ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Μηχανική Μεταπτυχιακού

Δεκεμβρίου 24, 2017

Θ. Αποστολάτος & Π. Ιωάννου

Το κείμενο αυτό θα ενημερώνεται περιοδικά. Αρχίστε να επιλύετε τα προβλήματα σταδιακά.

Άσκηση 1

Στη γραμμική θεωρία κυμάτων η κατακόρυφη μετατόπιση, ζ, και η κατακόρυφη ταχύτητα της επιφάνειας, w, συσχετίζονται μέσω της σχέσης: $w = \partial\zeta/\partial t$. Θεωρούμε επίπεδα κύματα που διαδίδονται στη διεύθυνση x. Αν αρχικά τη χρονική στιγμή $t = 0$ η μετατόπιση της επιφάνειας ήταν $\zeta_0(x)$ και η κατακόρυφη ταχύτητα $w_0(x)$, δίνονταν από το πραγματικό μέρος των ολοκληρωμάτων:

$$\zeta_0(x) = \int_0^\infty Z(k)e^{-ikx}dk, \quad w(x) = \int_0^\infty W(k)e^{-ikx}dk \quad ,$$

δείξτε ότι στον χρόνο t η διακύμανση της επιφάνειας, $\zeta(x,t)$, μπορεί να γραφεί ως άθροισμα ζευγών κυμάτων που διαδίδονται προς τα $+\infty$ και προς το $-\infty$:

$$\zeta(x,t) = \int_0^\infty Z_p(k)e^{i(\omega(k)t-kx)}dk + \int_0^\infty Z_n(k)e^{-i(\omega(k)t+kx)}dk \quad ,$$

με πλάτος κυμάτων θετικής φασικής ταχύτητας:

$$Z_p(k) = \frac{1}{2}\left(Z(k) - i\frac{W(k)}{\omega(k)}\right) \; ,$$

με αντίστοιχη έκφραση για τα κύματα αρνητικής φασικής ταχύτητας.

Στην περίπτωση που αρχικά η επιφάνεια είναι ακίνητη και έχει διαταραχθεί ώστε:

$$\zeta_0(x) = \frac{2\varepsilon x}{x^2 + x_0^2} \; ,$$

με $\varepsilon > 0$ αρκούντως μικρό ώστε να βρισκόμαστε στη γραμμική περιοχή προσδιορίστε το $Z_p(k)$. Μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε την μορφή της διακύμανσης των κυμάτων με θετική φασική ταχύτητα για μεγάλες τιμές των x και των t.

Γιατί το x_0 ρυθμίζει τι είδους κύματα διεγείρονται; Αν $x_0 >> \lambda_m$, όπου λ_m είναι το μήκος κύματος για το οποίο η επιφανειακή τάση πρέπει να ληφθεί υπόψη (πόσο είναι το λ_m για νερό σε κανονικές συνθήκες $\rho = 10^3$ kg/m^3 και $T = 0.074$ Nt/m^2;) τότε μπορούμε να αμελήσουμε τη διέγερση τριχοειδών κυμάτων. Επίσης θεωρούμε ότι το x_0 είναι αρκετά μικρότερο από το βάθος του πυθμένα,

H, ώστε να μπορούμε να θεωρούμε ότι το βάθος του πυθμένα είναι άπειρο (τι ανισότητα πρέπει να ικανοποιεί το x_0/H για να ισχύει αυτό;). Υπό αυτές τις προϋποθέσεις δείξτε ότι η διακύμανση των κυμάτων με θετική φασική ταχύτητα για μεγάλες τιμές των x και των t λαμβάνει την ασυμπτωτική μορφή:

$$\zeta_p(x,t) \approx \frac{\varepsilon t\sqrt{\pi g}}{x^{3/2}} \exp\left[-\frac{gx_0}{4}\frac{t^2}{x^2} + i\left(\frac{gt^2}{4x} + \frac{\pi}{4}\right)\right] \ .$$

Σχεδιάστε το νορμαλισμένο πλάτος της διακύμανσης την χρονική στιγμή $t = 100$ και $t = 110$. Τώρα δείξτε ότι το μέγιστο πλάτος του κυματισμού διαδίδεται με ταχύτητα

$$\sqrt{\frac{gx_0}{3}}$$

και δείξτε ότι η ταχύτητα των κορυφών των κυμάτων στην περιοχή του μεγίστου κινείται με διπλάσια ταχύτητα.

