Τρίτη 31/1/06

- Ευστάθεια

υγρό που χαρακτηρίζεται από $\bar{\varrho}, \bar{\vec{v}}, \bar{p}$

έστω χρονοανεξάρτητος : τότε

$$\bar{\vec{v}}\cdot\nabla\bar{\vec{v}} = -\nabla\bar{p} + \vec{F} \;\left(\text{όχι ιξώδες}\right) \;+\nu\nabla^2\bar{\vec{v}} \;\left(\text{με ιξώδες}\right)$$

$$\nabla\cdot\bar{\vec{v}} = 0$$

$$\bar{\vec{v}}\cdot\nabla\bar{\varrho} = 0$$

συνορ. συνθήκες

Γνωρίζοντας τη μέση κατάσταση (ισορροπία) [συνήθως το δύσκολο πρόβλημα] μπορούμε να μελετήσουμε την εξέλιξη των διαταραχών [εύκολο, λόγω γραμμικότητας των εξισώσεων]

$$\varrho\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \vec{u}\cdot\nabla\vec{u}\right) = -\nabla p - \varrho\vec{g} \quad (\text{έστω σε ομογ. βαρ. πεδίο})$$

$$\vec{u} = \vec{V}(\vec{x}) + \vec{u}'$$

$$\varrho = \bar{\varrho} + \varrho'$$

$$p = \bar{p} + p'$$

$$(\bar{\varrho}+\varrho')\left(\frac{\partial\vec{u}'}{\partial t} + (\vec{V}+\vec{u}')\cdot\nabla(\vec{V}+\vec{u}')\right) = -\cancel{\nabla\bar{p}} - \nabla p' - (\cancel{\bar{\varrho}}+\varrho')\vec{g}$$

$$\Rightarrow (\bar{\varrho}+\varrho')\left(\frac{\partial\vec{u}'}{\partial t} + \vec{V}\cdot\nabla\vec{u}' + \vec{u}'\cdot\nabla\vec{V} + \vec{u}'\cdot\nabla\vec{u}'\right) + \varrho'\,\vec{V}\cdot\nabla\vec{V} = -\nabla p' - \varrho'\vec{g}$$

$$\xrightarrow[\text{τους 2ης τάξης}]{\text{αγνοώντας}} \quad \bar{\varrho}\left(\frac{\partial\vec{u}'}{\partial t} + \vec{V}\cdot\nabla\vec{u}' + \vec{u}'\cdot\nabla\vec{V}\right) + \varrho'\,\vec{V}\cdot\nabla\vec{V} = -\nabla p' - \varrho'\vec{g} \qquad (1)$$

(+) $\nabla\cdot\vec{u}'=0$ (ασυμπίεστο) (2)

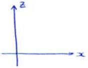
(+) $\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}+\rho')+(\vec{v}+\vec{u}')\cdot\nabla(\bar{\rho}+\rho')=0$ (εξ. συνέχεια)

$$\overset{\text{αγνοώ}}{\underset{\text{τους 2ης τάξης}}{\Rightarrow}} \frac{\partial\rho'}{\partial t}+\vec{v}\cdot\nabla\rho'+\vec{u}'\cdot\nabla\bar{\rho}=0 \qquad (3)$$

$$(1,2,3)\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\vec{u}'\\ \rho'\end{pmatrix}=i\underset{\substack{\uparrow\\ \text{γρ. τελεστής}}}{\mathbb{A}}\begin{pmatrix}\vec{u}'\\ \rho'\end{pmatrix}$$

όπως στην κβαντο. $i\frac{\partial\psi}{\partial t}=H\psi$, $H \parallel \mathbb{A}$ μόνο που ο $\mathbb{A}$ δεν είναι ερμιτιανός!

