} &= x_c \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2-\nu}} \sqrt{\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{\nu}\right)} \Rightarrow \\
\left(\frac{\nu}{2}\right)^{1/(\nu-2)} &= \frac{2}{\sqrt{\nu}} \Rightarrow \\
\left(\frac{\nu}{4}\right)^{\nu/2} &= \frac{1}{2} \qquad (6)
\end{aligned}$$

για $0 < \nu < 2$. Όπως φαίνεται και από το γράφημα υπάρχουν δύο λύσεις η $\nu = 1$ και η $\nu = 2$. Η μόνη αποδεκτή είναι η $nu = 1$ που δίνει το δυναμικό της βαρυτικής έλξης του Νεύτωνα (την άλλη όπως είπαμε την απορρίψαμε γιατί δεν οδηγεί σε ευσταθείς κυκλικές τροχιές). Και πάλι μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι το δυναμικό αυτό ικανοποιεί την (5) για κάθε τιμή της V αφού

$$V(x) = \frac{x^2}{2} - a^2\frac{x}{L} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{a^2}{L}\right)^2 - \frac{a^4}{2L^2} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{a^2}{L}\right)^2 + V_c.$$

Αμέσως παρατηρούμε ότι για κάθε τιμή του V οι δύο ρίζες της εξίσωσης διαφέρουν κατά $2\sqrt{2(V - V_c)}$. Επομένως στην περίπτωση αυτή $p/q = 1$ και η τροχιά επαναλαμβάνεται η ίδια μετά από μια πλήρη περιστροφή. Όπως γνωρίζουμε η κίνηση είναι έλλειψη με εστία αυτής το κέντρο της δύναμης.



Σχήμα 1: Το γράφημα της υπερβατικής συνάρτησης $(x/4)^{-x/2}$ για $0 < x < 4$. Όπως φαίνεται οι ρίζες της εξίσωσης αυτής είναι $x = 1$.

Μια πιο γρήγορη απόδειξη

Θα ξεκινήσουμε και πάλι με δεδομένη τη μορφή των δυνατών δυναμικών που οδηγούν σε περιοδικές σχεδόν κυκλικές τροχιές (1) και τις αντίστοιχες γωνίες τους (2). Ας σκεφτούμε τι συμβαίνει όταν η στροφορμή είναι μηδέν. Το σωματίδιο που βρίσκεται εντός του δυναμικού πέφτει καθαρά ακτινικά προς το κέντρο της δύναμης. Το τι κάνει από το σημείο αυτό και μετά εξαρτάται από τον τύπο του δυναμικού.

Αν το δυναμικό είναι τύπου $U(r) = a^2 r^{\nu}$ (με $\nu > 0$) το σωματίδιο αν ξεκινήσει από το σημείο $(r_0, \theta_0 = 0)$ θα περάσει το σημείο ισορροπίας $r = 0$ και θα συνεχίζει να κινείται μέχρι το σημείο $(r_0, \theta_0 = \pi)$. Επομένως η αντίστοιχη γωνία μεταξύ των αψίδων θα είναι

$$2\Theta(E, L = 0) = (2\sigma + 1)\pi \ , \ \text{με} \ \ \sigma \in \mathbf{N} \tag{7}$$

αφού μπορούμε να υποθέσουμε ότι η ευθύγραμμη αυτή κίνηση μπορεί να σημαίνει σ τυλίγματα γύρω από την αρχή (φανταστείται την κίνηση αυτή σαν το όριο μιας σχεδόν ακτινικής κίνησης που περνάει οσοδήποτε κοντά από το κέντρο της δύναμης, οπότε στη θέση αυτή είναι δυνατό να περιελίσσεται κάμποσες φορές γύρω από το εν λόγω σημείο). Θα έχουμε λοιπόν ότι

$$\frac{(2\sigma + 1)^2}{4} = \frac{1}{2 + \nu} \tag{8}$$

Όμως το δεξί μέλος είναι μικρότερο του 1/2 οπότε η μοναδική δυνατή λύση για το σ είναι $\sigma = 0$ δηλαδή $\nu = 2$. Αυτή όπως ξέρουμε είναι η περίπτωση του αρμονικού ταλαντωτή που όπως δείξαμε οδηγεί πάντα σε περιοδικές λύσεις.

