"Ε Ι Δ Ι Κ Η   Θ Ε Ω Ρ Ι Α   Σ Χ Ε Τ Ι Κ Ο Τ Η Τ Ο Σ"

1. "Χ Ω Ρ Ο Σ Κ Α Ι Χ Ρ Ο Ν Ο Σ Π Ρ Ο Τ Ο Υ E I N S T E I N"

1.1. ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗΣ.

Ὁ τρισδιάστατος φυσικός χῶρος εἰς τόν ὁποῖον ζῶμεν, πιστεύομεν ὅτι εἶναι Εὐκλείδειος, δηλαδή ἰσχύει εἰς τόν φυσικόν χῶρον τό θεώρημα τοῦ Πυθαγόρα. Τοῦτο ἐπιβεβαιοῦται διά μετρήσεως τῶν ἀποστάσεων διά φυσικῶν μονάδων μήκους. Ὁ χῶρος εἶναι ἰσότροπος καί ὁμογενής.

Λόγῳ τῆς ὁμογενείας τοῦ χώρου, ἡ θέσις ἑκάστου ὑλικοῦ σημείου, ὁρίζεται μόνον σχετικῶς πρός ἄλλα ὑλικά σημεῖα, τά ὁποῖα ὁρίζουν οὕτω "ἕν σύστημα ἀναφορᾶς".

Τά ἀνωτέρω ἁπλουστεύονται ὡς ἑξῆς : Τά σημεῖα τοῦ χώρου μας εἶναι δυνατόν νά ἀναφερθοῦν σ'ἕνα σύστημα συντεταγμένων x_1, x_2, x_3, οὕτως ὥστε οἱ διαφορές τῶν συντεταγμένων Δx_1, Δx_2, Δx_3, τῶν ἄκρων ἑνός διαστήματος νά δίνουν τό

$$s^2 = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \Delta x_3^2 \quad , \quad (1)$$

ἀναλλοίωτο, γιά ὁποιοδήποτε προσανατολισμό τοῦ διαστήματος, εἰς ὁποιαδήποτε περιοχή τοῦ χώρου. Τό σύστημα συντεταγμένων x_1, x_2, x_3 καλεῖται Καρτεσιανόν.

<u>Ἄσκησις 1-1.</u> Δείξατε ὅτι ἐάν ὑπάρχη ἕν σύστημα Καρτεσιανόν, τότε ὑπάρχουν ἄπειρα τοιαῦτα. Εὕρατε τήν σχέσιν διά τῆς ὁποίας συνδέονται πρός ἄλληλα.

Ὁ χρόνος εἶναι ἕν μονοδιάστατον συνεχές ἐπιπρόσθετον τοῦ χώρου. Μετρᾶται διά φυσικῆς τινός μονάδος μετρήσεως, π.χ. τῇ βοηθείᾳ περιοδικῶν φαινομένων. Ὁ χρόνος εἶναι ὁμογενής ὡς πρός χρονικήν μετάθεσιν, ὅπως καί ἡ Εὐκλείδιος εὐθεῖα ὡς πρός μετάθεσιν ἐν τῷ χώρῳ. Τοῦτο ἐκφράζει τό χρονικῶς ἀναλλοίωτον τῶν φυσικῶν νόμων.

Ὁ Ἀριστοτέλης διατυπώνει τό ἀξίωμα τῆς ἀδρανείας ὡς ἀκολούθως: " Ἔτι οὐδείς ἔχοι εἰπεῖν διατί κινηθέν στήσεταί που ἄν τί γαρ μᾶλλον ἐνταῦθα ἤ ἐνταῦθα; ὥστε ἤ ἠρεμήσει ἤ εἰς ἄπειρον ἀνάγκη φέρεσθαι, ἐάν μή τι ἐμποδίση κρεῖττον."

Καί ἀλλοῦ: " Εἰ δέ μή ἔστι μήτε φύσει μήτε βίᾳ ὅλως οὐδέν κινηθήσεται."

Εἶναι φανερόν ὅτι ἡ ἐξίσωσις κινήσεως ἐλευθέρου ὑλικοῦ σημείου κατά τόν Ἀριστοτέλην, ἄν διετυποῦτο ὑπό ἀκριβῆ μαθηματικήν μορφήν (διαφορικήν ἐξίσωσιν) θά ἦτο:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = 0 \qquad (2\alpha)$$

Ἤτοι ἡ κατάστασις ἑνός ἐλευθέρου ὑλικοῦ σημείου, δυναμικῶς, καθορίζεται πλήρως ἐκ τῆς θέσεώς του. Παρουσία δυνάμεως (βλ. Θεωρ. Μηχ. Κεφ. I), αἰτίου ἀλλαγῆς τῆς φυσικῆς καταστάσεως τοῦ ὑλικοῦ σημείου, ἡ ἐξίσωσις (2α) λαμβάνει τήν μορφήν τοῦ δυναμικοῦ νόμου

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{x}}{dt} \qquad (2)$$

Ἡ ἐξίσωσις (2) εἶναι ἀναλλοίωτος εἰς μετασχηματισμούς τῆς μορφῆς

$$\{ \vec{x}' = R\vec{x} + \vec{x}_o \quad , \quad t' = t + t_o \} \qquad (3)$$

ὅπου R πίναξ στροφῆς ἐν τῷ χώρῳ, $\vec{x}_o$ σταθερόν ἄνυσμα, t_o σταθερόν χρονικόν διάστημα. Βλέπομεν δηλαδή ὅτι ὁ χῶρος τοῦ Ἀριστοτέλους εἶναι ὁμογενής, ἰσότροπος καί ὁ χρόνος ὁμογενής.

