Άσκηση 1

Αν

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt\ f(t) e^{-i\omega t}$$

είναι ο μετασχηματισμός Fourier της $f(t)$ έτσι ώστε

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\ \hat{f}(\omega) e^{i\omega t}$$

Να βρείτε τον μετασχηματισμό Fourier του γινομένου $f(t)\ g(t)$ αν δίνονται οι $\hat{f}$ και $\hat{g}$.

Άσκηση 2

Η διαφορική εξίσωση που περιγράφει κατακόρυφες ταλαντώσεις μιας αναρτημένης αλυσίδας είναι

$$\partial_t^2 \Psi - g\partial_x(x\partial_x\Psi)$$

και αναζητώντας κανονικούς τρόπους ταλάντωσης της μορφής $\Psi(x,t) = \hat{\Psi}(x)e^{i\omega t}$ καταλήγει στην

$$x\hat{\Psi}_{xx} + \hat{\Psi}_x + (\omega^2/g)\hat{\Psi} = 0,$$

με $\hat{\Psi}(l) = 0$. Βρείτε στο δίκτυο την χαρακτηριστική διαφορική εξίσωση των συναρτήσεων Bessel και δείξτε ότι η λύση της παραπάνω είναι η $J_0(2\omega\sqrt{(l-x)/g})$ και το ω πρέπει να είναι τέτοιο ώστε η J_0 να μηδενίζεται στο $x = l$ (πρώτη ρίζα της J_0). Βρείτε από το δίκτυο την τιμή της πρώτης ρίζας και από αυτήν την ω της θεμελιώδους ταλάντωσης της αλυσίδας.

Τώρα υποθέστε ότι η λύση είναι της μορφής $\hat{\Psi} = x^\rho(1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)$. Υπολογίστε τον εκθέτη ρ καθώς και τα a_1, a_2, ώστε αυτή να αποτελει λύση της αρχικής διαφορικής. Υποθέτωντας ότι η λύση δίνεται από το παραπάνω πολυώνυμο (κομμένο στον x^2 όρο) υπολογίστε από το πηλίκο Rayleigh την τιμή της συχνότητας και συγκρίνετέ την με την ακριβή.

Στη συνέχεια δοκιμάστε να αντικαταστήσετε την αλυσίδα με μια αρθρωτή ράβδο με δύο κομμάτια μεγέθους κl και $(1-\kappa)l$ (με $\kappa < 1$). Υπολογίστε και πάλι το πηλίκο Rayleigh και βρείτε την ελάχιστη τιμή του ως προς κ. Συγκρίνετε και αυτή την τιμή με την ακριβή τιμή της συχνότητας.