Αν το δυναμικό είναι τύπου $U(r) = a^2 r^{-\nu}$ (με $2 > \nu > 0$) το σωματίδιο αν ξεκινήσει από το σημείο $(r_0, \theta_0 = 0)$ θα περάσει το σημείο ισορροπίας $r = 0$ και επειδή δεν ξέρουμε τι ακριβώς θα συμβεί σε αυτή την ιδιάζουσα περίπτωση ας υποθέσουμε είτε ότι το σωματίδιο θα επιστρέψει στο σημείο $(r_0, \theta_0 = 0)$ (σαν να ενεργούσε η άλλη πτέρυγα του δυναμικού ως τοίχωμα ανάκλασης του σωματιδίου) είτε ότι θα συνεχίσει όπως και στην προηγούμενη περίπτωση στο σημείο $(r_0, \theta_0 = \pi)$. Επομένως η αντίστοιχη γωνία μεταξύ των αψίδων θα είναι

$$2\Theta(E, L = 0) = \sigma\pi \ , \ \text{με} \ \ \sigma \in \mathbf{N}. \tag{9}$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

$$\frac{\sigma^2}{4} = \frac{1}{2 - \nu} \tag{10}$$

δηλαδή $\sigma \geq 2$ ή $\nu \geq 1$. Ξέρουμε από την ανάλυση του δυναμικού $U(r) = -a^2/r$ ότι $\sigma = 2$. Ας επιτρέψουμε τώρα στο σωματίδιο μια απειροελάχιστη στροφορμή ώστε η κίνηση να είναι περίπου ακτινική. Τότε

$$d\theta = \frac{L\,dt}{r^2} = \frac{L\,dr}{\dot{r}r^2}. \tag{11}$$

Όμως για $\nu > 1$ το δυναμικό πέφτει πιο απότομα από το $-1/r$ και άρα όταν το σωματίδιο θα φτάσει στο αντίστοιχο ποσοστό της αρχικής ακτίνας θα έχει πιο μεγάλη ακτινική ταχύτητα επομένως το αντίστοιχο $d\theta$ θα είναι μικρότερο (η ακτινική εξέλιξη είναι πιο ραγδαία επομένως η γωνιακή εξέλιξη δεν προλαβαίνει να αναπτυχθεί όσο στο $-1/r$). Θα περιμέναμε λοιπόν για $\nu > 1$, $\Theta < \pi$ δηλαδή $\sigma < 2$ σε αντίθεση με τη σχέση (10). Επομένως μόνο το δυναμικό $U(r) = -a^2/r$ μπορεί να οδηγήσει σε περιοδικές τροχιές.

Ένα παλαιό άλυτο πρόβλημα

Έστω τώρα ότι η κίνηση ενός σώματος διεξάγεται εντός του ομογενούς πεδίου βαρύτητας επί μιας χωνοειδούς επιφάνειας με περιστροφική συμμετρία η οποία έχει κυλινδρικές συντεταγμένες $z = z(\rho)$ για κάθε γωνία ϕ. Θέλουμε να βρούμε αν υπάρχει κατάλληλη συνάρτηση $z(\rho)$ τέτοια ώστε όλες οι τροχιές επί της επιφάνειας να είναι περιοδικές. Η ανάλυση του προβλήματος αυτού οδηγεί σε μια έκφραση για την αντίστοιχη γωνία μεταξύ περικέντρου και αποκέντρου της μορφής

$$\Theta(E, L) = \int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} \frac{\sqrt{1 + [z'(\rho)]^2} L/\rho^2}{\sqrt{2(E - V(\rho))}} d\rho\,, \tag{12}$$

με $V(\rho) = L^2/2\rho^2 + gz(\rho)$.

