Ασκήσεις Μηχανικής Μεταπτυχιακού 2010

Π. Ιωάννου & Θ. Αποστολάτος

α) Το δυναμικό στο καρτεσιανό επίπεδο με συντεταγμένες $x = (x_1, x_2)$ είναι: $\tilde{V}(x_1, x_2)$. Το ίδιο δυναμικό σε πολικές συντεταγμένες (r, θ) όπου $x_1 = r\cos\theta$, $x_2 = r\sin\theta$ είναι μία νεα συνάρτηση που ικανοποιεί τη σχέση: $V(r,\theta) = \tilde{V}(x)$.

1. Κάνοντας χρήση του κανόνα της αλυσίδας δείξτε:

$$\left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \tilde{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial \theta}$$

2. Πως συνδέονται τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{e}_1$ και $\vec{e}_2$ του καρτεσιανού επιπέδου με το μοναδιαίο ακτινικό διάνυσμα $\vec{n}$ και μοναδιαίο γωνιακό διάνυσμα $\vec{l}$;

3. Η δύναμη σε καρτεσιανές συνυεταγμένες έχει συνιστώσες $\tilde{F}_1 = -\partial\tilde{V}/\partial x_1$ και $\tilde{F}_2 = -\partial\tilde{V}/\partial x_2$ έτσι ώστε $\vec{\tilde{F}} = \tilde{F}_1 \vec{e_1} + \tilde{F}_2 \vec{e_2}$. Συσχετίστε αυτές τις συνιστώσες με τις συνιστώσες της δύναμης $\vec{F} = F_r \vec{n} + F_\theta \vec{l}$ σε πολικές συντεταγμένες.

4. Ποία η σχέση της ροπής $\vec{r} \times \vec{F}$ με την F_θ.

5. Η γωνιακή συνιστώσα της εξίσωσης του Lagrange είναι $\dot{p}_\theta = \partial L/\partial\theta$. Ποία η σχέση μεταξύ $\partial L/\partial\theta$ και F_θ;

β) Δίδεται η συνάρτηση της E:

$$I(E) = \int_{a(E)}^{b(E)} f(x, E) dx \; .$$

Δείξτε ότι:

$$\frac{dI}{dE} = \int_{a(E)}^{b(E)} \frac{\partial f(x,E)}{\partial E} dx + \frac{db(E)}{dE} f(b(E), E) - \frac{da(E)}{dE} f(a(E), E) \; .$$

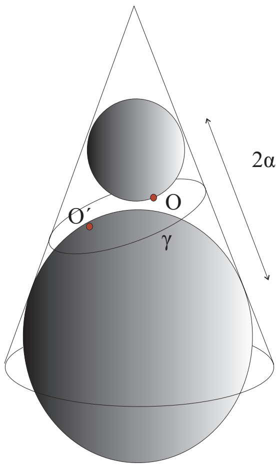
γ) Θεωρήστε μονοδιάστατη κίνηση σωματιδίου μάζας m στο δυναμικό $V(x) = ax^{2n}$ με $a > 0$. Δείξτε ότι η περίοδος εξαρτάται απο την ενέργεια του σωματιδίου, E, με τον εξής νόμο:

$$T(E) = f(n, a, m) E^{\frac{1}{2n} - \frac{1}{2}}$$

όπου $f(n, a, m)$ κάποια συνάρτηση. Προσδιορίστε την εξάρτηση της περιόδου στο όριο $n \to \infty$. Σε τι φυσικό σύστημα αναφέρεται αυτό το όριο;

δ) Θεωρήστε κίνηση σωματιδίου στο κεντρικό δυναμικό: $V(r) = 0$ όταν $r > a$ και $V(r) = \infty$ όταν $r < a$. Από τη διατήρηση στροφορμής και ενέργειας προσδιορίστε τη ταχύτητα και γωνία ανάκλασης ενός σωματιδίου που προσπίπτει στη σφαίρα. Δείξτε ότι η διαφορική διατομή σκέδασης είναι ισοτροπική και υπολογίστε την ολική διατομή.

ε)(Απολλώνιος - 262-190 π.χ.) Ορθός κώνος τέμνεται από επίπεδο και η τομή είναι μία κλειστή καμπύλη, γ. Κατασκευάστε την εγγεγραμμένη σφαίρα στο χώρο μεταξύ επιπέδου και κορυφής του κώνου και την περιγγεγραμμένη σφαίρα στο εξωτερικό του επιπέδου. Οι σφαίρες αυτές εφάπτονται με το επίπεδο στα σημεία Ο και Ο'. Έστω Α κάποιο σημείο της τομής γ. Δείξτε ότι ΑΟ+ΑΟ'=2α, όπου 2α σταθερά.