Τέλος υπολογίστε τη συνολική ενέργεια των κυμάτων στην περιοχή $x > 0$ και δείξτε ότι η ενέργεια αυτή είναι ακριβώς μισή της αρχικής ενέργειας. Τι έγινε το άλλο μισό;

Άσκηση 2

Θεωρήστε ποταμό που ρέει στη διεύθυνση x με σταθερή καθ'ύψος ταχύτητα $U > 0$ στο πεδίο βαρύτητας έντασης g. Ο πυθμένας του ποταμού βρίσκεται στο $z = -h + e^{\varepsilon t} f_1(x)$ με $f_1'(x) = f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{ikx}dk$, ενώ η αδιατάρακτη επιφάνειά του είναι στο $z = 0$. Θεωρούμε δυσδιάστατες διαταραχές στο επίπεδο (x, z), z είναι η κατακόρυφη διεύθυνση. Δείξτε ότι δεν μπορούν να υπάρξουν επίπεδα μονοχρωματικά κύματα που κινούνται αντίθετα στη ροή με φασική ταχύτητα U, ώστε να είναι στάσιμα, αν $U^2/gh > 1$. Προς το παρόν αμελούμε την επιφανειακή τάση.

α. Πρώτα θεωρούμε ότι $U^2/gh < 1$.

Θέλουμε να υπολογίσουμε ή δυνατόν το στάσιμο σχήμα της επιφανείας του ποταμού $\zeta(x)$ στη γραμμική προσέγγιση. Έχουμε εισάγει την εκθετική αύξηση στο ύψος του πυθμένα για να εντοπίσουμε τα κύματα που προκύπτουν από τη διαταραχή του πυθμένα αποκλείοντας έτσι τον ελεύθερο κυματισμό που μπορεί να προκύψει από το άπειρο. Η φυσική λύση είναι αυτή που προκύπτει λαμβάνοντας το όριο $\varepsilon \to 0$. Δείξτε ότι η επιφάνεια έχει το σχήμα:

$$\zeta = e^{\varepsilon t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{UF(k)e^{ikx}}{\Delta(kU - i\varepsilon, k)} dk \ ,$$

όπου

$$\Delta(\omega, k) = i\left(\omega \cosh(kh) - \frac{gk}{\omega}\sinh(kh)\right) \ ,$$

και $\Delta(\omega, k) = 0$ είναι η εξίσωση διασποράς των ελευθέρων κυμάτων. Εάν k_0 είναι ρίζα της $\Delta(k_0 U, k_0) = 0$ τότε για μικρά ε σε πρώτη τάξη η ρίζα της $\Delta(kU - i\varepsilon, k) = 0$ είναι

$$k = k_0 + \frac{i\varepsilon}{U - c_g} \ ,$$

όπου

$$c_g = \left.\frac{\partial \omega}{\partial k}\right|_{\Delta=0} = - \left.\frac{\partial \Delta(\omega, k)/\partial k}{\partial \Delta(\omega, k)/\partial \omega}\right|_{k_0}$$

η ομαδική ταχύτητα του κύματος με κυματαριθμό k_0. Συνεπώς οι ρίζες αποκτούν θετικό φανταστικό μέρος για τα κύματα που η ταχύτητα του ποταμού είναι μεγαλύτερη απο την ομαδική ταχύτητα των κυμάτων και αρνητικό αν $c_g > U$.

