

### Άσκηση 1

Θεωρώντας τη Λαγκρανζιανή πυκνότητα

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\rho(\dot{\psi}^2 - b(\psi'')^2)$$

που αφορά σε μια ράβδο μήκους  $l$  η οποία εκτελεί εγκάρσιες ταλαντώσεις με δύναμη επαναφοράς την ελαστική δύναμη που αναπτύσσεται λόγω κάμψης της ράβδου (το  $b$  σχετίζεται με την ελαστικότητα της ράβδου σε κάμψεις). Υπολογίστε τους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης αυτής (σκεφθείτε τις συνοριακές συνθήκες στα άκρα της ράβδου) αν αυτή η ράβδος είναι ελεύθερη στο διάστημα (η συνθήκη αυτή δεν διαφέρει σημαντικά από το να είναι κρεμασμένη η ράβδος ως “καμπανάκι”) και βρείτε πώς σχετίζεται η συχνότητά της με το μήκος της. Πόσο θα αυξήσετε το μήκος για να κατεβείτε μια οκτάβα (υποδιπλασιασμός της συχνότητας); [ $\psi''$  είναι η δεύτερη χωρική παράγωγος.]

### Άσκηση 2

Θεωρήστε τη χορδή (πυκνότητας  $\rho$  και τάσης  $T$  που συζητήσαμε στο μάθημα) και προσθέστε μια μάζα  $m$  στο κέντρο της χορδής. Πώς θα αλλάξει η σχέση συχνότητας μήκους; [Ένας από τους τρόπους αντιμετώπισης του προβλήματος είναι να θεωρήσετε ότι η μάζα μπορεί να περιγραφεί μέσω μιας συνάρτησης πυκνότητας της μορφής  $A\delta(x - l/2)$ . Προκειμένου να έχει διαστάσεις μάζας η ολοκλήρωση της πυκνότητας αυτής το  $A$  θα πρέπει να έχει διαστάσεις μάζας (και όχι πυκνότητας), δηλαδή  $A = \rho l \kappa$  όπου  $\kappa$  κάποιος αριθμός που μετράει τη μάζα σε σχέση με τη μάζα της χορδής. Να σχεδιάσετε το προφίλ της χορδής για τις μερικές πρώτες ιδιοκαταστάσεις της χορδής και να συγκρίνετε το φάσμα των ιδιοσυχνοτήτων της με αυτές της σκέτης χορδής για διάφορες τιμές του  $\kappa$  ( $\kappa \ll 1$ ,  $\kappa = 1$ ,  $\kappa = 2$ ,  $\kappa \gg 1$ ).]

### Άσκηση 3

Αντί της χορδής που συζητήσαμε στο μάθημα η οποία είχε πακτωμένα άκρα, θεωρήστε μια ίδια, τα άκρα της οποίας όμως μπορούν να γλιστρούν ελεύθερα πάνω σε δύο παράλληλες ράβδους (κάθετες στη χορδή). Αλλάξτε καταλλήλως τις συνοριακές συνθήκες και βρείτε τους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης. Η παράλληλη μεταφορά της χορδής σε τι ιδιοσυχνότητα αντιστοιχεί τότε;