Σχετικά με το σφαιρικό εκκρεμές

Διατήρηση στροφορμής:
$$\dot{\phi}\sin^2\theta = l.$$

Διατήρηση ενέργειας (σε σφαιρικές)

$$E = \frac{1}{2}a^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\phi}^2) - ga(\cos\theta - 1)$$

με επίπεδο μηδενικής δυναμικής το κατώτερο σημείο. Με χρήση της στροφορμής

$$E = \frac{1}{2}a^2(\dot{\theta}^2 + \frac{l^2}{\sin^2\theta}) - ga(\cos\theta - 1).$$

Λύνοντας ως προς $\dot{\theta}$

$$\dot{\theta} = \sqrt{2[(E/a^2) + (g/a)(\cos\theta - 1)] - l^2/\sin^2\theta}. \tag{1}$$

Όσο για τη γωνία περιστροφής όταν το εκκρεμές πάει από το ψηλότερο σημείο στο αμέσως επόμενο ψηλότερο

$$\Delta\phi = \int d\phi = \int dt\ \dot{\phi} = \int dt \frac{l}{\sin^2\theta} = 2l\int_{\theta_-}^{\theta_+} \frac{d\theta}{\dot{\theta}\sin^2\theta}$$

όπου τα θ_-/ θ_+ είναι η μικρότερη/μεγαλύτερη ρίζα της (1). Το 2 μπήκε γιατί το κομμάτι της διαδρομής από την θ_+ στην θ_- είναι πολύτως ίδιο (συμμετρικό) με το κομμάτι από την θ_- στην θ_+.

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε την κίνηση για πολύ μικρές γωνίες θ έτσι ώστε να μπορούμε να κάνουμε την αντικατάσταση $\sin\theta \simeq \theta$ και $\cos\theta \simeq 1 - \theta^2/2$. Κατόπιν αυτού και κατάλληλης αντικατάστασης της ενέργειας θα έχουμε

$$\Delta\phi = 2l\int_{\theta_-}^{\theta_+} \frac{d\theta/\theta^2}{\sqrt{\Omega^2(\theta_+^2 - \theta^2) + l^2(\frac{1}{\theta_+^2} - \frac{1}{\theta^2})}}$$

με $\Omega^2 = g/a$. Η ενέργεια αντικαταστάθηκε με τους όρους που περιέχουν την θ_+ ώστε να μηδενίζεται η $\dot{\theta}$ στην αντίστοιχη γωνιακή θέση.

Από παραγώγιση του δυναμικού και αντικατάσταση των τριγωνομετρικών όρων με τις προσεγγιστικές τους τιμές για μικρές γωνίες βρίσκουμε:

$$V' = -\frac{a^2l^2}{\theta^3} + ga\theta$$

και με μηδενισμό αυτού βρίσκουμε ότι η γωνία θ_m που ελαχιστοποιείται το δυναμικό είναι $\theta_m = \sqrt{l/\Omega}$. Αυτήν θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια για αλλαγή μεταβλητής:

$x = \theta/\theta_m$:

$$\Delta\phi = 2\int_{x_-}^{x_+} \frac{dx/x^2}{\sqrt{(x_+^2 - x^2) + (\frac{1}{x_+^2} - \frac{1}{x^2})}}$$
$$= 2\int_{x_-}^{x_+} \frac{dx/x^2}{\sqrt{(x_+^2 - x^2)(1 - \frac{1}{x^2 x_+^2})}}$$
$$= 2x_+ \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx/x}{\sqrt{(x_+^2 - x^2)(x^2 x_+^2 - 1)}}. \tag{2}$$

Προφανώς η 2η ρίζα x_- θα είναι η $1/x_+$. Τέλος με αντικατάσταση $x = x_+ \sin w$:

$$\Delta\phi = \int_{\sin^{-1}(1/x_+^2)}^{\pi/2} \frac{dw}{\sin w \sqrt{x_+^4 \sin^2 w - 1}}. \tag{3}$$

Περιέργως το τελευταίο αυτό ολοκλήρωμα έχει αναλυτική λύση και μάλιστα σταθερή, δίνει π! Με μια νέα αλλαγή μεταβλητής $x^2 = 0.5(x_+^2 + x_-^2) + 0.5(x_+^2 - x_-^2)\sin\psi$ η (2) καταλήγει στη μορφή

$$\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{d\psi}{0.5(x_+^2 + x_-^2) + 0.5(x_+^2 - x_-^2)\sin\psi} \tag{4}$$

το οποίο υπολογίζεται εύκολα όταν $x_+ = 1$, οτι κάνει π.

Αν είχαμε δουλέψει σε καρτεσιανές συντεταγμένες θα βλέπαμε ότι το πρόβλημα που λύσαμε είναι αυτό ενός ισότροπου αρμονικού ταλαντωτή ο οποίος διαγράφει γωνία $\Delta\phi = \pi$ όταν πηγαίνει από το μακρινότερο στο κοντινότερο και πάλι στο μακρινότερο σημείο, ανεξαρτήτως αρχικών συνθηκών. Επομένως θα μπορούσαμε μέσω αυτού να βρούμε την τιμή στα 2 παραπάνω δύσκολα ολοκληρώματα.