Δείξτε τότε αν αμελήσουμε τη συνεισφορά από τους πόλους της $F(k)$ ότι η επιφάνεια του ποταμού στο όριο $\varepsilon \to 0$ είναι για αρκούντως μεγάλα x μακρυά από την ανωμαλία του εδάφους:

$$\zeta(x) = \sum_{k_0 \ \text{με} \ c_g(k_0) < U} 2\pi i \frac{U F(k_0) e^{i k_0 x}}{\left.\frac{\partial \Delta(kU, k)}{\partial k}\right|_{k_0}} dk \quad \text{για} \ \ x > 0 \ ,$$

και

$$\zeta(x) = \sum_{k_0 \ \text{με} \ c_g(k_0) > U} -2\pi i \frac{U F(k_0) e^{i k_0 x}}{\left.\frac{\partial \Delta(kU, k)}{\partial k}\right|_{k_0}} dk \quad \text{για} \ \ x < 0 \ .$$

Πόσο μακρυά πρέπει να βρισκόμαστε από την ανωμαλία για να ισχύουν τα παραπάνω;

Δείξτε ότι μακριά από το εμπόδιο το σχήμα της επιφανείας είναι μηδενικό για $x < 0$ και

$$\zeta(x) = \frac{4\pi \sinh(k_0 h)}{\sinh(2 k_0 h) - (2 k_0 h)} \left(F(k_0) e^{i k_0 x} + F(-k_0) e^{-i k_0 x} \right) \quad ,$$

για $x > 0$, με το k_0 να είναι αυτό που ικανοποιεί την

$$\frac{U^2}{gh} = \frac{\tanh(k_0 h)}{k_0 h} \ .$$

Δείξτε οτι η παραπάνω έκφραση λαμβάνει μόνο πραγματικές τιμές. Δείξτε ότι η παραπάνω έκφραση είναι συνεχής στο μηδέν αν η $f(x)$ ειναι περιττή συνάρτηση ($f(x) = -f(-x)$). Ποία η απόκριση όταν το U^2/gh τείνει προς το 1;

Εγείρονται όμως μερικά ερωτήματα. Τι είναι όμως το $x = 0$; Πως επικοινωνείται η πληροφορία για το $x = 0$ στη λύση;

Η πληροφορία αποτυπώνεται στο $F(k)$. Στην παραπάνω έκφραση δεν έχουμε λάβει υπόψη τους πόλους της $F(k)$ και έχουμε υποθέσει ότι η $F(k)$ δεν αυξάνεται εκθετικά όταν $|k| \to \infty$, όπου k μιγαδικό. Ποία είναι η αντίστοιχη απόκριση εάν ο μετασχηματισμός Fourier της $f(x)$, $F(k)$, έχει τις παραπάνω ιδιότητες και το $f(x)$ γίνει $f(x+a)$; Για να καταλάβετε τα παραπάνω υπολογίστε την απόκριση στις περιπτώσεις

$$f(x) = -2xe^{-x^2} \quad , f(x) = \sin \beta x \quad .$$

και συγκρίνεται την απόκριση με αυτή που θα εκτιμούσατε αν δεν λαμβάνατε υπόψη τους πόλους της $F(k)$. Είναι συνεχής η συνάρτηση που προκύπτει;

β. Θεωρούμε τώρα ότι $U^2/gh > 1$.

Υπολογίστε την απόκριση τώρα της επιφάνειας στην περίπτωση της παραπάνω $f(x)$. Προσέξτε ότι οι πόλοι τώρα είναι σε φανταστικές τιμές του k. Ξαναεπιστρέψτε στο πρόβλημα (α), ξεχάσαμε τίποτε στην απόκριση του συστήματος; Υπό ποία έννοια αυτό που γράψαμε είναι η λύση;

Σημείωση: Η περίπτωση

$$f(x) = \frac{2\varepsilon x}{x^2 + x_0^2} \quad .$$

είναι δύσκολη διότι για να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα πρέπει να γράψετε την αναλυτική επέκταση πραγματικής συνάρτησης της μορφής $\Theta(k)e^{-|k|}$. Αυτό επιτυγχάνεται. Αλλά τότε η λύση θα έχει τη μορφή κάποιου convolution που είναι δύσκολο να υπολογισθεί. Μπορείτε να κατασκευάσετε την αναλυτική επέκταση της ασυνεχούς και μη διαφορίσιμης στο $k = 0$ πραγματικής συνάρτησης $\Theta(k)$;