Κατ᾽ αντιστοιχία γνωρίζουμε ότι η ημιπερίοδος της ταλάντωσης μιας χάντρας η οποία ολισθαίνει δίχως τριβές πάνω σε ένα σύρμα το οποίο έχει σχήμα $z(x)$ είναι

$$\frac{T}{2} = \int_{x_-}^{x_+} \frac{\sqrt{1 + [z'(x)]^2}}{\sqrt{2(E - gz(x))}} dx.$$

Γνωρίζουμε ότι το κατάλληλο σχήμα $z(x)$ που έχει την ιδιότητα να οδηγεί σε τιμή της $T/2$ ανεξάρτητη από την E είναι το σχήμα της κυκλοειδούς:

$$x(\xi) = R(\xi - \sin\xi)\,,\ z(\xi) = R(1 - \cos\xi).$$

Με βάση λοιπόν αυτή την αναλογία διερευνήστε αν υπάρχει κατάλληλο σχήμα της αξονικά συμμετρικής επιφάνειας $z(\rho)$ που να οδηγεί πάντα σε περιοδικές τροχιές επί της επιφάνειας.

Διερεύνηση

Από την ανάλυση των σχεδόν κυκλικών τροχιών ακτίνας $\rho = \rho_0 + r$ θα έχουμε

$$\Theta(E, L) = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{\sqrt{1 + [z'|_{\rho_0}]^2} L/\rho_0^2 + \mathcal{O}(r)}{\sqrt{2(E - \frac{L^2}{2(\rho_0 + r)^2} - gz|_{\rho_0} - grz'|_{\rho_0} - g\frac{r^2}{2}z''|_{\rho_0} + \mathcal{O}(r^3))}} dr \tag{13}$$

$$= \int_{-\epsilon_1}^{\epsilon_2} \frac{\sqrt{1 + [z_0']^2} L/\rho_0^2}{\sqrt{2(E - \frac{L^2}{2\rho_0^2}(1 - 2r/\rho_0 + 3r^2/\rho_0^2) - g(z_0 + rz_0' + r^2 z_0''/2)}} dr + \mathcal{O}(\epsilon) \tag{14}$$

$$. \tag{15}$$

Η ύπαρξη κυκλικών τροχιών επιβάλλει ό όρος τάξης r στην υπόρριζη ποσότητα του παρονομαστή να είναι 0, οπότε

$$-\frac{L^2}{\rho_0^3} + gz_0' = 0. \tag{16}$$

Η γωνία λοιπόν μεταξύ διαδοχικών αψίδων για σχεδόν κυκλικές τροχιές θα είναι

$$\Theta(E,L) = \sqrt{1+z_0'^2}\sqrt{gz_0'/\rho_0}\frac{\pi}{\sqrt{\frac{3gz_0'}{\rho_0}+gz_0''}} \tag{17}$$

Θα πρέπει λοιπόν η $z(\rho)$ να είναι τέτοια ώστε

$$\frac{1+z'^2}{3+\frac{z''\rho}{z'}} = \frac{p^2}{q^2} = \frac{1}{\nu}\,. \tag{18}$$

Ορίζοντας ώς $\psi = \ln z'$ και $x = \ln(\rho/\rho_0)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{d\psi}{dx} &= \nu - 3 + \nu e^{2\psi} \Rightarrow \\
\frac{de^{-\psi}}{dx} &= (3-\nu)e^{-\psi} - \nu e^{\psi} \Rightarrow \\
\frac{ds}{dx} &= (3-\nu)s - \nu/s \Rightarrow \\
\frac{1}{2}\frac{ds^2}{dx} &= (3-\nu)s^2 - \nu \Rightarrow \\
-\frac{1}{2}\frac{df}{dx} &= (\nu-3)f + \nu \Rightarrow \\
-x &= \frac{1}{2(\nu-3)}\ln[(\nu-3)f+\nu] \Rightarrow \\
f = s^2 = e^{-2\psi} = \frac{1}{z'^2} &= \frac{1}{\nu-3}[e^{2(3-\nu)x} - \nu] \Rightarrow \\
\frac{dz}{d\rho} &= \int_0^\rho \frac{\sqrt{\nu-3}}{\sqrt{(\rho/\rho_0)^{2(3-\nu)}-\nu}}d\rho
\end{aligned} \tag{19}$$

Υπάρχουν 2 ειδών σχήματα επιφάνειας λοιπόν που έχουν περιοδικές σχεδόν κυκλικές τροχιές ανεξάρτητες της ακτίνας της κυκλικής τροχιάς: αυτές με $\nu > 3$ και αυτές με $\nu < 3$.

