Τρίτη 20/12

- Συζήτηση για εξιδανικεύσεις των N.S.

(α) ν: ιξώδες $\simeq 0$ πότε ισχύει, συμπεράσματα

(β) $\nu \gg 1$ $\quad \nu \nabla^2 u - \vec{\nabla} \frac{p}{\rho} \cong 0$ ← αδραν. δυνάμεις αμελητέες

$\nabla \cdot \vec{u} = 0$ (ασυμπίεστο)

↓

χρονοανεξάρτητη λύσεις

- διατήρηση μάζας

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \qquad \vec{j} = \rho \vec{u}$$

- εξίσωση ορμής

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} u_i = + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\rho u_\alpha u_i) - \cancelto{0}{\left(u_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(\rho u_\alpha) \right)} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i$$

συνέχεια

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \underbrace{\left(\rho u_\alpha u_i - \sigma_{i\alpha} \right)} = \rho f_i$$

$$\pi_{i\alpha} = \rho u_i u_\alpha + p \delta_{i\alpha} - 2\mu e_{i\alpha}$$

- εξίσωση ενέργειας

ροή θερμότητας

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{|u|^2}{2} + e \right) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\sigma_{ij} u_j) - \frac{\partial K_i}{\partial x_i}$$

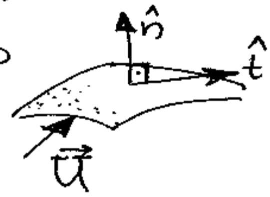
$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{|u|^2}{2} + e \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\rho u_j \left(\frac{|u|^2}{2} + e \right) - u_i \sigma_{ij} + K_j \right] = 0$$

$$K_j = -k \frac{\partial T}{\partial x_j}$$

• Συνοριακές συνθήκες

(1) Επαφή ρευστού με στερεό

στο σύνορο



$u_i n_i = U_i n_i$ ← στα ιδανικά ρευστά μόνο αυτή

$u_i t_i = U_i t_i$

(2) ρευστό – ρευστό

$$[\sigma_{ij} n_i n_j]_+^- = 0$$

$$[\sigma_{ij} n_i t_j]_+^- = 0$$

• Προσέγγιση Euler ($\nu \simeq 0$)

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \underbrace{(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}}_{\vec{\omega}\times\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{\nabla}|u|^2} = -\frac{\vec{\nabla}p}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{u}$$

$$\vec{\omega} \equiv \vec{\nabla}\times\vec{u}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{\omega}\times\vec{u} = -\frac{\vec{\nabla}p}{\rho} - \vec{\nabla}\frac{|u|^2}{2} + \nu \nabla^2 \vec{u}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{\omega} + \vec{\nabla}\times(\vec{\omega}\times\vec{u}) = -\frac{1}{\rho^2}(\vec{\nabla}\rho)\times(\vec{\nabla}p) + 0 + \vec{\nabla}\times(\nu\nabla^2\vec{u})$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\omega}\times\vec{u}) = \left[(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{\omega} - \vec{u}\,(\cancel{\vec{\nabla}\cdot\vec{\omega}})_{\to 0} + \vec{\omega}\,(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}) - (\vec{\omega}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} \right]$$

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{\omega} + \vec{\omega}\,(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}) - (\vec{\omega}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} = -\frac{1}{\rho^2}(\nabla\rho)\times(\nabla p) + \vec{\nabla}\times(\nu\nabla^2\vec{u})$$

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\vec{\omega} - \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}\vec{\omega}} = (\vec{\omega}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} - \frac{1}{\rho^2}(\vec{\nabla}\rho)\times(\vec{\nabla}p) + \vec{\nabla}\times(\nu\nabla^2\vec{u})$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{\omega}}{\rho}\right) = \left(\frac{\vec{\omega}}{\rho}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{u} - \frac{1}{\rho^3}\vec{\nabla}\rho\times\vec{\nabla}p + \frac{\vec{\nabla}\times}{\rho}(\nu\nabla^2\vec{u})$$

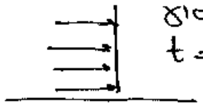
αν $\nabla\rho \parallel \nabla p$ που ισχύει αν $p(\rho)$ βαροτροπικό υγρό
π.χ. υπό σταθερή
θερμοκρασία

όμως $\vec{\nabla}\rho\times\vec{\nabla}p$ σημαντικός όρος σε ατμοσφαιρικά ρευστά

αν $\rho =$ σταθερό

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = (\vec{\omega}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} + \nu\nabla^2\vec{\omega}$$ εξίσωση διάχυσης

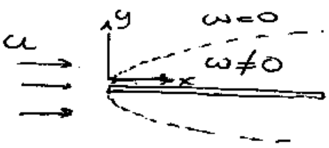
π.χ. άνεμος πάνω από επίπεδο



για $t=0$ $\quad \omega = \delta(z)$ αφού $u(z) = u\,\Theta(z)$

σιγά-σιγά 

Το ιξώδες διαχέει τον στροβιλισμό.

