Μεταβλητές γωνίες δράσης
Σημειώσεις Π. Ιωάννου & Θ. Αποστολάτου - Δεκέμβρης 2009

# 1 Κατασκευή των μεταβλητών

Αρχίζουμε με χαμιλτονιανά συστήματα σε μία διάσταση με χρονοανεξάρτητη χαμιλτονιανή

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$$

που έχουν για μια περιοχή ενεργειών περιοδικές τροχιές. Για μία τιμή της ενέργειας θεωρούμε τη τροχιά $p(q, E)$ που δίνεται από:

$$p = \pm\sqrt{2mE - V(q)} \; .$$

Η $p$ είναι πολύτιμη συνάρτηση επι μίας τροχιάς. Θέλουμε να κατασκευάσουμε κανονικές μεταβλητές $(\theta, I)$ τέτοιες ώστε κάθε περιοδική τροχιά να προσδιορίζεται μοναδικα από την τιμή της μεταβλητής $I$ και κάθε σημείο επί της τροχιάς από μία τιμή της μεταβλητής $\theta$. Μία τέτοια επιλογή θα μπορούσε να ήταν ο χρόνος που προσδιορίζει το σημείο επί της τροχιάς και η ενέργεια (η χαμιλτονιανή). Η κατασκευή που θα κάνουμε σε μονοδιάστατα συστήματα είναι κατ'ουσιαναυτή.

Μία τέτοια επιλογή συνεταγμένων ισιώνει τη χαμιλτονιανή ροή (οχι μόνο τοπικά). Σε αυτές τις συντεταγμένες η χαμιλτονιανή είναι συνάρτηση μόνο της $I$. Συνεπώς η $I$ θα είναι σταθερά και η άλλη εξίσωση του Χάμιλτον οδηγεί στην άμεσα ολοκληρώσιμη εξίσωση

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H(I)}{\partial I} = \omega(I)$$

που περιγράφει περιστροφή με σταθερή γωνιακή ταχύτητα:

$$\theta = \omega(I)t + \theta_0 \; .$$

Ορίζουμε τη νέα ορμή:

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p dq \; .$$

(Προσέξτε ότι κατα την ολοκλήρωση αυτή χρησιμοποιούμε και τα δύο πρόσημα του $p$, όπου είναι $dq < 0$ λαμβάνεται το αρνητικό πρόσημο του $p$). Για να κατασκευάσουμε τον κανονικό μετασχηματισμό $(q, p) \to (\theta, I)$ παρατηρούμε ότι ο γεννήτορας τύπου 2:

$$S_2(q, I) = \int^q p dq$$

όπου το $p = p(q, I)$ έχει την ιδιότητα

$$p = \frac{\partial S_2}{\partial q} \ ,$$

και συνεπώς ορίζει κανονικό μετασχηματισμό από τις αρχικές ορμές και θέσεις. Η νέα κανονική θέση ορίζεται ως:

$$\theta = \frac{\partial S_2}{\partial I} \ .$$

Σε αυτές τις συντεταγμένες:

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H(I)}{\partial I} = \omega(I) \quad , \quad \dot{I} = -\frac{\partial H(I)}{\partial \theta} = 0$$

Παρατηρήστε ότι όταν γίνεται ένας κύκλος η γωνία $\theta$ αλλάζει κατά $2\pi$. Η μεταβολή της γωνίας σε ένα κύκλο $\Delta\theta$ θα προσδιορισθεί από την αντίστοιχη μεταβολή του γεννήτορα σε ένα κύκλο:

$$\begin{aligned} \Delta S_2 &= \oint p dq \\ &= 2\pi I \ , \end{aligned}$$

συνεπώς

$$\begin{aligned} \Delta\theta &= \frac{\partial \Delta S_2}{\partial I} \\ &= 2\pi \ . \end{aligned}$$

