Για πολικές συν/νες $(x_1, x_2) \xrightarrow{J} (r, \theta)$

$\det J = \frac{1}{r}$, $\det J^{-1} = r$

$\boxed{25.10.2005}$

Sommerfeld: Mechanics of deformable media
Landau: Fluid mechanics

Παράγγειλε Landau: Mechanics + Fluid Mech στα Γερμανικά

$m\ddot{\vec{x}} = -\vec{\nabla} V$ (1) καρτεσιανά κ' αδρανειακά συστήματα.

$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m |\dot{\vec{x}}|^2 - V(\vec{x}, t)$

ισοδυνάμως με (1): $\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0}$ (2)

$(x_i) \longrightarrow (q_i)$ σε οποιονδήποτε μτσχ. οι εξ. (2) είναι αναλλοίωτες. Δηλ. αν ισχύουν σε ένα σύστημα, θα ισχύουν και στο καινούριο σύστημα, όπου η $\mathcal{L}$ θα είναι τώρα συνάρτηση των $q_i, \dot{q}_i, t$ (θυμήσου $\dot{x}_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t}$)

δηλ. αποδείχθη ότι $\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0}$

Αυτός ο απλός μαθηματικός νόμος πρέπει να έχει μια βαθύτερη σημασία.

Κεντρικό πεδίο δυνάμεων σε 2-dim: έχω δυναμικό

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right) - V\left(x_1^2 + x_2^2\right)$$

$$\Longrightarrow \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2\right) - V(r)$$

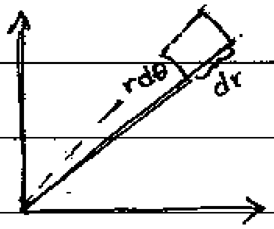
με τον μετασχηματισμό $x_1 = r\cos\theta$, $x_2 = r\sin\theta$

Το τέχνασμα του Landau είναι το εξής: ο πρώτος όρος της $\mathcal{L}$ δεν είναι παρά το τετράγωνο της ταχύτητας $v^2 = \frac{(ds)^2}{dt^2}$ όπου πρέπει μόνον να

γνωρίζουμε το μήκος τόξου $(ds)^2 = (dx_1)^2 + (dx_2)^2$

ή $(ds)^2 = (dr)^2 + r^2 (d\theta)^2$ σε πολικές συντεταγμένες.

Οπότε $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2$



$$\left.\begin{aligned} p_r &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \\ p_\theta &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta} \end{aligned}\right\} \text{γενικευμένες ορμές.}$$

Γενικευμένες δυνάμεις: $\frac{\partial}{\partial r}$, $\frac{\partial}{\partial \theta}$

οπότε έχουμε από τις εξισώσεις Euler-Lagrange:

$$\boxed{\frac{d}{dt}(m\dot{r}) - \left(m r \dot{\theta}^2 - \frac{\partial V}{\partial r}\right) = 0}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(m r^2 \dot{\theta}\right)^2 = 0}$$ διατήρηση της στροφορμής (2ος Νόμος Kepler!)

Για κάθε φυσικό πρόβλημα υπάρχει μια λαγκρανζιανή συνάρτηση $\mathcal{L}$ όπου στη Νευτώνεια μηχανική

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m |\vec{v}|^2 - V$$

1) γιατί να έχει ακριβώς αυτή τη μορφή;

2) τι ρόλο παίζει η σταθερά m;

και οι νόμοι της φύσης παίρνουν τη μορφή

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$$

όπου $q_i = q_i(\vec{x}, t)$, $i = 1, 2, 3$.

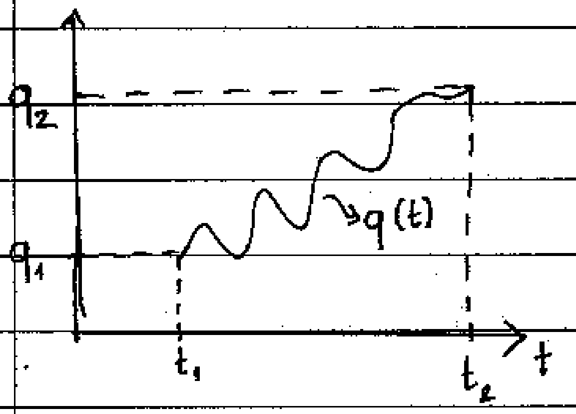
Αν οι νόμοι της φύσης παράγονται από εξισώσεις αυτής της μορφής, τότε θα πρέπει για την μελέτη ενός νέου φυσικού φαινομένου πρέπει να εισάγουμε και την αντίστοιχη λαγκρανζιανή. Υπάρχει πάντα μια λαγκρανζιανή για κάθε φυσικό φαινόμενο.

