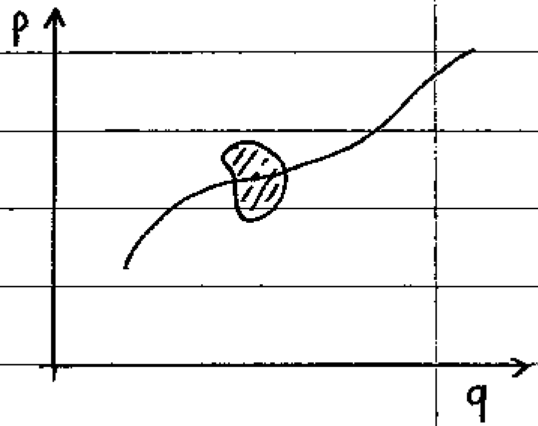
9.11.2005

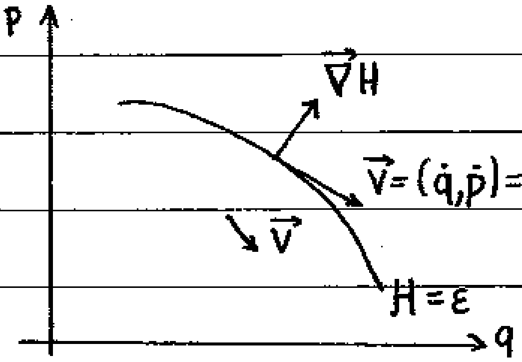
Θεώρημα Liouville



$H(q,p)$: ένα σημείο στο φασικό χώρο προσδιορίζει πλήρως την κατάσταση του συστήματος. Η τροχιά του συστήματος μπορεί να προσδιοριστεί και στο παρελθόν και στο μέλλον.

Επιστρέφουμε στην περίπτωση του χωρίου στον χώρο φάσεων που δίνει την περιοχή αβεβαιότητας του συστήματος.

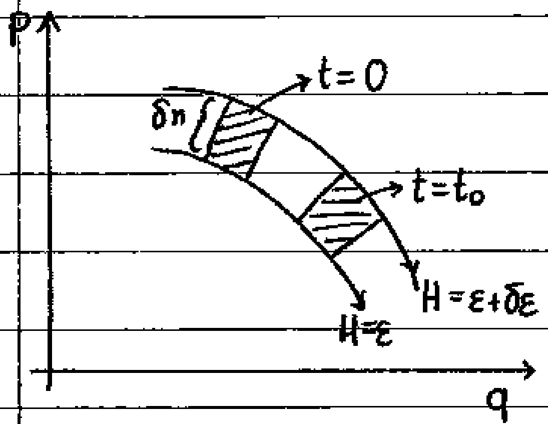
Είδαμε το Θεώρημα του Liouville που λέει ότι για την εξέλιξη του συστήματος ο όγκος αυτού του χωρίου μένει ίδιος.



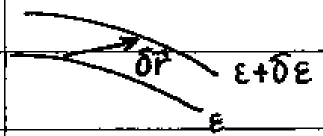
$$\vec{v}=(\dot{q},\dot{p})=\left(\frac{\partial H}{\partial p},-\frac{\partial H}{\partial q}\right)$$

→ Ensemble fluid: "το ρευστό της συλλογής" (έτσι το ονόμασε ο Gibbs)

'Οταν η Hamiltonian δεν έχει εκπεφρασμένη εξάρτηση από το χρόνο, το σύστημα στο χώρο φάσεων κινείται πάνω σε επιφάνεια σταθερού H, όπως αποδείξαμε στην προηγούμενη διάλεξη.



Έστω ότι παίρνω μικρό χωρίο ($\delta\varepsilon$: αρκετά μικρό) που βρίσκεται μεταξύ των επιφανειών σταθερής ενέργειας. Αυτό μετακινείται με το χρόνο. Έχουμε την απόσταση μεταξύ των επιφανειών $H=\varepsilon$, $H=\varepsilon+\delta\varepsilon$.