στ) Σωματίδιο μάζας m κινείται υπό την επίδραση απωστικού δυναμικού $V = -k/r$ με $k < 0$. Δείξτε οτι η ενέργεια E είναι πάντοτε θετική και οτι το μέτρο A του διανύσματος Runge-Lenz είναι $A > 1$. Αν ορίσετε το άξονα x έτσι ώστε το διάνυσμα Runge-Lenz να έχει διεύθυνση αντίθετη με το μοναδιαίο διάνυσμα του άξονα αυτού, δηλαδή να είναι $\vec{A} = -A\vec{e}_1$, δείξτε ότι η τροχιά του σωματιδίου θα δίδεται απο

$$r = \frac{(A^2-1)a}{-1 + A\cos\theta} ,$$

όπου r η απόσταση από το κέντρο της δύναμης O, θ η γωνία που σχηματίζεται από το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ ως προς το κέντρο O και το $\vec{e}_1$ και το a ορίζεται έτσι ώστε $E = |k|/2a$. Σχεδιάστε τη τροχιά και δείξτε οτι $r > 2a$. Θεωρήστε μία άλλη εστία O' επί του άξονα x στη θέση $2aA\vec{e}_1$. Αν r' η απόσταση σημείου της τροχιάς από την εστία O' δείξτε οτι η τροχιά είναι ο τόπος των σημείων που ικανοποιούν τη σχέση:

$$r - r' = 2a ,$$

και συνεπώς $r' < r$. Εάν λάβετε τώρα ως αρχή των αξόνων το μέσο του OO' και ένα καρτεσιανό σύστημα (x, y), όπου ο άξονας x είναι κατα μήκος της OO' και ο y κάθετα σε αυτήν, δείξτε ότι η καρτεσιανή εξίσωση της τροχιάς είναι

$$\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{c^2} = 1 .$$

προσδιορίστε τις σταθερές b και c και προσδιορίστε τις εξισώσεις των ασυμπτώτων.

ζ) Κυκλική στεφάνη κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε κεκλιμένο επίπεδο στο σταθερό πεδίο βαρύτητας. Θεωρήστε ως μεταβλητές το ύψος του κέντρου μάζας της στεφάνης, τη γωνία περιστροφής της στεφάνης και την απόσταση που διανύει το κέντρο μάζας επι του κεκλιμένου επιπέδου. Γράψτε την Λαγκραντζιανή που διέπει τη φυσική κίνηση σε αυτές τις συντεταγμένες και προσδιορίστε την δύναμη που ασκείται στη στεφάνη από το δάπεδο, καθώς και τη δύναμη της τριβής που απαιτείται για την κύλιση της στεφάνης.

η) Σε κάποιο σύστημα αναφοράς το κέντρο μάζας δύο σωματιδίων βρίσκεται στη θέση $\vec{R}$ και το διάνυσμα της σχετικής θέσης των είναι $\vec{r}$. Γράψτε συναρτήσει αυτών των δύο μεταβλητών στο σύστημα αυτό την ολική ορμή, την ολική στροφορμή και την ολική κινητική ενέργεια των σωματιδίων. Στο σύστημα κέντρου μάζας ποία η ολική ορμή, ολική στροφορμή και η ολική κινητική ενέργεια;

θ) Στο σύστημα του εργαστηρίου ένα σωματίδιο σκεδάζεται αφού αλληλεπιδράσει με ένα άλλο σωματίδιο που είναι αρχικά ακίνητο. Έστω ότι για την παράμετρο κρούσης b η γωνία σκέδασης είναι θ. Προσδιορίστε τη γωνία σκέδασης στο σύστημα κέντρου μάζας. Προσδιορίστε τώρα τη διαφορική διατομή σε μία σκέδαση Rutherford αν δεν αμελήσουμε την κίνηση των πυρήνων του χρυσού στους οποίους προσπίπτουν οι πυρήνες Ηλίου.

ι) Δύο νομίσματα διαφορετικής ακτίνας και μηδενικού πάχους κυλίονται χωρίς να ολισθαίνουν στην κατεύθυνση x επί σύρματος στο σχήμα ευθυγράμμου τμήματος AB. Το A κινείται και βρίσκεται στη θέση $\xi(t)$. Η κίνηση του σύρματος αναγκάζει και τα νομίσματα να κινηθούν. Γράψτε την Λαγκραντζιανή που διέπει τη κίνηση των νομισμάτων και προσδιορίστε που θα βρίσκονται τα νομίσματα ανα πάσα στιγμή και αν θα συγκρουστούν.