Ἄσκησις 1-2. Δείξατε ὅτι τά στοιχεῖα a_{ik} τοῦ πίνακος

$$R = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

τοῦ χαρακτηρίζοντος περιστροφήν συστήματος ἀξόνων, εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἱκανοποιοῦν τάς σχέσεις :

$$\sum_{i=1}^{3} a_{ik}a_{i\ell} = \delta_{k\ell} \quad , \quad k,\ell = 1,2,3 \; .$$

Πόσα ἐκ τῶν a_{ik} εἶναι ἀνεξάρτητα μεταξύ των ;

Ἀσκησις 1-3. Ὁ μετασχηματισμός (3) χαρακτηρίζεται ἀπό τά $\{ R, \vec{x}_o, t_o \}$. Ὁρίσατε νόμον συνθέσεως ἐν τῷ συνόλῳ τῶν μετασχηματισμῶν αὐτῶν, καί ἀποδείξατε ὅτι οὗτοι ἀποτελοῦν ὁμάδα. Αὐτη εἶναι ὁμάς συμμετρίας τῆς ἐξισώσεως (2). Εἶναι αὐτη μεταθετική ; Πόσαι παράμετροι θορίζουν ἕν στοιχεῖον τῆς ὁμάδος αὐτῆς ;

1.2. ΓΑΛΙΛΑΙΟΣ.

Νέα θεμελίωσις τῆς Μηχανικῆς γίνεται ἀπό τόν Γαλιλαῖο. Κατ'ἀρχήν εἰσάγεται ἡ ἔννοια τοῦ ἀδρανειακοῦ συστήματος.

Ἀδρανειακόν ἤ σύστημα Γαλιλαίου, καλεῖται τό σύστημα ἀναφορᾶς ὡς πρός τό ὁποῖον ἐλεύθερον σωμάτιον κινεῖται εὐθυγράμμως καί ἰσοταχῶς. Ἡ ὕπαρξις ἀδρανειακῶν συστημάτων ἀναφορᾶς δέν ἐξαρτᾶται μόνον ἐκ τῆς γεωμετρίας τοῦ χωροχρόνου, ἀλλά ἐκφράζει βασικήν δυναμικήν ἰδιότητα τοῦ φυσικοῦ κόσμου. Συγκεκριμένα ἀποτελεῖ μίαν ἰσοδύναμον ἔκφρασιν τοῦ γνωστοῦ νόμου τῆς ἀδρανείας.

Πιστεύομεν ὅτι εἰς τήν φύσιν ὑπάρχει ἕν τοὐλάχιστον ἀδρανειακόν σύστημα ἀναφορᾶς, π.χ. (κατά προσέγγισιν) τό σύστημα ἀναφορᾶς,τῶν ἀπλανῶν ἀστέρων. Πᾶν σύστημα ἀναφορᾶς κινούμενον εὐθυγράμμως καί ἰσοταχῶς ὡς πρός τοῦτο εἶναι ὁμοίως ἀδρανειακόν. Οὕτω ὑπάρχουν ἄπειρα ἀδρανειακά συστήματα ἀναφορᾶς, ὅλα ἰσοδύναμα διά τήν περιγραφήν τῶν νόμων τῆς Μηχανικῆς.

Βλέπομεν λοιπόν ὅτι ὁ φυσικός χῶρος τοῦ Γαλιλαίου ἔχει μεγαλυτέραν συμμετρίαν.Ἐπί πλέον τῆς ὁμογενείας του, συμμετρίας εἰς μετάθεσιν, παραμένει ἀναλλοίωτος καί εἰς ἰσοταχῆ κίνησιν.

Ὁ χρόνος παραμένει ὅπως εἰς τόν Ἀριστοτέλην.

Οἱ μετασχηματισμοί πού συνδέουν δύο ἀδρανειακά συστήματα ἀναφορᾶς καλοῦνται Γαλιλαϊκοί καί εἶναι τῆς μορφῆς :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{x}' = R\vec{x} + \vec{v}t + \vec{x}_o \\ \\ t' = t + t_o \end{array} \right\} \qquad (4)$$

<u>Ἄ σ κ η σ ι ς 1-4.</u> Ἀπαντήσατε τά ἐρωτήματα τῆς ἀσκ. 1-3 διά τόν μετασχηματισμόν (4).

1.3. ΝΟΜΟΙ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ (NEWTON).