Για $\nu > 3$

$$\frac{\sqrt{\nu-3}}{\sqrt{(\rho/\rho_0)^{2(3-\nu)}-\nu}} = \frac{\sqrt{\nu-3}}{\sqrt{(\rho_0/\rho)^{2(\nu-3)}-\nu}} \to \sqrt{\nu-3}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{(\nu-3)} \quad \text{για } \rho\to 0 \tag{20}$$

οπότε η επιφάνεια έχει μηδενική κλίση στο σημείο $rho = 0$. Αυτό σημαίνει ότι αν η αρχική στροφορμή είναι 0 θα είναι $2\Theta = (2\sigma+1)\pi$ με $\sigma \in \mathbf{N}$ και

$$\frac{(2\sigma+1)^2}{4} = \frac{1}{\nu} \tag{21}$$

Αφού $\nu > 3$ μοναδική λύση είναι η $\nu = 4$ ($\sigma = 0$). Την περίπτωση αυτή θα την εξετάσουμε αργότερα.

Για $\nu < 3$

$$\frac{\sqrt{\nu-3}}{\sqrt{(\rho/\rho_0)^{2(3-\nu)}-\nu}} = \frac{\sqrt{3-\nu}}{\sqrt{\nu-(\rho/\rho_0)^{2(3-\nu)}}} \to \sqrt{\frac{3-\nu}{\nu}} \text{ για } \rho \to 0 \tag{22}$$

που σημαίνει ότι η επιφάνεια είναι κωνική κοντά στο σημείο $\rho = 0$. ΄Ομως τότε για κινήσεις κοντά στην κορυφή του κώνου

$$\Theta = \pi/\sqrt{\nu} = \sqrt{1+\frac{3-\nu}{\nu}}\int \frac{L/\rho^2 d\rho}{\sqrt{2(E-\frac{L^2}{2\rho^2}-g\rho\sqrt{\frac{3-\nu}{\nu}})}} \tag{23}$$

Όπως βλέπουμε το ολοκλήρωμα δεν είναι της μορφής που συναντήσαμε στο θεώρημα Bertrand για τον αρμονικό ταλαντωτή όπου το ολοκλήρωμα οδηγεί σε σταθερή τιμή $\pi/2$. Εξάλλου θέτοντας $g = 0$ όπου τότε το ολοκλήρωμα υπολογίζεται άμεσα καταλήγουμε στην άτοπη σχέση $1 = \sqrt{3}$. Συνεπώς αποκλείεται και η περίπτωση $\nu < 3$.

Ερχόμαστε στο μοναδικό σχήμα που έχει επιβιώσει: $\nu = 4$. Στην περίπτωση αυτή

$$z(\rho) = \int_0^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{(\rho_0/\rho)^2 - 4}} = (1/8) \int_0^{y=4\rho^2} \frac{dy}{\sqrt{\rho_0^2 - y}} = \frac{1}{4}[\rho_0 - \sqrt{\rho_0^2 - 4\rho^2}] \tag{24}$$

που είναι το σχήμα μιας έλλειψης με ημιάξονες $\rho_0/2$ και $\rho_0/4$ αντίστοιχα. Έτσι για την περίπτωση αυτή

$$\Theta = \pi/4 = \int \sqrt{\frac{(\rho_0/\rho)^2 - 3}{(\rho_0/\rho)^2 - 4}} \frac{L/\rho^2 d\rho}{\sqrt{2(E - \frac{L^2}{2\rho^2} - \frac{g\rho_0}{4}[1 - \sqrt{1 - 4(\rho/\rho_0)^2}])}} \tag{25}$$

Το αποτέλεσμα αυτό δεν είναι δυνατό να μην εξαρτάται από την τιμή του g αφού για $g = 0$ (γεωδαισιακή κίνηση σε ελλειψοειδές) η τροχιά δεν κλείνει. Αυτό μπορεί να αποδειχθεί γράφοντας το ολοκλήρωμα για $g = 0$ που φαίνετια ότι εξαρτάται από τα όρια του ολοκληρώματος.

Επομένως ουδεμία επιφάνεια δεν έχει την αντίστοιχη ιδιότητα των 2 εξαιρετικών περιπτώσεων του θεωρήματος Bertrand.