ια) (από Ανάλυση Ι) Η πραγματική συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής και ορίζεται στο κλειστό διάστημα $[a, b]$. Ορίστε Σ το σύνολο των αριθμών x_1 με την ιδιότητα η συνάρτηση $f(x)$ να είναι άνω φραγμένη στο διάστημα $a \leq x \leq x_1$. Δείξτε οτι το Σ δεν είναι κενό και το ανώτερο πέρας του συνόλου αυτού είναι το b. Συνεπώς κάθε συνεχής συνάρτηση που ορίζεται σε κλειστό διάστημα είναι άνωθεν φραγμένη. Τώρα θα δείξουμε οτι αν το ανώτερο πέρας της $f(x)$ είναι το M τότε υπάρχει x_1 στο διάστημα για το οποίο $f(x_1) = M$. Με τη μέθοδο της ατόπου απαγωγής υποθέστε οτι για κάθε x στο διάστημα είναι $f(x) < M$, και χρησιμοποιείστε την υπάρξη άνω φράγματος της συνεχούς $1/(M - f(x))$ για να καταλήξετε σε άτοπο. Επιχειρηματολογίστε τώρα για τα κάτω φράγματα και δείξτε ότι κάθε συνεχής συνάρτηση που είναι ορισμένη σε ένα κλειστο διάστημα έχει στο διάστημα αυτό μεγιστο και ελάχιστο. Δείξτε με ένα παράδειγμα ότι είναι αναγκαίο να είναι το διάστημα κλειστό.

ιβ) Θεωρήστε μια περιστρεφόμενη στεφάνη ακτίνας a, η οποία περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα Ω γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνά από το κέντρο αυτής. Σημειακή ιδανική χάντρα κινείται επί της στεφάνης στην οποία ασκείται και η κατακόρυφη επιτάχυνση της βαρύτητας g (ιβα) Δείξτε ότι η Λαγκρανζιανή της χάντρας αυτής μπορεί να γραφεί στην ακόλουθη απλοποιημένη μορφή:

$$L = \frac{1}{2}(\dot{\theta}^2 - \kappa(\theta))$$

όπου , $\dot{\theta} = d\theta/d\tau$, $\tau = t\sqrt{g/a}$, $\kappa(\theta) = 2\cos\theta - (\epsilon/2)\cos 2\theta$, και $\epsilon = a\Omega^2/g$. (ιββ) Δείξτε ότι τα σημεία ισορροπίας είναι $\theta_e = 0, \pi$ για $\epsilon < 1$ και $\theta_e = 0, \cos^{-1}(1/\epsilon), \pi$ για $\epsilon > 1$. (ιβγ) Γραμμικοποιήστε την Λαγκρανζιανή γύρω από τα σημεία αυτά και εκτιμήστε την ευστάθεια/αστάθεια των σημείων αυτών. (ιβδ) Αν $\epsilon = 1$, ελέγξτε αν το κατώτερο σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές (η γραμμικοποίηση του συστήματος δεν είναι αρκετή να δώσει απάντηση) και υπολογίστε την περίοδο ταλάντωσης του (ως συνάρτηση του πλάτους του). Σχεδιάστε την.

ιγ) Ομογενές ρευστό (με σταθερή πυκνότητα) ρέει μέσα σε ένα σωλήνα. Δείξτε ότι η προηγούμενη πρόταση είναι ισοδύναμη με τη πρόταση ότι η παροχή του ρευστού (το εσωτερικό γινόμενο της ταχύτητας με την διατομή) είναι σταθερή κατα μήκος του σωλήνα.

ιδ) Έστω ο ερμιτιανός πίνακας:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & .1 & 0 \\ .1 & 2 & 2.2 \\ 0 & 2.2 & 2 \end{pmatrix}$$

ιδα) Προκειμένου να βρούμε τις ιδιοτιμές του πειραματικά θα εκτελέσουμε το ακόλουθο Monte Carlo πείραμα. Θα θεωρήσουμε τυχαία διανύσματα $a = (x, y, z)$ και θα υπολογίσουμε για καθένα από αυτά το πηλίκο Rayleigh

$$R[a] = \frac{(a, Ha)}{(a, a)}.$$

Στο τέλος θα κατασκευάσουμε ένα ιστόγραμμα που θα δείχνει πόσο συχνά εμφανίστηκε κάποια τιμή του R. "Βλέπετε" στο διάγραμμα αυτό τις ιδιοτιμές; ['Ισως προβληματιστείτε τι εύρος τυχαίων τιμών να λάβετε για τα x, y, z. Προχωρήστε αυθαίρετα.]