για παράδειγμα 

σταθερή πλάκα

$y = \sqrt{\frac{\nu x}{\upsilon}}$ διαχωρ. περιοχή

• Ιδανικό ρευστό $\nu = 0$, $p(\rho)$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{\omega}}{\rho}\right) = \left(\frac{\vec{\omega}}{\rho}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{u}$$

$$\frac{d\,\delta\vec{l}}{dt} = \left(\delta\vec{l}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{u}$$ εξ. κίνησης τμήματος ρευστού

Έστω μικρό τμήμα καμπύλης

$\vec{x}(\sigma, t)$

$\uparrow$

παράμετρος
κατά μήκος
τη καμπύλη

$$\vec{x}(\sigma, 0) = \vec{x}_0(\sigma)$$

Έστω μικρο τμήμα $\delta\vec{l} = \varepsilon \dfrac{\partial \vec{x}}{\partial \sigma}$

$$\frac{d}{dt}\delta\vec{l} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial t}\right)_{\sigma}$$

$$= \varepsilon \frac{\partial}{\partial \sigma}\, \vec{u}\left(\vec{x}(\sigma,t), t\right)$$

$$= \varepsilon \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial \sigma} = \delta l_i \frac{\partial}{\partial x_i} u_i$$

Έτσι αν $\delta\vec{l} \parallel \dfrac{\vec{\omega}}{\rho}$ $\quad \vec{\omega} = \rho\lambda\,\delta\vec{l}$

τα $\delta\vec{l}$ και $\dfrac{\vec{\omega}}{\rho}$ θα εξελίσσονταν με τον
ίδιο τρόπο

Έστω καμπύλη παράλληλη με το τοπικό $\vec{\omega}$

$$\frac{dx}{\omega_x}=\frac{dy}{\omega_y}=\frac{dz}{\omega_z} \quad \text{(vortex line — γραμμή στροβιλισμού)}$$

$$\frac{\text{vortex line}}{\rho} \xrightarrow{t} \frac{\text{vortex line}}{\rho} \quad \text{(1ο θεώρημα Helmholtz)}$$

• αν αρχικά $\vec{\omega}=0$ θα είναι πάντα $\vec{\omega}=0$

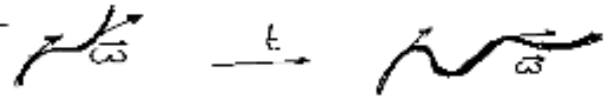
πολ/σιάζω με $\vec{\omega}$ την εξίσωση του $\vec{\omega}$

$$\lambda_{min}|\omega|^2 \le \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\frac{\omega^2}{\rho} = \omega_i\omega_\alpha \partial_\alpha u_i = \omega_i\omega_\alpha e_{i\alpha} \le \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ιδιότητα} \\ \text{του } e}}{\lambda_{max}} |\omega|^2$$

$$\frac{\omega^2}{\rho} \le \frac{|\omega_0|^2}{\rho} e^{\lambda_{max} t} = 0$$

• Συνολικά

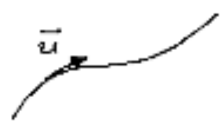
− $\omega=0$ για $t=0 \Rightarrow \omega=0 \;\; \forall t$

− 

− $$\frac{|\vec{\omega}/\rho|}{|\vec{\omega}_0/\rho_0|} = \frac{\delta l(t)}{\delta l_0}$$

• Γραμμή ροής (ρευματογραμμή)

$$\frac{dx}{u_x}=\frac{dy}{u_y}=\frac{dz}{u_z}$$



αν $\vec{u}(\vec{x}) \Rightarrow$ ένα σωματίδιο θα κινηθεί σε ρευματογραμμή

Αν $\omega = 0$ $\Rightarrow$ δεν υπάρχει κλειστή γραμμή ροής

αν υπήρχε $\oint \vec{u} \cdot d\vec{\ell} = \int u^2 dt > 0$

$$\oint \vec{u} \cdot d\vec{\ell} = \int (\underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{u}}_{\vec{\omega}}) \cdot d\vec{S} = 0$$ άτοπο

- σε 2-D ροή

$\vec{u}(x, y, t)$ $\quad \vec{\omega} \perp (xy) \Rightarrow \vec{\omega} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} = 0 \Rightarrow \vec{\omega} =$ σταθερό

$$\Rightarrow \partial_z u_y = \partial_z u_x = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\omega}{dt} = 0$$