Ενώ ο γεννήτορας $S_2$ αυξάνεται κατά $2\pi I$ σε κάθε κύκλο ο γεννήτορας $S_1(q, \theta) = S_2(q, I) - \theta I$ είναι περιοδικός $S_1(q, \theta) = S_1(q, \theta + 2\pi)$ και σε κάθε κύκλο επιστρέφει στην αρχική τιμή , δηλαδή είναι $\Delta S_1 = 0$. Πράγματι:

$$\begin{aligned} \Delta S_1 &= \Delta S_2 - \Delta\theta I \\ &= 2\pi I - 2\pi I \\ &= 0 \ . \end{aligned}$$

# 2 Παραδείγμα: ο αρμονικός ταλαντωτής

Θεωρήστε ταλαντωτή με Χαμιλτονιανή:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}$$

τότε

$$I = \frac{E}{\omega}$$

και η Χαμιλτονιανή γίνεται:

$$H = \omega I$$

Ο γεννήτορας του μετασχηματισμού είναι:

$$\begin{aligned} S_2(q, I) &= \int^q \sqrt{2mI\omega - m^2\omega^2 q^2}\, dq \\ &= I \sin^{-1} q\sqrt{\frac{m\omega}{2I}} + \frac{q}{2}\sqrt{2m\omega I - m^2\omega^2 q^2} \end{aligned}$$

και συνεπώς

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\partial S_2(q, I)}{\partial I} \\ &= \int^q \frac{m\omega dq}{\sqrt{2m\omega I - m^2\omega^2 q^2}} \\ &= \sin^{-1} q\sqrt{\frac{m\omega}{2I}}\ . \end{aligned}$$

Προσδιορίζω τον αντίστοιχο μετασχηματισμό $S_1(q, \theta)$. Επειδή

$$p dq + \theta dI = dS_2(q, I)$$

και $d(I\theta) = Id\theta + \theta dI$ γράφω την πάνω σχέση ως:

$$d(S_2(q, I) - I\theta) = p dq - I d\theta$$

οπότε προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} S_1(q, \theta) &= S_2(q, I) - I\theta \\ &= \frac{m\omega q^2}{2} \cot\theta \end{aligned}$$

Η ορμή τότε είναι:

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial S_1}{\partial q} \\ &= \sqrt{2Im\omega} \cos\theta\ . \end{aligned}$$

Οι εκφράσεις για τα $p$ και $q$ προσδιορίζουν τη χρονική εξέλιξη του ταλαντωτή αν θέσουμε από τις εξισώσεις του Χάμιλτον στις νέες συντεταγμένες:

$$\theta = \omega t + \theta_0\ .$$

# 3 Κανονικοί μετασχηματισμοί που εξαρτώνται από μία παράμετρο

Έστω ότι η Χαμιλτονιανή $H(q,p,\lambda)$ εξαρτάται συνεχώς και διαφορίσιμα από μία συνεχή παράμετρο $\lambda$. Αν οι τροχιές δεν αλλάζουν τοπολογία (παραμένουν π.χ. κλειστές) για διαφορετικές τιμές του $\lambda$ και έχουμε περιοδικές τροχιές για όλες τις τιμές του $\lambda$ τότε και πάλι μπορούμε να ορίσουμε το μετασχηματισμό

$$\theta = \theta(q,p,\lambda) \ \ , \ \ I = I(q,p,\lambda)$$

σε μεταβλητές γωνίας - δράσης με τη μόνη διαφορά ότι οι γέννήτορες $S_1(q,\theta,\lambda)$ και $S_2(q,I,\lambda)$ θα εξαρτώνται από τη παράμετρο $\lambda$. Η εξάρτηση από τη παράμετρο στους γεννήτορες έχει την ιδιότητα

$$\left.\frac{\partial S_1}{\partial \lambda}\right|_{q,\theta} = \left.\frac{\partial S_2}{\partial \lambda}\right|_{q,I}$$

Πράγματι επειδή

$$\begin{aligned} \frac{dS_2}{d\lambda} &= \frac{\partial S_2}{\partial I}\frac{\partial I}{\partial \lambda} + \frac{\partial S_2}{\partial \lambda} \\ &= \theta\frac{\partial I}{\partial \lambda} + \frac{\partial S_2}{\partial \lambda} \qquad (1) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \frac{dS_1}{d\lambda} &= \frac{\partial S_1}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial \lambda} + \frac{\partial S_1}{\partial \lambda} \\ &= -I\frac{\partial \theta}{\partial \lambda} + \frac{\partial S_1}{\partial \lambda} \qquad (2) \end{aligned}$$