ιδβ) Μήπως φάγαμε πολύ υπολογιστικό χρόνο άσκοπα; Συγκρίνατε την τιμή της $R[a]$ με αυτήν της $R[2a]$. Παίζει ρόλο στην τιμή του πηλίκου R το μέτρο του διανύσματος, ή η κατεύθυνσή του, ή και τα δύο;

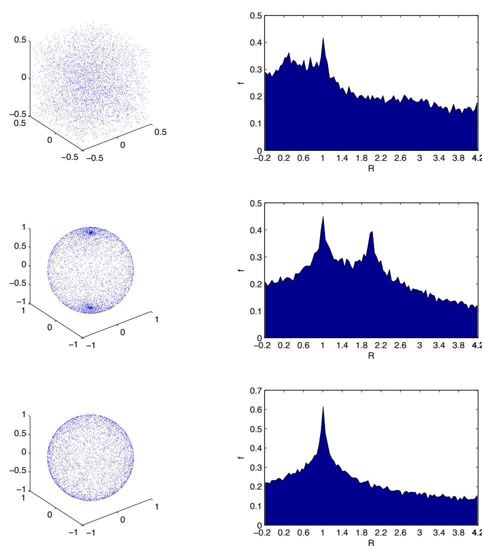
Σκεφθείτε πώς θα εκμεταλευτείτε την πληροφορία αυτή προκειμένου η τυχαιότητα να χρησιμοποιείται πιο αποδοτικά στην κάλυψη όλων των δυνατών διανυσμάτων που οδηγούν σε διαφορετικές τιμές πηλίκου.

ιδγ) Κατασκευάστε μοναδιαία διανύσματα τυχαίας κατεύθυνσης $a = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$ με θ, ϕ τυχαίες γωνίες από 0 ως π η πρώτη και από 0 ως 2π η δεύτερη. Ξαναφτιάξτε το ιστόγραμμα τιμών του R. Υπάρχει καθόλου συμφωνία με τα ευρήματα του (ιδα);

ιδδ) Τώρα έχετε μάθει αρκετά ώστε να σκεφθείτε αν όλα τα προηγούμενα βήματα ήταν λογικά. Αυτό που θέλετε είναι να διαλέξετε εντελώς τυχαία την κατεύθυνση του διανύσματος a, χωρίς να προτιμήσετε κάποια διεύθυνση. Αυτό κάνατε στο ερώτημα (ιδγ); Αν δεν είστε σίγουροι ζωγραφίστε τα τυχαία σημεία που πήρατε για να δείτε αν είναι ομοιόμορφα κατανεμημένα σε μια σφαίρα.

ιδε) Πώς θα αλλάζατε την κατανομή των τυχαίων τιμών της θ ώστε να κατανείμετε ομοιόμορφα τα διανύσματα σε μια σφαίρα; Αν η κατανομή που θέλετε να επιτύχετε είναι η $f(\theta)$ ποια μεταβλητή θα πάρετε ομοιόμορφα τυχαία αντί της θ; Κάντε το και πάρετε πάλι το ιστόγραμμα. Παρατηρείτε συσσώρευση τιμών του R κοντά στις ιδιοτιμές του πίνακα;

ιδστ) Τώρα συγκρίνατε τα ιστογράμματα των (ιδα), (ιδγ), (ιδε). Γιατί είναι πιο εμφανείς οι ιδιοτιμές στο (ιεε); Εξηγήστε γιατί οι ακραίες ιδιοτιμές δεν εμφανίζονται ως κορυφές στο ιστόγραμμα αλλά ως ελάχιστα. [Σκεφθείτε το σχήμα της επιφάνειας που σχηματίζεται από την συνάρτηση $f(a) = R[a]$ και την τομή αυτής με την $(a, a) = C$ για διάφορες τιμές του C.]



Σχήμα 1: Αριστερα: κατανομή σημείων (ερώτημα (ιδα) πάνω, ερώτημα (ιδγ) στο μέσο, ερώτημα (ιδε) κάτω). Δεξιά: κατανομή συχνότητας με την οποία λαμβάνεται η τιμή R του πηλίκου Rayleigh. Οι ιδιοτιμές του πίνακα H είναι:$-0.2042, 1.0026, \quad 4.2016$.