Οἱ νόμοι τῆς Μηχανικῆς διέπουν τήν κίνησιν τῶν ὑλικῶν σημείων ἐν τῷ χώρῳ καί τῷ χρόνῳ ὡς πρός ἕν σύστημα ἀναφορᾶς. Ἡ κίνησις αὕτη $\vec{r} = \vec{r}(t)$ δύναται νά θεωρηθῆ ὡς μία διαδοχή χωροχρονικῶν γεγονότων $(\vec{r},t)$.

i) <u>Νόμος τῆς ἀδρανείας-δυναμική τοῦ ἐλευθέρου ὑλικοῦ σημείου</u>

Ἡ δυναμική τῆς κινήσεως ἑνός ἐλευθέρου ὑλικοῦ σημείου ὡς πρός ἀδρανειακόν σύστημα ἀναφορᾶς, περιλαμβάνεται εἰς τόν ὁρισμόν τοῦ ἀδρανειακοῦ συστήματος, ἤτοι $\vec{r}(t) = \vec{v}_o t + \vec{r}_o$. Ἡ ταχύτης τοῦ ὑλικοῦ σημείου εἶναι σταθερά $\vec{v} \equiv \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_o$. Ἡ ἐπιτάχυνσις αὐτοῦ εἶναι

μηδέν ὡς καί ὅλαι αἱ παράγωγοι τάξεως ἀνωτέρας τοῦ 2.

Ὁ δυναμικός νόμος (νόμος τῆς ἀδρανείας),

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 0 \,, \qquad (5)$$

ὅστις διέπει τήν κίνησιν ἐλευθέρου ὑλικοῦ σημείου εἶναι προφανῶς ἀναλλοίωτος ὡς πρός τούς μετασχηματισμούς Γαλιλαίου.

ii) <u>Δυνάμεις - ὁ θεμελιώδης νόμος τῆς Μηχανικῆς.</u>

Τά αἴτια τῆς μεταβολῆς τῆς κινητικῆς καταστάσεως ὑλικοῦ σημείου καλοῦμεν γενικῶς δυνάμεις. Ὁ θεμελιώδης νόμος τῆς Μηχανικῆς εἶναι ὁ νόμος ὁ περιγράφων τήν χρονικήν ἐξέλιξιν τῆς κινητικῆς καταστάσεως τῶν ὑλικῶν σημείων, συναρτήσει τῶν δυνάμεων, καί διατυποῦται ὡς :

$$\vec{F} = m\,\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \qquad (6)$$

Ἡ m καλεῖται ἀδρανειακή μᾶζα τοῦ μελετωμένου σώματος καί εἶναι ἀναλλοίωτος ὡς πρός μετασχηματισμούς Γαλιλαίου.

<u>Ἄ σ κ η σ ι ς 1-5.</u> Δείξατε ὅτι ὁ νόμος τοῦ Νεύτωνος (6) ὁ ὁποῖος διέπει τήν κίνησιν ὑλικοῦ σημείου, ἕπεται ἐκ τοῦ 1ου νόμου (νόμου τῆς ἀδρανείας), τοῦ αἰτιατοῦ καί τοῦ ἀναλλοιώτου εἰς μετασχηματισμούς τοῦ Γαλιλαίου.

iii) Τρίτος νόμος τοῦ Νεύτωνος ἤ νόμος "δράσεως-ἀντιδράσεως".

Εἰς τήν Μηχανικήν θεωροῦμεν ὅτι αἱ δυνάμεις ὀφείλονται εἰς τήν ἀλληλεπίδρασιν τῶν ὑλικῶν σημείων. Ἔστωσαν δύο ὑλικά σημεῖα 1 καί 2 μαζῶν m_1 καί m_2 ἀντιστοίχως, εὑρισκόμενα μακράν τῆς ἐπιδράσεως ἄλλων ὑλικῶν σημείων. Τό ὑλικόν σημεῖον 1, ἀσκεῖ ἐπί τοῦ 2 δύναμιν $\vec{F}_{12}$ καί ὑφίσταται ἐκ τοῦ 2 δύναμιν $\vec{F}_{21}$. Κατά τόν Νεύτωνα (3ος νόμος) :

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \quad , \qquad (7)$$

δηλαδή ἡ δρᾶσις εἶναι ἴση καί ἀντίθετος τῆς ἀντιδράσεως.

Οἱ δύο τελευταῖοι νόμοι τοῦ Νεύτωνος εἶναι εἰς τήν πραγματικότητα ὁρισμοί τῆς δυνάμεως καί τῆς ἀδρανειακῆς μάζης. Τό μόνο μετρήσιμο ἀπ'εὐθείας μέγεθος εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσις.

Θεωρήσωμεν δύο ἀλληλεπιδρῶντα σωμάτια. Αἱ ἐπ'αὐτῶν ἐξασκούμεναι δυνάμεις πληροῦν τήν (7). Λόγῳ τοῦ δευτέρου νόμου ἰσχύουν ἀκόμη :

$$\vec{F}_{21} = m_1\vec{\gamma}_1 \quad \text{καί} \quad \vec{F}_{12} = m_2\vec{\gamma}_2 \ .$$

Κατόπιν τῆς (7) αἱ ἀνωτέρω δίδουν :

$$m_2 = m_1 \frac{|\vec{\gamma}_1|}{|\vec{\gamma}_2|} \qquad (8)$$

Ἐφ'ὅσον τό m_1 ὁρισθῆ ὡς ἡ μονάς τῆς ἀδρανειακῆς μάζης ἀπό τήν (8) ὁρίζεται τό ἑκάστοτε m_2 μετά ἀπό μέτρησιν τῶν γ_1, γ_2. Ὕστερα ἀπό τόν ὁρισμό αὐτό, ἡ δύναμις ὁρίζεται ἀπό τόν δεύτερο νόμο.

