

Άσκηση 1

Δείξτε ότι αν $\{F_1, F_2\} = 0$ (όπου $F_{1,2}$ είναι συναρτήσεις των q_i, p_i) τότε και κάθε συνάρτηση $f_i(F_1, F_2)$ θα ικανοποιεί τη σχέση $\{f_i, f_j\} = 0$

Άσκηση 2

Δείξτε ότι ο αρμονικός ταλαντωτής με

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{m\omega_1^2}{2}x^2 + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{m\omega_2^2}{2}y^2$$

έχει δύο διατηρούμενες ποσότητες σε involution (ενέλιξη). Στη συνέχεια υπολογίστε τις ποσότητες $P_1 = \frac{1}{2\pi} \oint p_x dx$, $P_2 = \frac{1}{2\pi} \oint p_y dy$ και εκφράστε τις P_1, P_2 σε συνάρτηση των 2 διατηρούμενων ποσοτήτων. Τέλος κατασκευάστε τη Χαμιλτονιανή ως συνάρτηση των P_1, P_2 και βρείτε τις δύο θεμελιώδεις συχνότητες της κίνησης.

Άσκηση 3

Κατασκευάστε τη Λαγκρανζιανή ενός σωματιδίου που κινείται ελεύθερα πάνω στην επιφάνεια τόρου (σαμπρέλας) που παράγεται από την περιστροφή ενός κύκλου ακτίνας r γύρω από ευθεία (συνεπίπεδη με τον κύκλο) που απέχει απόσταση $R \geq r$ από το κέντρο του κύκλου. Ποια η κίνηση του σωματιδίου; Συμβαίνει κάτι ιδιαίτερο αν $R = r$;