θα είναι

$$\frac{dS_2}{d\lambda} = \frac{dS_1}{d\lambda} + I\frac{d\theta}{d\lambda} + \theta\frac{dI}{d\lambda} \ .$$

Οπότε από την (1) έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_2}{\partial \lambda} &= \frac{dS_2}{d\lambda} - \theta\frac{dI}{d\lambda} \\ &= \frac{dS_1}{d\lambda} + I\frac{d\theta}{d\lambda} \\ &= \frac{\partial S_1}{\partial \lambda} \ , \end{aligned}$$

όπως φαινεται από την (2).

Έστω τώρα ότι η παράμετρος $\lambda(t)$ εξαρτάται από το χρόνο. Τότε

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= [\theta, H]_{(q,p)} + \frac{\partial \theta}{\partial t} \\ &= [\theta, H]_{(\theta,I)} + \frac{\partial \theta}{\partial t} \\ &= \frac{\partial H}{\partial I} + \frac{\partial^2 S_2}{\partial I \partial t} \\ &= \frac{\partial}{\partial I}\left(H + \frac{\partial S_2}{\partial t}\right) .\end{aligned}$$

Η αντικατάσταση στη αγγύλη Poisson έγινε επειδή ο μετασχηματισμός $(q,p) \rightarrow (\theta, I)$ για κάθε τιμή του $\lambda$ είναι κανονικός οπότε για όλες τις κανονικές μεταβλητές ισχύει:

$$[f,g]_{(q,p)} = [f,g]_{(\theta,I)} .$$

Ομοίως δείχνουμε ότι:

$$\dot{I} = -\frac{\partial}{\partial \theta}\left(H + \frac{\partial S_1}{\partial t}\right) .$$

Συνεπώς επειδή όπως δείξαμε όταν ο μετασχηματισμός εξαρτάται από μία παράμετρο είναι $\partial S_1/\partial t = \partial S_2/\partial t$, η Χαμιλτονιανή που διέπει τη δυναμική στις νέες συντεταγμένες θα είναι:

$$K = H + \frac{\partial S_i}{\partial t}$$

όπου $S_i$ ($i = 1,2$) οποιοσδήποτε από τους γεννήτορες .

Τα παραπάνω ισχύουν βεβαίως γενικά για κάθε κανονικό μετασχηματισμό.

# 4 Αδιαβατικά αναλλοίωτα

Έστω ότι η δυναμική εξαρτάται από το χρόνο μέσω μίας παραμέτρου $\lambda = \lambda(t)$ όπου η παράμετρος μεταβάλλεται αργά με τον χρόνο είναι π.χ. $\lambda = \epsilon t$ όπου $\epsilon << 1$. Αν η τοπολογία των τροχιών δεν αλλάζει κατακευάζουμε για κάθε τιμή της παραμέτρου τις μεταβλητές γωνίας-δράσης. Η δυναμική όμως θα διέπεται λόγω της χρονοεξάρτησης του μετασχηματισμού από την χαμιλτονιανή:

$$K = H(I, \lambda) + \frac{\partial S_1}{\partial t}$$

και οι εξισώσεις αν το $\lambda = \epsilon t$ λαμβάνουν κατάλληλη για διαταρακτικούς υπολογισμούς μορφή:

$$\dot{\theta} = \omega(I, \lambda) + \epsilon R_1(\theta, I, \lambda) \ \ , \ \ \dot{I} = -\epsilon R_2(\theta, I, \lambda) \ ,$$

όπου

$$\omega(I,\lambda) = \frac{\partial H}{\partial I} \ .$$

και

$$R_1 = \frac{\partial^2 S_1}{\partial \lambda \partial I} \ \ , \ \ R_2 = \frac{\partial^2 S_1}{\partial \lambda \partial \theta} \ .$$