Αριστοτέλειος νόμος δύναμης: $\vec{F} = K\vec{v}$. Αυτός ο νόμος για θεμελιακούς λόγους δεν ισχύει.

Πώς λοιπόν κατασκευάζονται οι λαγκρανζιανές;
Ουσιαστικά αποτυπώνουν όλες τις συμμετρίες του σύμπαντος.

Πρόβλημα 1: Ποια λαγκρανζιανή μπορεί να βγάλει τον νόμο του Αριστοτέλη; (υπάρχει) και τι παρατηρήσεις μπορούν να γίνουν για τις παραγόμενες εξισώσεις;

Έχω μια διαδρομή μεταξύ των σημείων (q_1, t_1) και (q_2, t_2).



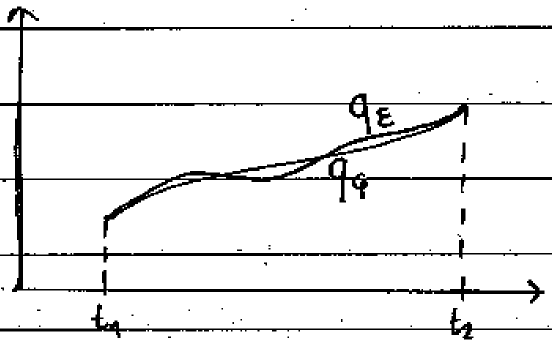
Εάν βρω τη διαδρομή $q(t)$ που καθιστά τη δράση

$$S(q(t)) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q,\dot{q},t)\,dt$$

στάσιμη, αυτή θα είναι η φυσική διαδρομή.

Η δράση είναι συναρτησοειδές, δηλ. δεν εξαρτάται από μεταβλητές αρά από τη διαδρομή.

Αρχή του Hamilton: η φυσική τροχιά από τη θέση (q_1, t_1) στη θέση (q_2, t_2) είναι αυτή που καθιστά τη δράση στάσιμη.



Έστω q_ϕ η φυσική τροχιά. Ορίζω μία παραπλήσια

$$q_\varepsilon = q_\phi + \varepsilon\eta(t)$$

Η η είναι οποιαδήποτε παραγωγίσιμη συνάρτηση με την προϋπόθεση ότι $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$ γιατί η διαδρομή φυσικά κρατά τα ίδια αρχικά και τελικά σημεία. Αν η δράση καθίσταται στάσιμη για q_ϕ τότε πρέπει:

$$S[q_\varepsilon] - S[q_\phi] = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

συνθήκη στασιμοποίησης

ή $\dfrac{\partial S}{\partial \varepsilon} = 0.$

Στάσιμο σημείο → δεν υπάρχει μεταβολή σε πρώτη τάξη ως προς ε. Αν λοιπόν για κάθε συνάρτηση $\eta(t)$ με $\eta(t_1)=\eta(t_2)=0$ η q_ϕ είναι αυτή που καθιστά τη δράση στάσιμη, έχουμε βεβαιώσει τον ισχυρισμό μας.

$$S[q_\phi+\varepsilon\eta] = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}[q_\phi+\varepsilon\eta, \dot{q}_\phi+\varepsilon\dot{\eta}, t]\,dt$$

Συγκρίνω αυτήν με τη δράση στη φυσική τροχιά:

$$S_\phi(q_\phi) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_\phi, \dot{q}_\phi, t)\,dt$$

Αναπτύσσω κατά Taylor και αφαιρώ:

$$\mathcal{L}[q_\phi+\varepsilon\eta, \dot{q}_\phi+\varepsilon\dot{\eta}, t] = \mathcal{L}(q_\phi, \dot{q}_\phi, t) + \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}\right|_{q=q_\phi(t)} \varepsilon\eta + \left.\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right|_{\dot{q}=\dot{q}_\phi(t)} \varepsilon\dot{\eta}$$

$+\mathcal{O}(\varepsilon^2)$

q ίσο με το q_ϕ υπολογισμένο κάθε χρονική στιγμή (μαθηματικά ορθός τρόπος)

οπότε $$\mathcal{L}[q_\phi+\varepsilon\eta] - \mathcal{L}[q_\phi] = \varepsilon\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}\eta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\dot{\eta}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

οπότε $$S[q_\phi+\varepsilon\eta] - S[q_\phi] = \varepsilon\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}\eta_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\dot{\eta}_i\right)dt + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

Για να είναι αυτή η διαφορά $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ πρέπει για κάθε συνάρτηση η το ολοκλήρωμα να μηδενίζεται.