ιε) Θεωρήστε ένα αρμονικό ταλαντωτή ο οποίος αρχικά βρίσκεται στη θέση q_0 με ορμή $p(0) = 0$, και η θέση και η ορμή του ταλαντωτή είναι: $q = q_0\cos\omega t$, $p = -m\omega q_0\sin\omega t$. Γράψτε ακριβώς τη Χαμιλτονιανή του ταλαντωτή που δίνει αυτή τη τροχιά. Έστω η κανονική μεταβλητή $t(q,p)$ η οποία ισούται με τον χρόνο που βρίσκεται το σώμα στο σημείο q και p επί της τροχιάς. Από την παραπάνω έκφραση της τροχιάς προσδιορίστε την αναλυτική έκφραση της κανονικής μεταβλητής $t(q,p)$ και δείξτε ότι $\{t, H\} = 1$. Δείξτε τώρα ότι αν σε κάθε χαμιλτονιανό σύστημα ορίσουμε τον χρόνο $t(q,p)$ ως το χρόνο που απαιτείται για να βρεθεί το σύστημα σε κάποιο σημείο επι της τροχιάς του, η μεταβλητή αυτή ικανοποιεί $\{t, H\} = 1$.

ιστ) Θεωρήστε μονοδιάστατη κίνηση σωματιδίου στο δυναμικό $V(q)$. Το δυναμικό έχει ελάχιστο στο $q = 0$ και έχει παντού σταθερή καμπυλότητα $V''(q) > 0$. Με αυτό το δυναμικό για κάθε ενέργεια η κίνηση είναι περιοδική. Σχεδιάστε δύο τροχιές Α, Β που διαφέρουν σε ενέργεια κατά δE και έστω οτι η επιφάνεια που εμπεριέχεται μεταξύ των δύο τροχιών είναι δA. Θεωρήστε τώρα ως μεταβλητές τις t και H, όπου t η κανονική μεταβλητή του χρόνου ώς έχει ορισθεί στο (ιεστ). Σχεδιάστε τις τροχιές Α', Β' που είναι οι απεικονήσεις των τροχιών Α, Β στο επίπεδο με συντεταγμένες τις t και H. Ποία η επιφάνεια που εμπεριέχεται μεταξύ Α' και Β'. Δείξτε τώρα ότι η περίοδος της ταλάντωσης είναι $T(E) = dA/dE$. Υπολογίστε τέλος το ολοκλήρωμα: $\int\int \delta(H(q,p) - E) dq dp$.

ιζ) Θεωρήστε τον μετασχηματιμό $y = Ax$, όπου A ένας 2×2 πίνακας. Αποδείξτε οτι το τετράγωνο ΑΒΓΔ με κορυφές τα $(0,0), (1,0), (0,1)$ μετασχηματίζεται σε παραλληλόγραμμο ΑΒ'Γ'Δ' με την ίδια κορυφή στο Α (Δείξτε ότι οι αντίθετες πλευρές είναιμ πράγματι παράλληλες). Για ορισμένους μετασχηματισμούς A το παραλληλόγραμο εκφυλίζεται σε ένα ευθύγραμμο τμήμα. Προσδιορίστε τους μετασχηματισμούς που έχουν αυτή την ιδιότητα. Δείξτε τώρα ότι ο λόγος της επιφάνειας του ΑΒ'Γ'Δ′ ως προς την επιφάνεια του ΑΒΓΔ είναι $det(A)$.

ιη) Θεωρήστε οτι η αρχικά η πιθανότητα το σύστημα να είναι στη θέση q και p είναι $f_0 = A\exp(-q^2 - p^2)$. Προσδιορίστε τη σταθερά A που κανονικοποιεί αυτή τη πυκνότητα. (ιηα) Προσδιορίστε και ζωγραφίστε τη χρονική εξέλιξη της κατανομής πιθανότητας (ζωγραφίστε μερικές ισοϋψείς) όταν το σύστημα εξελίσσεται με τη Χαμιλτονιανή συνάρτηση $H = (q^2 + p^2)/2$ και όταν εξελίσσεται με την $H = (p^2 - q^2)/2$. (ιηβ) Αν η αρχική κατανομή ήταν $\delta(q)\delta(p)$ προσδιορίστε τη κατανομή την χρονική στιγμή t οταν το σύστημα εξελίσσεται με την Χαμιλτονιανή $H = (p^2 - q^2)/2$ και δείξτε ότι η κατανομή αυτή ικανοποιεί την εξίσωση Liouville.