Ἄ σ κ η σ ι ς 1-6. Δείξατε ὅτι ἡ ὁμάς τῶν μετασχηματισμῶν Γαλιλαίου εἶναι ὁμάς συμμετρίας τῶν νόμων τοῦ Νεύτωνος.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.

Χατζηϊωάννου, Φ. : Θεωρητική Μηχανική, Τ.1, Νευτώνειος Μηχανική, Ἀθῆναι 1971.

Einstein, A. : The Meaning of Relativity, Princeton Univ. Press, Princeton 1956.

Poincaré, H. : Science and Hypothesis, Dover, New York 1952.

- : Science and Method, Dover, New York,

- : The Value of Science, Dover, New York, 1958.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ II

"Η Λ Ε Κ Τ Ρ Ο Μ Α Γ Ν Η Τ Ι Σ Μ Ο Σ Π Ρ Ο Τ Ο Υ E I N S T E I N"

2.1. ΑΙΘΗΡ.

Περί τῆς φύσεως τοῦ φωτός εἶχον γίνει διάφορες ὑποθέσεις. Ἐκείνη ὅμως ἡ ὁποία ἐπικρατοῦσε ἦτο ἡ κυματική. Αὕτη ἠδυνήθη νά ἑρμηνεύση φαινόμενα ὡς ἡ περίθλασις, ἡ συμβολή κ.λ.π. Αἱ ἐξισώσεις τοῦ Maxwell διά τά ἀνύσματα τοῦ ἠλεκτρομαγνητικοῦ πεδίου $\vec{E}$ καί $\vec{H}$ προέβλεπαν κύματα τῶν ὁποίων ἡ ταχύτης καθωρίζετο ἀπό τόν λόγον τῶν ἠλεκτροστατικῶν καί τῶν ἠλεκτρομαγνητικῶν μονάδων. Ἡ ὑπολογιζομένη - ταχύτης συμφωνοῦσε μέ τήν μετρουμένην διά τό φῶς (αἱ πρῶται μετρήσεις τῆς ταχύτητος τοῦ φωτός ἐγένοντο ἀπό τόν Roemer τό 1676. Ὁ Fizeau τήν ἐμέτρησε εἰς (315.300 $\pm$ 500) km/sec (1849),καί ὁ Foucault εἰς(298.000 $\pm$500) km/sec (1862)).

Αὐτό ἦτο μία καλή ἔνδειξις ὅτι τό φῶς ἦτο ἠλεκτρομαγνητικόν κῦμα, καί μία ἀκόμη καλυτέρα ἦτο ἡ συμφωνία τῶν πειραματικῶν δεδομένων ἐπί τῆς πολώσεως τοῦ φωτός μέ τάς προβλέψεις τῆς θεωρίας τοῦ Maxwell.

Εἰς τάς κυματικάς θεωρίας περί φωτός τῶν Huygens, Fresnel, Young, Green κ.λ.π., τό φῶς εἶναι ἕνα κῦμα μηχανικόν, διαδιδόμενον ἐντός ἑνός περιέργου μέσου, τοῦ αἰθέρος. Ὁ αἰθήρ ἦτο ἕνα μέσον ἐλαστικόν, μέ πεπερασμένην πυκνότητα, ἄνευ ἰξώδους καί μέ ἄλλας ἐκπληκτικάς ἰδιότητας. Εἰς τόν αἰθέρα ὁ Maxwell ἀνεγνώρισε τό μέσον τό ὁποῖον μετέφερε τάς ἠλεκτρομαγνητικάς ἀλληλεπιδράσεις, μή δεχόμενος τό πεδίον ὡς αὐθύπαρκτον καί διαδιδόμενον εἰς τόν ἐλεύθερον χῶρον.

Ὡς πρός τόν ἠρεμοῦντα αἰθέρα λοιπόν, ἰσχύουν αἱ ἐξισώσεις τοῦ Maxwell καί ὡς πρός αὐτόν, ἡ ταχύτης τοῦ φωτός εἶναι αὐτή πού προβλέπεται ἀπό τήν θεωρίαν του.

Καί ἡ ἀρχή τῆς σχετικότητος ;

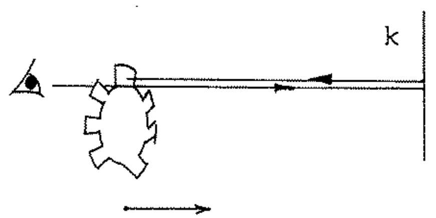
Ἔστω c ἡ ταχύτης τῶν ἠλεκτρομαγνητικῶν κυμάτων ὡς πρός τόν αἰθέρα. Δι'ἕν σύστημα ἀναφορᾶς (ἀδρανειακόν) κινούμενον μέ ταχύτητα v ὡς πρός τόν αἰθέρα ἡ ταχύτης γίνεται :

$$c' = c \pm v$$

Ἀκόμη αἱ ἐξισώσεις τοῦ Maxwell δέν εἶναι ἀναλλοίωτοι εἰς τήν μορφήν ὡς πρός μετασχηματισμούς Γαλιλαίου,(ἄσκ.2.1). Δηλαδή αἱ ἐξισώσεις τοῦ Maxwell πρέπει νά ἀλλάζουν μορφήν ἀπό τό ἕν ἀδρανειακόν σύστημα ἀναφορᾶς εἰς τό ἄλλο, ὥστε νά δίδουν διαφορετικές ταχύτητες διά τό φῶς. Δηλαδή οἱ νόμοι τῆς ἠλεκτροδυναμικῆς ἰσχύουν μόνον δι'ἕν προνομιοῦχον σύστημα ἀναφορᾶς, τόν αἰθέρα.