Γράφουμε:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\dot{\eta}_i dt = \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\eta_i\right) dt}_{=0 \text{ επειδή } \eta(t_1)=\eta(t_2)=0} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\right)\eta_i dt$$

οπότε $\dfrac{\partial S}{\partial \varepsilon} = \displaystyle\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right)\right]\eta_i(t)\,dt = 0$

για κάθε συνεχή κ' παραγωγίσιμη συνάρτηση $\eta(t)$.
Αυτό συνεπάγεται ότι η φυσική τροχιά πρέπει να υπακούει στην εξίσωση:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0}$$

Αυτό ισχύει επειδή αν $\int_{t_1}^{t_2} F(t)\eta(t) = 0$ για οποιαδήποτε συνάρτηση $\eta(t)$, τότε $F(t)=0$. Π.χ. αν θεωρήσουμε τον χώρο των συναρτήσεων τότε το $\int F(t)\eta(t)$ είναι εσωτερικό γινόμενο. Οπότε το μόνο διάνυσμα που είναι κάθετο σε οποιοδήποτε $\eta(t)$ είναι το μηδενοδιάνυσμα: $F(t)=0$.

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}\,dt$$

Πρόβλημα 2: Διατυπώστε την αρχή του Hamilton και γράψτε τις εξισώσεις που πρέπει να ικανοποιούνται αν η λαγκρανζιανή πρέπει να είναι συνάρτηση και της επιτάχυνσης: $\mathcal{L}(q,\dot{q},\ddot{q})$

Αλλάζω συντεταγμένες με έναν αντιστρέψιμο μετασχηματισμό: $q_i \longrightarrow Q_i(q,t)$

ομοίως $q_i = q_i(Q,t)$ και $\dot{q}_i = \frac{\partial q_i}{\partial Q_j}\dot{Q}_j + \frac{\partial q_i}{\partial t}$

η $\mathcal{L}(q_i,\dot{q}_i,t) = \tilde{\mathcal{L}}(Q,\dot{Q},t)$ παίρνει ακριβώς τις ίδιες τιμές στα αντίστοιχα σημεία. Έστω λοιπόν η φυσική τροχιά στον χώρο των q. Η τροχιά στον χώρο των Q θα έχει διαφορετική μορφή, ωστόσο η Q_ϕ που αντιστοιχεί στην q_ϕ καθιστά τη δράση στάσιμη:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_\phi,\dot{q}_\phi,t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \tilde{\mathcal{L}}(Q_\phi,\dot{Q}_\phi,t)\,dt \rightarrow \text{στάσιμη}$$

Επομένως η τροχιά Q_ϕ πρέπει να ικανοποιεί τις εξισώσεις Euler-Lagrange:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{Q}}\right) - \frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial Q} = 0}$$

Λόγω της διατύπωσης του νόμου λοιπόν οι εξισώσεις Euler-Lagrange έχουν την ίδια μορφή.

Συμπεράσματα

1) Δεν έχει σημασία αν πάρω τη $\mathcal{L}$ ή τη $\mathcal{L}$ πολλαπλασιασμένη με μια σταθερά. Οι εξισώσεις Euler-Lagrange ικανοποιούνται ούτως ή άλλως.

2) Η $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} + \frac{d}{dt} f(q,t)$ αντιστοιχεί στην ίδια ακριβώς φυσική τροχιά με την $\mathcal{L}$.

Πρόβλημα 3: αποδείξτε την ιδιότητα (2) χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Euler-Lagrange

Ουσιαστικά η δράση S_1 είναι ίση με τη δράση S συν μία σταθερά:

$$S_1 = \int \mathcal{L}_1 dt = \int \mathcal{L} dt + \underbrace{\int \frac{d}{dt} f(q,t)\, dt}_{\text{μία σταθερά}}$$

→ άρα $S_1 = S + ct$ οπότε η φυσική διαδρομή που στασιμοποιεί την S, στασιμοποιεί και την S_1. Αυτός ο μετασχηματισμός ονομάζεται μετασχηματισμός βαθμονόμησης.