ιθ) (Ειδική θεωρία σχετικότητας) Οι συντεταγμένες ενός σωματιδίου μάζας m στο χώρο των φάσεων είναι $\vec{x}$ και $\vec{p}$. Η χρονική εξέλιξη του συστήματος παράγεται απο την $H = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}$ και έστω οι κανονικές μεταβλητές $\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p}$ και $\vec{K} = H\vec{x}$. Δείξτε πρώτα οτι $[L_i, L_j]_\xi = \epsilon_{ijk} L_k$ (συμβολίζουμε με $[\cdot]$ την αγγύλη Poisson). Παρατηρείτε οτι οι αγγύλες Poisson μεταξύ των συνιστωσών της στροφορμής "κλείνουν" δηλαδή παράγουν πάλι συνιστώσες της στροφορμής ή είναι μηδενικές. Γενικότερα ένα σύνολο κανονικών συναρτήσεων κλείνει, οταν η αγγύλη Poisson μεταξύ των συναρτήσεων του συνόλου είναι γραμμικός συνδυασμός των συναρτήσεων αυτών. Ένα σύνολο αγγύλων Poisson που κλείνει μορίζει μία Αλγεβρα Lie των αγγύλων Poisson. Η Αλγεβρα Lie των στροφορμών L_j ονομάζεται η Αλγεβρα Lie της ομάδας $SO(3)$ των κανονικών στροφών. Υπολογίστε τις υπόλοιπες απο τις 15 αγγύλες που μπορεί να σχηματισθούν από τα $\vec{L}$ και $\vec{K}$, υπολογίστε δηλαδή τις $[K_i, K_j]_\xi$ και $[L_i, K_j]_\xi$. Δείξτε οτι οι 15 αυτές αγγύλες ορίζουν και αυτές μία Άλγεβρα Lie που ονομάζεται η Άλγεβρα της κανονικής και ομογενούς ομάδας Lorentz ή $SO(3,1)$. Δείξτε τώρα ότι οι 45 αγγύλες που σχηματίζονται απο τα $\vec{L}$, $\vec{K}$, H και $\vec{p}$ σχηματίζουν μια Αλγεβρα Lie η οποία συμπεριλαμβάνει και τις μεταθέσεις στον χωρόχρονο.

κ) Θεωρήστε το πρόβλημα του Kepler με τη Χαμιλτονιανή:

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{k}{r} \;\;, \quad p = |\vec{p}| \;, \;\; r = |\vec{q}| \;.$$

Η στροφορμή $\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p}$ και το αδιάστατο διάνυσμα του Lenz $\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L}/(mk) - \vec{n}$ ($\vec{n}$ το μοναδιαίο ακτινικό διάνυσμα) διατηρούνται, δηλαδή οι αγγύλες Poisson $[H, L_i]_\xi = [H, A_i]_\xi = 0$ για $i = 1,2,3$. Μία κανονική συνάρτηση V_i με $i = 1,2,3$ λέγεται διανυσματική ως προς τις στροφές εάν ικανοποιεί τις εξής σχέσεις: $[L_i, V_j]_\xi = \epsilon_{ijk} V_k$ και μία κανονική συνάρτηση V λέγεται βαθμωτή εάν $[L_i, V]_\xi = 0$.

(i) Σχηματίζουμε τις τρείς ποσότητες

$$\vec{K} = \left(-\frac{mk^2}{2H}\right)^{1/2} \vec{A}$$

με διαστάσεις στροφορμής. Δείξτε ότι το $\vec{K}$ είναι πράγματι διάνυσμα και οτι η διανυσματική συνθήκη μπορεί να γραφεί και $[\vec{a} \cdot \vec{L}, \vec{K}]_\xi = -\vec{a} \times \vec{K}$, όπου $\vec{a}$ οποιοδήποτε σταθερό διάνυσμα.

(ii) Δείξτε οτι εάν ισχύει οτι $[K_1, K_2]_\xi = L_3$ ο διανυσματικός κανόνας μετασχηματισμού συνεπάγεται οτι για ολες τις συνιστώσες ισχύει: $[K_i, K_j] = \epsilon_{ijk} L_k$.

(iii) Δείξτε ότι είναι πράγματι $[K_1, K_2]_\xi = L_3$.

(iv) Υπολογίστε τις αγγύλες μεταξύ των 6 συνιστωσών των δύο διανυσμάτων:

$$\vec{M}_\pm = \frac{\vec{L} \pm \vec{K}}{2} \ .$$

Ορίζουν αυτές οι ποσότητες μία Άλγεβρα Lie ως προς τις αγγύλες Poisson;

(v) Εκφράστε τη Χαμιλτονιανή συναρτήσει των $\vec{M}_\pm$

κα) (Κανονικοί μετασχηματισμοί και συμμετρίες) Κανονικοί μετασχηματισμοί είναι οι μετασχηματισμοί που παράγονται από την διαφορική σχέση:

$$\frac{d\xi}{d\lambda} = [\xi, A] = -D_A \xi$$

όπου

$$D_A = \frac{\partial A}{\partial q_j}\frac{\partial}{\partial p_j} - \frac{\partial A}{\partial p_j}\frac{\partial}{\partial q_j}$$

Ο μετασχηματισμός αυτός κατασκευάζει μία συνεχή οικογένεια μετασχηματισμών με γεννήτορα A και παράμετρο λ. Ο πεπερασμένος μετασχηματισμός γράφεται συμβολικά ως $T_\lambda = e^{-\lambda D_A}$ και συνεπώς οι μετασχηματισμένες συντεταγμένες γράφονται ως $\Xi = T_\lambda \xi$.