Λαμβάνουν ιδιατέρως καλή μορφή για διαταρακτικό υπολογισμό διότι για σταθερό $\lambda$ η μέση τιμή των $R_1$ και $R_2$ σε ένα κύκλο είναι μηδεν:

$$\overline{R_i} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R_i d\theta = 0 \quad (i=1,2) \ ,$$

διότι η $R_1$ και η $R_2$ για σταθερό $\lambda$ , όπως και η $S_1$ είναι περιοδικές συναρτήσεις. Αυτό σημαίνει ότι αν η μεταβολή της παραμέτρου είναι πολύ αργή, είναι δηλαδή αδιαβατική (θα δούμε τι εννοούμε ακριβώς) τότε σε μία περίοδο η μέση τιμή του $I$ παραμένει σταθερή και αυτή η δράση είναι το λεγόμενο αδιαβατικό αναλλοίωτο.

Ακολουθούμε τον Arnold για να εκτιμήσουμε πόσο σταθερή είναι η ποσότητα $I$ και για πόσο χρόνο. Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$R_3 = \int_0^{\theta} R_2(\theta', I, \lambda) d\theta'$$

που και αυτή έχει μέση τιμή μηδενική. Επειδή:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{R_3}{\omega}\right) &= \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{R_3}{\omega}\right)\dot{\theta} + \frac{\partial}{\partial I}\left(\frac{R_3}{\omega}\right)\dot{I} + \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{R_3}{\omega}\right)\dot{\lambda} \\
&= R_2 + \epsilon\left(\frac{R_1 R_2}{\omega} - R_2\frac{\partial}{\partial I}\left(\frac{R_3}{\omega}\right) + \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{R_3}{\omega}\right)\right) \\
&= R_2 + \epsilon M(t)
\end{aligned}$$

($M(t)$ η συνάρτηση στη παρένθεση που είναι τάξης $\epsilon$). Συνεπώς:

$$R_2 = \frac{d}{dt}\left(\frac{R_3}{\omega}\right) - \epsilon M(t)$$

και

$$\dot{I} = -\epsilon\frac{d}{dt}\left(\frac{R_3}{\omega}\right) + \epsilon^2 M \ .$$

Τώρα επειδή οι $R_i$ (i=1,2,3) είναι περιοδικές συναρτήσεις και το $\omega > 0$ δεν μηδενίζεται η $|M(t)| < M_1$ είναι φραγμένη συνάρτηση όπως και η $|R_3/\omega| < M_2$. οπότε

$$|I(t) - I(0)| \leq \epsilon(2M_2 + \epsilon t M_1)$$

και η αλλαγή παραμένει μικρή για χρόνους: $0 < t < \epsilon^{-1}$. Κάθε ποσότητα που μεταβάλεται πολύ λίγο σε χρονικό διάστημα $O(\epsilon^{-1})$ λέγεται αδιαβατικό αναλλοίωτο.

# 5 Ακρίβεια αδιαβατικού αναλλοιώτου αρμονικού ταλαντωτή

Ο Landau αποδεικνύει ότι η ακρίβεια των αναλλοιώτων αυτών είναι εκθετική. Το επιχείρημα βασίζεται σε γνωστο λήμμα της μιγαδικής ανάλυσης για την ασυμπτωτική τιμή ολοκληρωμάτων τύπου Fourier. Επειδή το

$$\Lambda = \frac{\partial S_1}{\partial \lambda}$$

είναι περιοδική συνάρτηση του $\theta$, μπορεί να αναλυθεί σε σειρά Fourier

$$\Lambda(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \Lambda_n e^{in\theta}$$

όπου για να διαφαλισθεί το πραγματικό του γεννήτορα απαιτείται $\Lambda_{-n} = \Lambda_n^*$. Συμπτίσσοντας τους όρους μπορούμε να το γράψουμε ως άθροισμα ως προς μόνο θετικά $n \geq 0$:

$$\Lambda(\theta) = 2\Re \sum_{n=0}^{n=\infty} \Lambda_n e^{in\theta} \ ,$$

όπου $\Re$ είναι το πραγματικό μέρος. Συνεπώς

$$\dot{I} = -2\Re \sum_{n=0}^{n=\infty} in\Lambda_n e^{in\theta} \dot{\lambda} \ ,$$