Μᾶς παρέχεται λοιπόν ἡ εὐκαιρία νά καθορίσωμεν τό προνομιοῦχον τοῦτο σύστημα ἀναφορᾶς, ὡς πρός τό ὁποῖον ὁ αἰθήρ ἀκινητεῖ, διά καθορισμοῦ τῆς ταχύτητος τῆς Γῆς ὡς πρός τόν αἰθέρα.

2.2. ΠΕΙΡΑΜΑ ΤΟΥ FIZEAU.



Σχ. 1

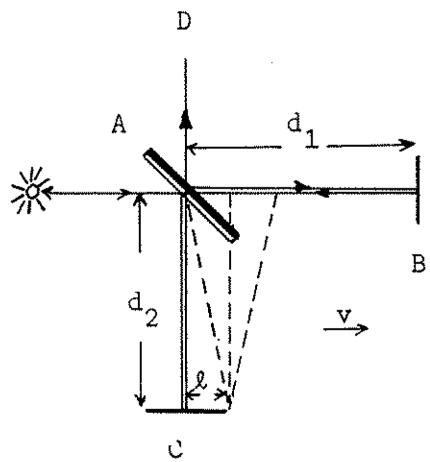
Ὁ ὀδοντωτός τροχός τοῦ σχ. 1 περιστρέφεται μέ γνωστήν συχνότητα. Φωτεινή ἀκτίς διέρχεται δι'ἑνός διακένου,ἀνακλᾶται ἐπί τοῦ κατόπτρου k καί διερχομένη διά τοῦ ἑπομένου διακένου φθάνει εἰς ὄπισθεν τοῦ τροχοῦ παρατηρητήν. Ἐάν v ἡ ταχύτης τῆς διατάξεως ὡς πρός τόν αἰθέρα, ὁ χρόνος ἀπό τήν ἀναχώρησιν μέχρι τήν ἐκ νέου ἄφιξιν τῆς ἀκτῖνος εἶναι :

$$T = \frac{d}{c+v} + \frac{d}{c-v} = \frac{2d}{c}\,\frac{1}{1-(\frac{v}{c})^2}$$

$$T \approx \frac{2d}{c}\left(1 + \frac{v^2}{c^2} + \ldots.\right)$$

Ἐφ'ὅσον τό πείραμα αὐτό γίνεται ἐπί τῆς Γῆς τό v εἶναι ἀκριβῶς ἡ ταχύτης τῆς Γῆς ὡς πρός τόν αἰθέρα καί μποροῦμε νά τήν προσδιορίσωμεν. Τό v^2/c^2 εἶναι τῆς τάξεως τοῦ 10^{-8} καί δέν ἦτο δυνατόν νά γίνουν τόσον ἀκριβεῖς μετρήσεις κατ'ἐκείνην τήν ἐποχήν (περί τό 1850).

2.3. ΠΕΙΡΑΜΑ MICHELSON-MORLEY (1887).



Σχ. 2

Πρό τοῦ τέλους τοῦ 19ου αἰῶνος οἱ Michelson καί Morley προσπάθησαν νά μετρήσουν τήν ταχύτητα τῆς Γῆς ὡς πρός τόν αἰθέρα διά συμβολομέτρου. Διά τῆς διατάξεως αὐτῆς μετροῦσαν κατά βάσιν τόν λόγον τῆς ταχύτητος τοῦ φωτός πρός δύο καθέτους διευθύνσεις.

Ἡ ἀρχή τοῦ πειράματος εὑρίσκεται εἰς τό σχ. 2. Τό φῶς κατευθύνεται ἐκ τῆς πηγῆς πρός ἡμιεπαργυρωμένον κάτοπτρον. Μέρος τῆς δέσμης προσπίπτει ἐπί τοῦ B, ἐπιστρέφει, προσπίπτει ἐπί τοῦ A καί ἀνακλᾶται πρός τό D . Τό ἀνακλώμενον μέρος τῆς ἀρχικῆς δέσμης ἀνακλᾶται ἐπί τοῦ C καί ἐν συνεχείᾳ συμβάλλει μέ τήν προηγουμένην δέσμην ὁδεῦον πρός τό D.