(i) Δείξτε ότι η $K(\lambda) = [\Xi_i, \Xi_j]_\xi - \Gamma_{ij}$ μετασχηματίζεται σύμφωνα με τον διαφορικό νόμο

$$\frac{dK(\lambda)}{d\lambda} = [K(\lambda), A]$$

και συνεπώς οι κανονικοί μετασχηματισμοί αφήνουν αναλλοίωτες της αγγύλες Poisson, δηλαδή είναι $[\Xi_i, \Xi_j]_\xi = \Gamma_{ij}$.

(ii) Κατ'αναλογία μετασχηματίζεται και η συναρτησιακή μορφή των συναρτήσεων κανονικών μεταβλητών με τον διαφορικό νόμο:

$$\frac{dF}{d\lambda} = [F, A] = -D_A F$$

και ενώ οι συντεταγμένες μετασχηματίζονται ως $\xi \to \xi_\lambda \equiv \Xi$ οι συναρτήσεις μετασχηματίζονται στις F_λ, δηλαδή $F \to F_\lambda$. Ορίζοντας $K(\lambda) = F_\lambda(\xi) - F(\Xi)$ δείξτε ότι πάλι

$$\frac{dK(\lambda)}{d\lambda} = [K(\lambda), A]$$

και εξ'αυτού ότι $F_\lambda(\xi) = F(\Xi)$. Κατασκευάσατε ένα παράδειγμα μη κανονικού μετασχηματισμού που δεν ικανοποιεί την παραπάνω σχέση για να καταλάβετε τι συμβαίνει.

Θεωρήστε τώρα δύο οικογένειες κανονικών μετασχηματισμών $T_\lambda = e^{-\lambda D_A}$ και $T_\mu = e^{-\mu D_B}$ με γεννήτορες A και B και παράμετρες λ και μ. Οι μετασχηματισμοί αντιμετατίθενται μεταξύ τους όταν $T_\lambda T_\mu = T_\mu T_\lambda$ για κάθε τιμή του λ και μ.

(iii) Δείξτε οτι η συνθήκη $[A, B] = 0$ είναι ισόδυναμη συνθήκη για την αντιμετάθεση των μετασχηματισμών.

Τώρα ας περιοριστούμε στον τριδιάστατο κόσμο. Θεωρήστε τους μετασχηματισμούς με γεννήτορες $A = \vec{q} \cdot \vec{p}$ και $B = \vec{L} \cdot \vec{n}$ όπου $\vec{L} = \vec{q} \times \vec{p}$ και $\vec{n}$ κάποιο σταθερό διάνυσμα.

(iv) Αντιμετίθενται οι μετασχηματισμοί T_λ και T_μ;

(v) Υπολογίστε τώρα πως μετασχηματίζονται οι συντεταγμένες, δηλαδή προσδιορίστε τις νέες συντεταγμένες:

$$P_\lambda = T_\lambda p \ , \ \ Q_\lambda = T_\lambda q \ , \tilde{P}_\mu = T_\mu p \ , \ \ \tilde{Q}_\mu = T_\mu q \ .$$

Θεωρήστε τώρα τη Χαμιλτονιανή

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{k}{r} \ , \quad p = |\vec{p}| \ , \ \ r = |\vec{q}| \ ,$$

με m, k σταθερές.

(vi) Υπολογίστε τις $T_\lambda H, T_\mu H$.

(vii) Εάν η $\vec{q}(t)$ επιλύει τις εξισώσεις του Χάμιλτον με την παραπάνω Χαμιλτονιανή είναι οι $\vec{Q}_\lambda(t) = T_\lambda \vec{q}(t)$ και $\vec{Q}_\mu(t) = T_\mu \vec{q}(t)$ τροχιές του ιδίου συστήματος;

(viii) Τώρα υπολογίστε τις $T_\lambda H$ και $T_\mu H$ για τη Χαμιλτονιανή

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{k}{r^2} \ .$$

κβ) Για την Λαγκραντζιανή πυκνότητα:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\phi_t^2 - \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 - V(\phi)$$

(i) Γράψτε τις εξισώσεις Euler-Lagrange, την Χαμιλτιανή πυκνότητα $\mathcal{H}$ και τις εξισώσεις του Χάμιλτον.

