**Άσκηση 1**

Στη χορδή με πακτωμένα άκρα, θεωρήστε ότι το σχήμα της έχει τη μορφή

$$\hat{\psi}(x) = x(l - x).$$

Υπολογίστε το πηλίκο Rayleigh $R[\psi]$ γι'αυτή τη συνάρτηση και συγκρίνετε την τιμή του με τη συχνότητα της θεμελιώδους ταλάντωσης. Μπορειτε να δοκιμάσετε και την $\hat{\psi}_\lambda = (\hat{\psi}(x))^\lambda$ αντί της παραπάνω συνάρτησης και να ελέγξετε για ποια τιμή του $\lambda$ το πηλίκο στασιμοποιειται. Είναι στην περίπτωση αυτή το πηλίκο ακόμη πλησιέστερα στη συχνότητα της θεμελιώδους ταλάντωσης;

**Άσκηση 2**

Δοκιμάστε τώρα ως $\hat{\psi}'(x)$ την $x(l-x)(1-ax/l)$. Αφού υπολογίσετε το πηλίκο Rayleigh βρείτε το ακρότατό του ως προς $a$ ($dR/da = 0$). Υπολογίστε σε ποια ιδιοσυχνότητα της χορδής είναι πιο κοντά η τιμή του $R$ γι' αυτή την τιμή του $a$. Σχεδιάστε στο ίδιο γράφημα και τη συνάρτηση γι' αυτή την τιμή του $a$ και την ιδιοκατάσταση $\hat{\psi}_n(x)$ που αντιστοιχεί στην κοντινότερη συχνότητα. [Κανονικοποιήστε και τις δύο έτσι ώστε να έχουν την ίδια τιμή του $\int_0^l dx\ \hat{\psi}^2$.]

Στη συνέχεια ζωγραφίστε τη διαφορά $\hat{\psi}'(x)|_{a=\text{ακροτ}} - \hat{\psi}_n(x)$ κανονικοποιημένες και οι δύο όπως προηγουμένως. Μοιάζει η συνάρτηση αυτή με κάποια ιδιοκατάσταση $\hat{\psi}_m(x)$; Ποια;

**Άσκηση 3** Στην άσκηση που λύσαμε με τη χορδή και τη χάντρα μάζας $M = \kappa m$ ($m$ η μάζα της χορδής) στο κέντρο της χορδής, βρήκαμε τις ιδιοκαταστάσεις και τις αντίστοιχες ιδιοσυχνότητες. Ας εξετάσουμε την περίπτωση της πρώτης ιδιοκατάστασης της χορδής. Αυτή θα έχει ιδιοσυχνότητα $\omega_0^{\text{ακριβ}}$. Τώρα θα βρούμε μια προσεγγιστική τιμή αυτής μέσω του πηλίκου Rayleigh. Προς τούτο υποθέστε ότι η ιδιοκατάσταση είναι αυτή της απλής χορδής χωρίς κόμβους $\hat{\psi} = \sin(\pi x/l)$. Δείξτε ότι το πηλίκο Rayleigh τότε οδηγεί σε μια τιμή της μορφής

$$R = \left[\omega_0^{(\text{σκέτη χορδή})}\right]^2 \frac{1}{1 + 2(M/m)}.$$

συγκρίνετε την τιμή αυτή με την ακριβή για $M/m = 0, 0.2, 0.5, 1, 5$.