• Προβλήματα σε 2D




Έστω $\bar{\rho}(z)$, $\bar{p}(z)$, $\vec{V}(z) \parallel \hat{x}$

αφού $\vec{V}\parallel\hat{x}$

$\Rightarrow \vec{V}\cdot\vec{\nabla}\vec{V}=0$

x-συνιστώσα της (1), $\vec{u}'=(u,w)$: $\bar{\rho}\left(\frac{\partial u}{\partial t}+V(z)\frac{\partial u}{\partial x}+wV'(z)\right)=-\frac{\partial p'}{\partial x}$ (A)

z-συνιστώσα της (1): $\bar{\rho}\left(\frac{\partial w}{\partial t}+V(z)\frac{\partial w}{\partial x}\right)=-\frac{\partial p'}{\partial z}-\rho' g$ (B)

(3) $\frac{\partial\rho'}{\partial t}+V\frac{\partial\rho'}{\partial x}+w\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial z}=0$ (Γ)

(2) $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$ (Δ)

Με ανάλυση Fourier

$$u(x,z,t) = \int \hat{u}_k(z,t) e^{ikx} dk.$$

Θεωρώ λύσεις της μορφής $u(x,z,t) = u(z,t)e^{ikx}$

επιπλέον υποθέτω $= \hat{u}_{k,\omega}(z) e^{i(kx-\omega t)}$

όμοια και $w(x,z,t) = \hat{w}_{k\omega}(z) e^{i(kx-\omega t)}$

$\rho'(x,z,t) = \hat{\rho}_{k,\omega}(z) e^{i(kx-\omega t)}$

$\omega = kc : e^{ik(x-ct)}$

$(\Delta) \Rightarrow ik\hat{u} + \hat{w}' = 0 \quad (\alpha)$

$\frac{\partial}{\partial t} + V\frac{\partial}{\partial x} = ik(V-c)$

$(\Gamma) \Rightarrow ik(V-c)\hat{\rho} = -w\bar{\rho}' \quad (\beta)$

$(A) \Rightarrow ik(V-c)\bar{\rho}\hat{u} + \bar{\rho}\hat{w}V' = -ik\hat{p} \quad (\gamma)$

$(B) \Rightarrow ik(V-c)\bar{\rho}\hat{w} = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial z} - \hat{\rho}g \quad (\delta)$

+ συνορ. συνθήκες

Ψάχνουμε τη συνάρτηση $c(k)$ και $\hat{w}, \hat{u}, \hat{\rho}, \hat{p}$

$(\delta) \times ik(V-c)$

$$-\bar{\rho}k^2(V-c)^2\hat{w} = -ik(V-c)\frac{\partial \hat{p}}{\partial z} + w\bar{\rho}'g$$

$$-ik\frac{\partial \hat{p}}{\partial z} = -\bar{\rho}k^2(V-c)\hat{w} - \frac{w\bar{\rho}'g}{V-c} \quad (\varepsilon)$$

$\frac{\partial}{\partial z}(\gamma)$ :

$$-ik\frac{\partial \hat{p}}{\partial z} = \frac{d}{dz}\left(-\bar{\varrho}(v-c)\frac{d\hat{w}}{dz} + \bar{\varrho}u'\hat{w}\right) \quad (\zeta)$$

από (α)

$$(\varepsilon,\zeta): \quad \frac{d}{dz}\left(-\bar{\varrho}(v-c)\frac{d\hat{w}}{dz} + \bar{\varrho}u'\hat{w}\right) + \bar{\varrho}\left(k^2(v-c)^2 + \frac{\bar{\varrho}'}{\bar{\varrho}}g\right)\frac{\hat{w}}{v-c} = 0 \quad (\eta)$$

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\hat{w}}{v-c}\right) = \frac{1}{v-c}\frac{d\hat{w}}{dz} - \frac{\hat{w}}{(v-c)^2}u'$$

$$(v-c)^2\frac{d}{dz}\left(\frac{\hat{w}}{v-c}\right) = (v-c)\frac{d\hat{w}}{dz} - \hat{w}u'$$

$$(\eta): \quad \frac{d}{dz}\left(\bar{\varrho}(v-c)^2\frac{d}{dz}\left(\frac{\hat{w}}{v-c}\right)\right) - \bar{\varrho}\left(k^2(v-c)^2 + \frac{\bar{\varrho}'}{\bar{\varrho}}g\right)\left(\frac{\hat{w}}{v-c}\right) = 0 \quad (*)$$

+ συνορ. συνθήκες.