Θεωρήστε για τα υπόλοιπα ότι το πεδίο είναι ελεύθερο ($V(\phi) = 0$).

(ii) Δείξτε ότι η

$$\int d^3k f(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) \ , \ \ \omega = |\vec{k}|$$

για οποιοδήποτε f είναι λύση.

(iii) Θεωρήστε τώρα τη κυματική εξίσωση σε μία χωρική διάσταση x. Αν αρχικά $\phi(x,0) = h(x)$ και $\phi_t(x,0) = u(x)$ δείξτε ότι

$$\phi(x,t) = \frac{h(x-t) + h(x+t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} u(s)ds$$

Σχεδιάστε την χρονική εξέλιξη της λύσης αν αρχικά είχαμε μία τριγωνική διαταραχή α) μόνο στο h ($u = 0$) β) μόνο στο u με $h = 0$, και εξετάστε όταν αρχικά θέτουμε την $-u$ με $h = 0$.

(iv) Πόση είναι η ενέργεια των τριγωνικών αυτών διαταραχών.

(v) Δείξτε με άμεση αντικατάσταση ότι η παραπάνω λύση έχει σταθερή ενέργεια H

(vi) Θεωρήστε την κανονική μεταβλητή G με πυκνότητα $\mathcal{G} = \pi\phi_x$. Υπολογίστε την $\{G, H\}$.

κγ) (απο Φωκιώνα Χατζηϊωάννου). Θεωρήστε τη Λαγραντζιανή πυκνότητα

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\phi_t^2 - \frac{1}{2}\phi_{xx}^2$$

που διέπει τη εγκάρσια παραμόρφωση ενός ελάσματος που είναι στο διάστημα $0 \leq x \leq L$.

(i) Γράψτε τις εξισώσεις Euler-Lagrange και τις συνοριακές συνθήκες απο την αρχή του Χάμιλτον υπό την προϋπόθεση ότι τα άκρα του ελάσματος είναι ελεύθερα και δεν επιβάλεται περιοσμός στις μεταβολές στα σημεία αυτά (οι μεταβολές απλά μηδενίζονται την αρχική και τελική χρονική στιγμή).

(ii) Θέστε $\phi = e^{i\omega t}\psi(x)$ και προσδιορίστε τη γενική λύση που προκύπτει (χωρίς τις συνοριακές συνθήκες). Αν η ενέργεια του πεδίου έχει μία δεδομένη τιμή, γράψτε τη γενική λύση όταν το μήκος $L \to \infty$.

(iii) Πόσο πρέπει να αλλάξω το μήκος του ελάσματος για να ακούω τη μισή θεμελιώδη συχνότητα απο την θεμελιώδη συχνότητα που ακούω τώρα. Αν ήταν χορδή ποία θα ήταν η αντίστοιχη προσαρμογή του μήκους;

(iv) Προσδιορίστε τώρα τη πρώτη θεμελιώδη συχνότητα ταλάντωσης, και προσδιορίστε τη συχνότητα και τη μορφή αυτής της ταλάντωσης στο όριο που $L \to \infty$.

(v) Εάν επρόκειτο να φτιάξω ένα σήμαντρο με ένα τέτοιο έλασμα που πρέπει να το στερεώσω για να έχω τη λιγότερη απόσβεση ενέργειας

κδ) Ερευνούμε για λύσεις ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΗΣ ενέργειας της κυματικής εξίσωσης:

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} = -\frac{dV}{d\phi}$$

(i) Αν το δυναμικό είναι $V = m^2\phi^2/2 + \lambda\phi^4/4$ με $\lambda > 0$, δείξτε ότι η μόνη στατική λύση πεπερασμένης ενέργειας είναι η $\phi(x) = 0$.

(ii) Προσδιορίστε στατικές λύσεις της κυματικής εξίσωσης sine - Gordon όταν $V(\phi) = \alpha(1-\cos(\beta\phi))/\beta^2$ με $\alpha > 0$, σχεδιάστε την πυκνότητα ενέργειας και υπολογίστε την ενέργεια τους E_c.

(iii) Δείξτε ότι αν $\phi_c(x)$ είναι στατική λύση τότε η

$$\phi_c\left(\frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}\right)$$

είναι μία διαδιδόμενη λύση της κυματικής εξίσωσης σταθερής μορφής (solitary wave) (v σταθερά ταχύτητα).

(iv) Δείξτε οτι η ενέργεια της διαδιδόμενης λύσης για την sine - Gordon ικανοποιεί τη σχέση:

$$E = \frac{E_c}{\sqrt{1 - v^2}}$$

Ισχύει γενικά αυτή η σχέση;