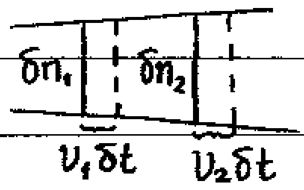
$\vec{\nabla} H\cdot\delta\vec{r} = \delta\varepsilon \Rightarrow \delta\eta = \dfrac{\delta\varepsilon}{|\vec{\nabla} H|}$ όπου

$|\vec{\nabla} H| = |\vec{V}|$, $\vec{V}$: η ταχύτητα στο χώρο των φάσεων

$$\left|\left(\frac{\partial H}{\partial q},\frac{\partial H}{\partial p}\right)\right| = \left|\left(\frac{\partial H}{\partial p},-\frac{\partial H}{\partial q}\right)\right|$$

Επομένως $|\vec{V}|\cdot\delta\eta = \text{σταθ}$ οπότε το "ρευστό" είναι ασυμπίεστο.

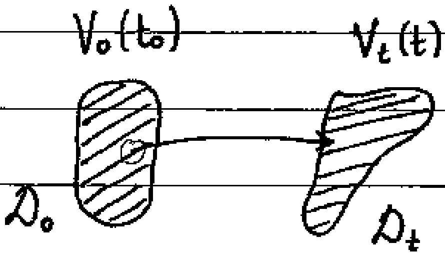
Αυτό μπορούμε να το δούμε από τη ροή σε σωλήνα:



Αν $\delta\eta_1 \upsilon_1 = \delta\eta_2 \upsilon_2$ ο όγκος διατηρείται σταθερός και έχουμε ασυμπίεστη ροή.

Έστω τώρα $H(q_1,\dots,q_n,p_1,\dots,p_n,t)$. Αν πάρω στον φασικό χώρο έναν όγκο $\int dV = \int dq_1\dots dq_n dp_1\dots dp_n = V(t)$

Τότε θα δείξουμε ότι $\frac{d}{dt}V(t) = 0$



Συνεχής απεικόνιση κάθε σημείου του V_0 στον όγκο V_t:
$(q(t), p(t)) = f(q_0, p_0, t)$

Τα σημεία στον D_t αποτελούν μετασχηματισμό $D^t = g^t(D_0)$ των σημείων στον D_0.

1. Άσκηση: Γραμμικός μετασχηματισμός $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ σε δύο διαστάσεις. Μετασχηματίστε μοναδιαίο τετράγωνο στην αρχή των αξόνων και δείξτε ότι η επιφάνεια του νέου σχήματος είναι η ορίζουσα det A.

$\int dx = \int dx\left(\frac{dy}{dx}\right)$ $\quad \frac{dy}{dx} \to$ αλλαγή μήκους, σε n διαστάσεις γενικεύεται στην ορίζουσα του μετασχηματισμού. Ανάλογα στην περίπτωσή μας ολοκληρώνουμε στον αρχικό χώρο λαμβάνοντας υπόψιν την ορίζουσα του μετασχηματισμού:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial q_1(t)}{\partial q_1(0)} & \cdots & \frac{\partial q_1(t)}{\partial p_n(0)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial p_n(t)}{\partial q_1(0)} & \cdots & \frac{\partial p_n(t)}{\partial p_n(0)} \end{vmatrix}$$

Οπότε $V(t)=\int_{\mathcal{D}} J\, dq_1 \dots dp_n$ και τα όρια της ολοκλήρωσης είναι δεδομένα.

$$\frac{dV(t)}{dt} = \int_{\mathcal{D}_0} \frac{dJ}{dt}\, dq_1 \dots dq_n\, dp_1 \dots dp_n$$

Υπολογίζω την Ιακωβιανή στις χρονικές στιγμές t και $t+dt$ για να βρω πώς εξελίσσεται:

$(q_0,p_0) \longrightarrow (q(t),p(t))$ όπου t: η παράμετρος της απεικόνισης. Γνωρίζουμε ότι $J(0)=1$. Έχουμε τώρα

$$q_i(t+\delta t) = q_i(t) + \frac{dq_i}{dt}\delta t + \mathcal{O}(\delta t^2) = q_i(t) + \dot{q}_i \delta t + \mathcal{O}(\delta t^2)$$

$$p_i(t+\delta t) = p_i(t) + \dot{p}_i \delta t + \mathcal{O}(\delta t^2)$$

Από τις εξισώσεις του Hamilton έχουμε

$$\left.\begin{aligned} q_i(t+\delta t) &= q_i(t) + \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta t + \mathcal{O}(\delta t^2) \\ p_i(t+\delta t) &= p_i(t) - \frac{\partial H}{\partial q_i}\delta t + \mathcal{O}(\delta t^2) \end{aligned}\right\}$$

σε πρώτη τάξη ως προς δt είναι γραμμικός ~~μετασχηματισμός~~

$$J(t \to t+\delta t) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial q_1(t+\delta t)}{\partial q_1(t)} & \cdots & \dfrac{\partial q_1(t+\delta t)}{\partial p_n(t)} \\ \vdots & & \end{vmatrix}$$

Πρέπει να υπολογίσω τους όρους της μορφής:

$$\frac{\partial q_i(t+\delta t)}{\partial q_j(t)},\quad \frac{\partial q_i(t+\delta t)}{\partial p_j(t)},\quad \frac{\partial p_i(t+\delta t)}{\partial q_j(t)},\quad \frac{\partial p_i(t+\delta t)}{\partial p_i(t)}$$

$$\frac{\partial q_i(t+\delta t)}{\partial q_j(t)} = \delta_{ij} + \delta t \frac{\partial^2 H}{\partial p_i(t)\,\partial q_j(t)}$$

$$\frac{\partial q_i(t+\delta t)}{\partial p_i(t)} = \delta t \frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial p_i}$$

$$\frac{\partial p_i(t+\delta t)}{\partial q_j(t)} = -\delta t \frac{\partial^2 H}{\partial q_j\, \partial p_i}$$

$$\frac{\partial p_i(t+\delta t)}{\partial p_j(t)} = \delta_{ij} - \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_j}\delta t$$

$$J(t+\delta t) = \begin{vmatrix} 1+\delta t \frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial q_1} & \mathcal{O}(\delta t) & \mathcal{O}(\delta t) & \cdots \\ \mathcal{O}(\delta t) & 1+\delta t\frac{\partial^2 H}{\partial q_2 \partial p_2} & \mathcal{O}(\delta t) & \cdots \\ \vdots & & & \\ \vdots & & 1-\delta t\frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial p_1} & \cdots \\ \mathcal{O}(\delta t) & \cdots & \cdots & 1-\delta t\frac{\partial^2 H}{\partial q_n \partial p_n} \end{vmatrix}$$

Ορίζουσα: οι διαγώνιοι όροι δίνουν μια μονάδα και το άθροισμα των όρων δεύτερης παραγώγου της Χαμιλτονιανής

$J(t+\delta t) = 1 + \delta t \sum (a_{ii} - 1)$ $\quad a_{ii}$: όροι διαγωνίου

$$\det[\mathbb{1} + \varepsilon \mathbb{A}] = 1 + \varepsilon\,\mathrm{trace}(\mathbb{A}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

Όμως οι όροι $\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i}$, $-\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i}$ αλληλοαναιρούνται άρα $J(t \to t+\delta t) = J(t \to t) \Leftrightarrow \frac{dJ}{dt} = 0$

$$\left\{\begin{array}{l|l} p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} & \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} & \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{array}\right\}$$ λαγκραντζιανή-χαμιλτονιανή θεώρηση

<u>π.χ.</u> $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{q}^4 - \frac{1}{2}q^2 \longrightarrow p = 2\dot{q}^3$ και $\dot{p} = -q$

Η ουσία είναι ότι το σύστημα συντεταγμένων είναι τέτοιο ώστε $|\vec{\nabla}H| = |\vec{v}|$, εξαιτίας του οποίου βγαίνουν όλα τα παραπάνω αποτελέσματα.

$J(\delta t) = 1 + 0 \cdot \delta t + \mathcal{O}(\delta t^2)$

$\frac{J(\delta t) - J(0)}{\delta t} = \mathcal{O}(\delta t)$ οπότε η παράγωγος της Jacobianής στο lim για $\delta t \to 0$ βγαίνει ακριβώς μηδέν.