Θέτουμε: $\psi = \frac{\hat{w}(z)}{v-c}$ και αναλύουμε τη διαφ. εξίσωση

το $\psi$ μετράει τη μετακίνηση στον $z$-άξονα

Παράδειγμα: $\varrho_a$ ατμόσφαιρα, $\varrho_w$ νερό.

$$\left.\begin{aligned} u &= 0 \\ \bar{\varrho} &= \varrho_w + \Theta(z)(\varrho_a - \varrho_w) \\ \frac{d\bar{p}}{dz} &= -\bar{\varrho}g \end{aligned}\right\} \text{ η μέση κατάσταση}$$

$$\bar{\rho}' = (\rho_a - \rho_w)\,\delta(z)$$

$(*)$ : $z>0 \quad \rho = \rho_\alpha$

$$\rho_\alpha \frac{c^2}{c} \frac{d^2}{dz^2}\hat{w} - \rho_\alpha k^2 c^2 \frac{\hat{w}}{-c} = 0$$

$$\hat{w}'' + k^2 \hat{w} = 0$$

όμοια και για

$z<0 \qquad \hat{w}'' + k^2 \hat{w} = 0.$

στο $z=0$ $$\int_{0^-}^{0^+} dz \frac{d}{dz}\left(\bar{\rho}(v-c)^2 \frac{d}{dz}\frac{\hat{w}}{v-c}\right) = \int_{0^-}^{0^+} dz\; \bar{\rho} k^2 \cancel{(v-c)^2} \frac{\hat{w}}{v-c} \rightarrow 0$$

$$+ \int_{0^-}^{0^+} dz\; \bar{\rho}' g \frac{\hat{w}}{v-c}$$

$\hat{w}/_{v-c}$ είναι συνεχής στο $0$ (αφού $\psi$ η μετατόπιση της επιφάνειας της διαχωριστικής)

$$\rho_a \frac{c^2}{-c} \frac{d\hat{w}^+}{dz} + \rho_w c \frac{d\hat{w}}{dz} = (\rho_a - \rho_w)\, g\left(\frac{\hat{w}}{-c}\right)$$

(εκφράζει συνέχεια πίεσης)

όμως από επάνω και από κάτω

$\hat{w} = \hat{w}_0 e^{-k|z|}$ (λόγω συνέχειας)

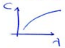
$$\Rightarrow \rho_a c^2 k + \rho_w c^2 k = (\rho_a - \rho_w)\, g$$

$$k = \frac{\rho_w - \rho_a}{\rho_w + \rho_a} \frac{g}{c^2}$$

$C \in \mathbb{R}$

$$\hat{W}_k = A\, e^{-k|z|}\, e^{ik\left(x \pm \sqrt{\frac{g}{k}}\sqrt{\frac{\rho_w-\rho_a}{\rho_w+\rho_a}}\right)}$$

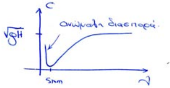
$$\omega = ck \propto \sqrt{gk}$$ (ονομάζεται κανονική διασπορά) όπως το φως σε υλικά.



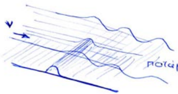

Ταχύτητα ομάδων $C_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2}c$

Για μεγάλα λ παίζει ρόλο το βάθος

Για μικρά λ " " η επιφ. τάση




Στα μικρά λ $C_g = \frac{3}{2}c$




για να είναι στάσιμο το κύμα ...