Ὑποθέτομεν ὅτι ὅλη ἡ συσκευή κινεῖται μέ μία ταχύτητα v ὡς πρός τόν αἰθέρα καί ἡ AB εἶναι παράλληλος πρός τήν κίνησιν. Ὁ χρόνος ὁ ἀπαιτούμενος διά τήν διαδρομήν ABA εἶναι :

$$T_1 = \frac{d_1}{v+c} + \frac{d_1}{v-c} = \frac{2d_1}{c} \frac{1}{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} \approx \frac{2d_1}{c}\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right) \qquad (1)$$

Ὁ χρόνος ὁ ἀπαιτούμενος διά νά φθάση τό φῶς ἀπό τό A εἰς τό C καί ἀπό τό C εἰς τό A ἔστω T_2. Σ'αὐτόν τόν χρόνον τό C ἔχει κινηθεῖ ὁριζοντίως καί ὡς ἐκ τοῦ σχήματος φαίνεται τό συνολικῶς διανυόμενον μῆκος κατά τήν διαδρομήν ACA εἶναι $L = 2\sqrt{d_2^2 + T_2^2 v^2/4}$. Ἀλλά $L = cT_2$, ἄρα

$cT_2 = 2\sqrt{d_2^2 + T_2^2 v^2/4}$ καί τελικῶς :

$$T_2 = \frac{2d_2}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \approx \frac{2d_2}{c}\left(1+\frac{v^2}{2c^2}\right). \qquad (2)$$

Ἄν λοιπόν $d_1 = d_2 = d$ ἡ διαφορά χρόνου εἶναι :

$$\Delta t = T_1 - T_2 = \frac{2d}{c}\left(\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) \approx \frac{2d}{c}\left(1+\frac{v^2}{c^2}-1-\frac{v^2}{2c^2}\right)$$

$$\Delta t \approx \frac{d}{c}\,\frac{v^2}{c^2}\,. \qquad (3)$$

Ἄν τώρα στρέψωμε τήν συσκευήν κατά 90° πρέπει νά παρατηρηθῆ μετακίνησις τῶν κροσσῶν συμβολῆς, ἀνάλογος τοῦ Δt . Ἐξ αὐτῆς θά ὑπελογίζετο ἡ ταχύτης v . Οὐδεμία ὅμως μετακίνησις παρετηρήθη. Τό πείραμα ἐπανελήφθη κατά διαφόρους ἐποχάς ὥστε νά ἀπαλοιφθῆ ἡ πιθανότης στιγμιαίας ἠρεμίας τῆς Γῆς ὡς πρός τόν αἰθέρα καί ὡς ἐκ τούτου μηδενικοῦ ἀποτελέσματος.

2.4. ΘΕΩΡΙΑ ΤΟΥ LORENTZ.

Οἱ Lorentz καί Fitz-Gerald γιά νά ἑρμηνεύσουν τό ἀποτέλεσμα τοῦ πειράματος Michelson-Morley ἔδωσαν τήν γνωστήν συστολήν μήκους κατά Lorentz-FitzGerald. Δηλαδή κάθε μῆκος τό ὁποῖον ὅταν ἀκινητεῖ ὡς πρός τόν αἰθέρα εἶναι L_o, ὅταν κινεῖται ὡς πρός αὐτόν μέ ταχύτητα $\vec{v}$ συστέλλεται παραλλήλως πρός τήν $\vec{v}$ εἰς :

$$L_1 = L_o\sqrt{1-v^2/c^2} \qquad (4)$$

Ἡ ἀνωτέρω παραδοχή ἐφαίνετο πολύ τεχνητή διά νά ἀντέξη εἰς αὐστηράν κριτικήν. Ἐν πάσῃ περιπτώσει ὅμως, ὁ Lorentz, προσπαθῶν νά διασώση τά περί αἰθέρος κρατοῦντα, παρουσίασεν θεωρίαν ἐπιτυχεστάτην, βασιζομένην ἐπί τῆς ἰδιοφυοῦς ὑποθέσεως ὅτι ὅλαι αἱ δυνάμεις τῆς φύσεως εἶναι ἠλεκτρομαγνητικαί.

Ἄς θεωρήσωμεν ράβδον μήκους L_o . Τά ἄτομα τῆς ράβδου εἶναι συνδεδεμένα μεταξύ των δι'ἠλεκτρομαγνητικῶν δυνάμεων καί εὑρίσκονται εἰς τάς θέσεις εὐσταθοῦς ἰσορροπίας, δηλ. εἰς τάς θέσεις ὅπου τό ἠλεκτροστατικόν δυναμικόν εἶναι ἐλάχιστον. Παρατηροῦμεν τήν ράβδον ἀπό ἕν ἄλλο σύστημα ἀναφορᾶς, κινούμενον μέ ταχύτητα v ὡς πρός τήν ἀκίνητον ράβδον καί κατά τήν διεύθυνσιν τοῦ ἄξονος αὐτῆς. Τά ἠλεκτροστατικά δυναμικά θά ἀλλάξουν (σύμφωνα μέ τούς μετασχηματισμούς Γαλιλαίου), ἑπομένως θά ἀλλάξῃ καί ἡ θέσις εὐσταθοῦς ἰσορροπίας μέ ἀποτέλεσμα τήν ἐλάττωσιν τῆς ἀποστάσεως μεταξύ τῶν ἀτόμων, ἄρα τήν συστολήν ὅλης τῆς ράβδου. Ὁ Lorentz κατέληξε κατ'αὐτόν τόν τρόπον εἰς τήν (4).