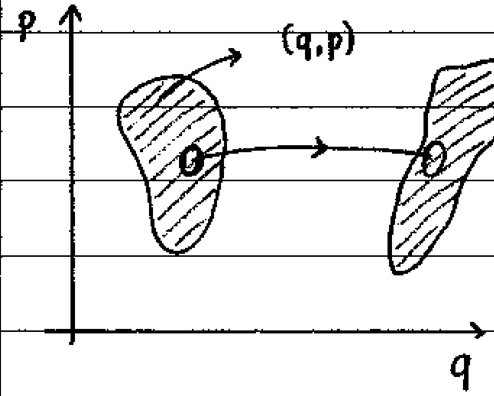
<u>Άσκηση</u>: $\frac{dx}{dt} = \mathbf{A}x$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ και $\mathbf{A}$: κάποιος πίνακας

Τότε ξέρω ότι η λύση είναι $x(t) = e^{\mathbf{A}t}x(0)$,

$e^{\mathbf{A}t} = \mathbb{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2}{2!}t^2 + \ldots$ συγκλίνουσα σειρά, όπου

$\frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}$. ~~Δείξτε ότι η αλλαγή του όγκου στον~~

μετασχηματισμό $x(0) \xrightarrow{e^{At}} x(t)$ είναι $\frac{V(t)}{V(0)} = \det(e^{At}) =$
$= e^{\mathrm{trace}(A)t}$ (μπορούμε να το κάνουμε για 2×2 πίνακα)



Εισάγω συστήματα στον χώρο των φάσεων με διαφορετική πυκνότητα → πυκνότητα καταστάσεων ή πυκνότητα συλλογών ρ.

Μπορώ το ρ να το ερμηνεύσω ως κατανομή πιθανότητας της θέσης του συστήματος ή ως πυκνότητα διαφορετικών συστημάτων

$\int \rho\, dV = N$ (αριθμός συστημάτων) ή $\int f\, dV = 1$

Στην εξέλιξη ενός όγκου ο οποίος περιέχει αριθμό συστημάτων N, ξέρουμε ότι το dV παραμένει σταθερό όπως και ο αριθμός συστημάτων στον όγκο αυτόν, οπότε κατά την κίνηση στον φασικό χώρο η πυκνότητα καταστάσεων παραμένει σταθερή. Αυτή είναι άλλη μια έκφραση του θεωρήματος Liouville.

Έχουμε $\rho = \rho(q,p)$. Υπολογίζουμε τη χρονική εξέλιξη του ρ ακολουθώντας την κίνηση.

$(q,p) \longrightarrow (q + \dot{q}\delta t,\ p + \dot{p}\delta t)$

$$\rho(q,p) \longrightarrow \rho(q+\dot{q}\delta t,\ p+\dot{p}\delta t)$$

$$\rho(q_i+\dot{q}_i\delta t,\ p_i+\dot{p}_i\delta t) = \rho(q_i,p_i) + \dot{q}_i\frac{\partial \rho}{\partial q_i}\delta t + \dot{p}_i\frac{\partial \rho}{\partial p_i}\delta t + \mathcal{O}(\delta t^2)$$

$= \rho(q_i,p_i)$ το οποίο σημαίνει ότι

$$\lim_{\delta t\to 0}\frac{\rho(q_{t+\delta t},p_{t+\delta t})-\rho(q_t,p_t)}{\delta t} = \dot{q}_i\frac{\partial \rho}{\partial q_i}+\dot{p}_i\frac{\partial \rho}{\partial p_i} =$$

$$= \vec{V}\cdot\vec{\nabla}\rho = 0$$

Θεώρημα του Poincaré

Χαμιλτονιανό σύστημα $H(q,p)$ σε πεπερασμένο χώρο Ω: το σύστημα εξελισσόμενο θα επιστρέψει σε οσοδήποτε μικρό όγκο διάστασης ε γύρω από το αρχικό σημείο, όσες φορές θέλουμε (για οσοδήποτε μικρό ε!).