

Άσκηση 0

(Από προηγούμενο μάθημα:) Βρείτε τρόπο να υπολογίσετε αριθμητικά το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\pi/3} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos^2 \theta - \cos^2 \theta_0}}$$

για $\theta_0 = \pi/3$ και συγκρίνετε την αριθμητική τιμή του με την ακριβή (με ακρίβεια 16 δεκαδικών) τιμή 2.156515647499643 (από Mathematica).

Άσκηση 1

Μελετήστε την κίνηση ενός σφαιρικού εκκρεμούς μάζας m που κρέμεται από αβαρή ράβδο μήκους a και μπορεί να κινείται και εκτός του κατακόρυφου επιπέδου που διέρχεται από το σημείο ανάρτησης. [Υποδ: Χρησιμοποιήστε σφαιρικές συντεταγμένες.] Συγκεκριμένα θέλουμε να ελέγξουμε αν παρακολουθώντας την προβολή της κίνησης στο κατακόρυφο επίπεδο θα παρατηρήσουμε κάποια διαφορά αν το εκκρεμές έχει και στροφορμή (ως προς τον κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το σημείο ανάρτησης), οπότε η κίνησή του δεν είναι επίπεδη.

Άσκηση 2

Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται σε κάποιο κεντρικό δυναμικό $V(r)$. Θεωρώντας εξ αρχής την κίνηση επίπεδη, γράψτε τις εξισώσεις κίνησης Euler-Lagrange σε πολικές συντεταγμένες. Βρείτε τη διατηρούμενη ποσότητα που αφορά την κυκλικότητα της γωνίας θ . Την πρώτη φορά εισάγετε την στη διαφορική εξίσωση για το r . Τη δεύτερη φορά εισάγετε την κατευθείαν στη Λαγκρανζιανή, ώστε αυτή να μετατραπεί σε Λαγκρανζιανή ενός βαθμού ελευθερίας (όπως πράττουμε συνήθως με τους δεσμούς) και ξαναγράψτε τη διαφορική εξίσωση για το r . Αφού κατασκευάσετε πάλι τη διαφορική εξίσωση για το r συγκρίνατε τα δύο αποτελέσματα [προσοχή στα πρόσημα].

Άσκηση 3

Προσπαθήστε να εκλογικεύσετε τη μελέτη του εκκρεμούς με την εισαγωγή ενός κατάλληλου δυναμικού ελατηρίου για να αναπαραστήσετε τη λειτουργία της ράβδου, όπως το κάναμε στο μάθημα, αλλά με τη χρήση πολικών αντί καρτεσιανών συντεταγμένων (προκειμένου να είναι πιο εύκολες οι αντίστοιχες διαφορικές εξισώσεις). Λύστε τις στο όριο $k \rightarrow \infty$.

Άσκηση 4

Επαναλάβετε την επεξεργασία της μελέτης του απλού εκκρεμούς με τη χρήση του πολλαπλασιαστή Lagrange χωρίς να κάνετε το λάθος που έγινε στο μάθημα: $(d^2/dt^2) \sin \theta = -\ddot{\theta} \sin \theta (\dots!)$ Αφότου συνδυάσετε κατάλληλα τις 2 εξισώσεις κίνησης ώστε να απαλειφθεί ο πολλαπλασιαστής Lagrange δείξτε ότι καταλήγετε στη συνήθη διαφορική εξίσωση για το εκκρεμές. Στη συνέχεια υπολογίστε την τιμή του πολλαπλασιαστή Lagrange και σκεφθείτε αν σας θυμίζει κάτι.