και η συνολική μεταβολή στη δράση όταν η παράμετρος $\lambda$ μεταβληθεί από $\lambda(-\infty)$ σε $\lambda(\infty)$ είναι:

$$\Delta I = I(\infty) - I(-\infty) = -2\Re \sum_{n=1}^{n=\infty} in \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda_n e^{in\theta} \dot{\lambda} dt \ .$$

Αν τώρα $\dot{\lambda}$ είναι αρκούντως μικρό έτσι ώστε $\dot{\theta}$ να έχει το ίδιο πρόσημο με την $\omega$, χεγ θετικό, τότε το $\theta$ είναι μονότονη συνάρτηση του χρόνου και μπορεί να αντικατασταθεί στο παραπάνω ολοκλήρωμα που γίνεται:

$$\Delta I = -2\Re \sum_{n=1}^{n=\infty} in \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda_n e^{in\theta} \frac{\dot{\lambda}}{\dot{\theta}} \, d\theta \ .$$

Με αυτή το ολοκλήρωμα μπορεί να εκτιμηθεί διότι αν δεν υπάρχουν ανωμαλίες για πραγματικές τιμές του $\theta$ η κύρια συνεισφορά του ολοκληρώματος προέρχεται από την ανωμαλία στο μιγαδικό πεδίο $\theta$ με το μικρότερο φανταστικό μέρος και αν αυτή είναι η $\theta_0$ η μεταβολή του αδιαβατικού αναλλοιώτου

$$\Delta I \approx \sum_{n=1}^{n=\infty} n e^{-nIm(\theta_0)} \ .$$

άρα επειδή η πρώτη επιτρεπόμενη αρμονική είναι εκθετικά πιο μεγάλη έχουμε την εκτίμηση ότι

$$\Delta I \approx e^{-Im(\theta_0)} \ .$$

# 6 Κίνηση σε αργα μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο

Σωματίδιο φορτίου $q$ κινείται σε μαγνητικό πεδίο σταθερής διεύθυνσης $\vec{B} = B(x,y)\vec{k}$. Θεωρούμε ότι η μεταβολή του μαγνητικού πεδίου στο χώρο είναι πολύ μικρή σε αποστάσεις της τάξης της γυρομαγνητικής ακτίνας του φορτίου. Σε πρώτη προσέγγιση η κίνηση είναι η κίνηση που προκύπτει οταν το φορτίο κινείται σε χωρικά σταθερό μαγνητικό πεδίο. Η κίνηση σε αυτή τη περίπτωση διέπεται από την

$$\ddot{z} = -i\omega\dot{z} \ , \tag{3}$$

όπου $\omega = qB/m$ και $z = x + iy$ με $(x, y)$ τις καρτεσιανές συντεεταγμένες του σωματιδίου στο επίπεδο που είναι κάθετο στη σταθερή διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου. Η κίνηση είναι η κυκλική κίνηση:

$$z = a + re^{-i\omega t} \ .$$

Η ταχύτητα είναι $|\vec{v}|^2 = \dot{z}\dot{z}^*$ και συνεπώς η ενέργεια που διατηρείται λαμβάνει τη τιμή:

$$H = \frac{m}{2}\omega^2 r^2 = \frac{q^2B^2r^2}{2m}$$

Αν τώρα λάβουμε υπόψη την μικρή χωρική εξάρτηση του μαγνητικού πεδίου (αλλά συνεχίζουμε να γράφουμε $\vec{A} = -By\vec{i}$ για το ανυσματικό δυναμικό), εκτός από τη διατήρηση της ενέργειας θα έχουμε και τη διατήρηση του αδιαβατικού αναλλοιώτου:

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2\pi}\oint pdq \\
&= \frac{1}{2\pi}\oint \vec{p}\cdot\vec{v}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\oint (m\vec{v} + q\vec{A})\cdot\vec{v}dt \\
&= \frac{2H}{\omega} - \frac{qB}{2\pi}\oint y\dot{x}dt \\
&= \frac{2H}{\omega} + \frac{qB}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega}(y_0 - r\sin\omega t)\omega r\sin\omega t dt \\
&= \frac{H}{\omega} \\
&= \frac{qBr^2}{2}
\end{aligned}$$

Συνεπώς επειδή διατηρείται σε αυτή τη περίπτωση και η ενέργεια και το αδιαβατικό αναλλοίωτο το φορτίο πρέπει να κινηθεί έτσι ώστε και το μαγνητικό πεδίο να είναι σταθερό αλλά και η γυρομαγνητική ακτίνα. Συνεπώς το σωματίδιο πρέπει να κινηθεί στη κατεύθυνση γραμμών σταθερού μαγνητικού πεδίου.

Ας το δείξουμε αυτό το αποτέλεσμα με μέθοδο ανάλογη της προσέγγισης WKB. Λογω της μεταβολής του μαγνητικού πεδίου η τροχιά θα λάβει τη μορφή

$$z = a(t) + r(t)e^{-i\phi(t)}$$

όπου η χρονική μεταβολή $\dot{a}$, $\dot{r}$ και $\ddot{\phi}$ είναι αργή και ανάλογη του $\nabla B$ δεδομένη ότι οι όροι αυτοί μηδενίζονται όταν το πεδίο είναι σταθερό. Γράφοντας τους όρους κατα σειρά μεγέθους, έχουμε:

$$\dot{z} = -ir\dot{\phi}e^{-i\phi} + (\dot{a} + \dot{r}e^{-i\phi}) ,$$

και

$$\ddot{z} = -r\dot{\phi}^2 e^{-i\phi} - i(r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi})e^{-i\phi} + \ddot{a} + \ddot{r}e^{-i\phi} .$$

Αναπτύσσοντας γύρω από το κέντρο της τροχιάς:

$$\omega(z) = \omega(a) + (z-a)\frac{\partial \omega}{\partial z} + (z^* - a)\frac{\partial \omega}{\partial z^*} + \cdots .$$

Συνεπώς εξισορρόπιση των πρώτης τάξης όρων της (3) απαιτεί:

$$\dot{\phi} = \omega(a) ,$$

και η δεύτερη τάξη

$$i\dot{a} - i\dot{r}e^{-i\phi} + re^{-i\phi}\left(re^{i\phi}\frac{\partial \omega}{\partial z} + r^* e^{-i\phi}\frac{\partial \omega}{\partial z^*}\right) = 0 .$$

Λαμβάνοντας τη μέση κίνηση σε μία περιστροφή λαμβάνουμε:

$$\dot{a} = i|r|^2 \frac{\partial \omega}{\partial z^*}$$

και επειδή $E = m\omega^2|r|^2/2$, οι συνισταμένες του κέντρου γυρομαγνητικής περιστροφής: $a = x_1 + ix_2$ εξελίσσεται σύμφωνα με τη πρωτοβάθμια εξίσωση:

$$\dot{x}_i = -\frac{E}{m\omega^2}\epsilon_{ij}\frac{\partial \omega}{\partial x_j} .$$

Η εξίσωση είναι πρωτοβάθμια διότι η συγκεκριμένη ταχύτητα του σωματιδίου δεν υπεισέρχεται διότι έχει ληφθεί ο μέσος όρος της κίνησης. Η εξάρτηση από τη ταχύτητα εμφανίζεται μόνο από το βαθμωτό μεγεθος της ενέργειας. Αμέσως τώρα έχουμε ότι το μαγνητικό πεδίο κατα αυτή τη κίνηση θα ικανοποιεί:

$$\frac{dB_i}{dt} = -\frac{E}{m\omega^2}\frac{\partial B}{\partial x_i}\epsilon_{ij}\frac{\partial \omega}{\partial x_j} = 0 ,$$

δεδομένου ότι $\omega \propto B$. Άρα τα σωματίδια θα κινούνται σε γραμμές σταθερού μαγνητικού πεδίου.