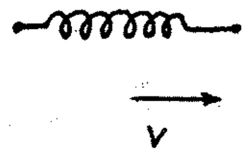
Ἄ σ κ η σ ι ς 2 - 1. Νά εὑρεθῇ ὁ μετασχηματισμός τῶν ἐξισώσεων τοῦ Maxwell ὡς πρός τούς μετασχηματισμούς τοῦ Γαλιλαίου.

Ἄ σ κ η σ ι ς 2 - 2. Μέ τήν συστολήν τοῦ μήκους δικαιολογήσατε τό ἀρνητικόν ἀποτέλεσμα τοῦ πειράματος Michelson - Morley.
Κατά τήν θεωρίαν τοῦ Lorentz ἡ ἀδρανειακή μᾶζα εἶναι ἠλεκτρομαγνητικῆς φύσεως. Ὑπολογισμός τῆς ἀλλαγῆς τῆς ἠλεκτρομαγνητικῆς μάζης m_e κατά τήν κίνησιν δίδει $m_e \to m_e /\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}$.

Ἄ σ κ η σ ι ς 2-3. Λαμβάνομεν ὡς ὡρολόγιον ἁρμονικόν ταλαντωτήν μέ χαρακτηριστικήν περίοδον :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_o}{k}}$$

ὡς πρός τό σύστημα τοῦ αἰθέρος. Ὑποθέτοντες ὅτι ἡ Ἐνέργεια ὑφίσταται τήν αὐτήν μεταβολήν ὡς ἡ ἠλεκτρομαγνητική μᾶζα δείξατε ὅτι ἡ περίοδος τοῦ ταλαντωτοῦ ὡς πρός σύστημα κινούμενον μέ ταχύτητα v ὡς πρός τόν αἰθέρα εἶναι :



Σχ. 3

$$T' = \frac{T}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

(Διαστολή χρόνου κατά Lorentz).

Ἄ σ κ η σ ι ς 2-4. Θεωροῦντες τόν ταλαντωτήν τῆς ἀσκ. 2-3 ὡς μικρόν ἠλεκτρικόν δίπολον, εὑρίσκομεν πειραματικῶς, ὅτι, καθέτως πρός τήν κίνησιν, ἐκπέμπει ἠλεκτρομαγνητικήν ἀκτινοβολίαν μεγαλυτέρας συχνότητος (μετάθεσις πρός τό ὑπεριῶδες) τῆς τοῦ ἠρεμοῦντος ταλαντωτοῦ. Νά συμβιβασθῇ τοῦτο πρός τό συμπέρασμα τῆς ἀσκ. 2-3, ὅτι ὁ κινούμενος ἁρμονικός ταλαντωτής θά ἔχῃ μικροτέραν συχνότητα((μεγαλυτέραν περίοδον), λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τόν κβαντομηχανικόν κανόνα $E = h\nu$.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.

Einstein and others : The Principle of Relativity, Dover, New York 1923.

Lorentz, H.A. : The Theory of Electrons, Dover, New York 1952.

Born, M. : Einstein's Theory of Relativity, Dover, New York, 1962.

Berkeley Physics Course, V.1, "Mechanics", McGraw-Hill, 1965.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

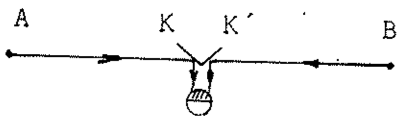
ΕΙΔΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΟΣ. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ.

3.1. ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΟΝ ΤΗΣ ΤΑΧΥΤΗΤΟΣ ΤΟΥ ΦΩΤΟΣ ΚΑΤΑ EINSTEIN.

Τήν λύσιν τοῦ ἀδιεξόδου εἰς τό ὁποῖον περιῆλθεν ἡ κλασσική Φυσική ἐκ τοῦ ὅτι ἡ μετρωμένη ταχύτης διαδόσεως τοῦ φωτός (Πειράματα Michelson-Morley κλπ.) εἶναι ἀσυμβίβαστος μέ τούς μετασχηματισμούς τοῦ Γαλιλαίου ὀφείλομεν εἰς τήν μεγαλοφυΐαν τοῦ Einstein. Ὁ Einstein , ἐνάντια εἰς τό ὅλον οἰκοδόμημα τῆς Κλασσικῆς Μηχανικῆς, ἐκκινᾶ ἀντίστροφα μέ τήν τολμηράν ὑπόθεσιν ὅτι "ἡ ταχύτης διαδόσεως τοῦ φωτός εἶναι παγκόσμιος σταθερά δι'ὅλα τά ἀδρανειακά συστήματα ἀναφορᾶς". Ἐπί τῆς ὑποθέσεως αὐτῆς θά στηριχθῆ ἡ νέα Σχετικιστική Μηχανική ἐκ θεμελίων. Τοῦτο ἀπαιτεῖ πλήρη ἀναθεώρησιν τῆς φυσικῆς Γεωμετρίας τοῦ χωροχρόνου.

3.2. ΣΥΓΧΡΟΝΙΣΜΟΣ - ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΧΡΟΝΟΥ.

Αὐτή ταύτη ἡ ἔννοια τοῦ συγχρονισμοῦ δύο συμβάντων, ἡ ὁποία εἶναι ἀπαραίτητος διά νά εἶναι δυνατή σύγκρισις καί μέτρησις χρόνου πρέπει τώρα νά ὁρισθῆ μέ γνώμονα τό ἀναλλοίωτον τῆς ταχύτητος τοῦ φωτός. Οὕτω, κατά Einstein, ἐρχόμεθα στόν ἑξῆς ἁπλοῦν ὁρισμόν (Σχ. 4).



Σχ. 4.

Θεωρήσωμεν ὅτι ἐκ τῶν σημείων A καί B (σχ. 4) ἐκπέμπονται φωτεινά σήματα ἅτινα εἰς τό μέσον τῆς ἀποστάσεως AB ἀνακλῶνται ἐπί τῶν κατόπτρων K καί K' καί φθάνουν εἰς τόν παρατηρητήν. Ἐάν ὁ παρατηρητής βλέπη συγχρόνως τά δύο σήματα, ταῦτα ἐξεπέμφθησαν συγχρόνως ἀπό τά A καί B.

Προφανῶς ἀνωτέρω παρελήφθη, ὡς τετριμμένος ὁ ὁρισμός τοῦ συγχρονισμοῦ δύο συμβάντων εἰς τό αὐτό σημεῖον τοῦ χώρου.

Διά τήν μέτρησιν χρόνου, ὑποθέσωμεν ὅτι χρονόμετρα ταυτοσήμου κατασκευῆς τοποθετοῦνται εἰς διάφορα σημεῖα A_1, A_2, ..., A_κ, ἑνός ἀδρανειακοῦ συστήματος ἀναφορᾶς συγχρονισμένα (κατά τόν ἀνωτέρω δοθέντα ὁρισμόν). Ὑποθέτοντες ὁμογένειαν τοῦ χώρου, τά ἀνωτέρω χρονόμετρα ἀρκεῖ νά συγχρονισθοῦν ἅπαξ.

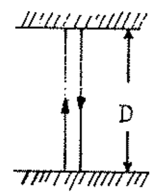
Καλοῦμεν χρόνον ἑνός συμβάντος εἰς τό σημεῖον A_i τήν ἔνδειξιν τοῦ χρονομέτρου εἰς A_i κατά τήν στιγμήν τοῦ συμβάντος.

3.3. ΧΩΡΟΧΡΟΝΙΚΑΙ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΑΙ.

Ἕν γεγονός ἤ συμβάν (event) καθορίζεται ἐκ τῆς θέσεως εἰς τήν ὁποίαν συμβαίνει καί τοῦ ἀντιστοίχου χρόνου. Πρέπει δηλαδή νά ἐφοδιάσωμεν ἕκαστον ἀδρανειακόν σύστημα μέ χωροχρονικάς συντεταγμένας ἤτοι νά βαθμολογήσωμεν τούς ἄξονας διά τόν καθορισμόν τῆς θέσεως καί νά συγχρονίσωμεν χρονόμετρα διά τόν καθορισμόν τοῦ χρόνου.

Δυνάμεθα νά ἐπιτύχωμεν τοῦτο ἁπλούστατα διά τῆς χρήσεως ἑνός προτύπου χρονομέτρου εἰς τήν ἀρχήν καί φωτεινῶν σημάτων.

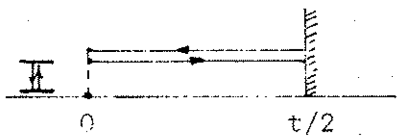
Τό χρονόμετρον τό ὁποῖον εὑρίσκεται εἰς τήν ἀρχήν O (καί πανομοιότυπά του εὑρίσκονται κατανεμημένα εἰς ὁλόκληρον τόν χῶρον)δύναται π.χ. νά βασίζεται ἐπί τῆς ἀκολούθου ἁπλῆς ἀρχῆς :



Σχ. 5

Μεταξύ δύο κατόπτρων παραλλήλων καί εἰς σταθεράν ἀπόστασιν D ἀπ' ἀλλήλων, φωτεινή ἀκτίς ὑφίσταται διαδοχικάς ἀνακλάσεις. Ὁ χρόνος μετρᾶται διά τῆς καταμετρήσεως τῶν ἀνακλάσεων ἐπί τοῦ ἑνός τῶν κατόπτρων.

Ἡ βαθμολόγησις τῶν ἀποστάσεων δύναται τώρα νά γίνη ὡς ἑξῆς (Σχ. 6). Εἰς διαφόρους θέσεις τοποθετοῦνται κάτοπτρα. Ἀπό τῆς ἀρχῆς 0 ἀποστέλλεται φωτεινόν σῆμα, ὅπερ μετά τήν ἀνάκλασίν του ἐπί ἑκάστου κατόπτρου ἐπιστρέφει εἰς τήν ἀρχήν. Ἐάν ὁ χρόνος μεταξύ ἐκπομπῆς καί λήψεως τοῦ σήματος εἰς τό 0 εἶναι t, ἡ σχέσις βαθμολογίας ἀποστάσεως εἶναι



Σχ. 6

$$x = t/2$$

(ὑποτίθεται ὅτι ἡ ταχύτης τοῦ φωτός $c = 1$).

Ὁ συγχρονισμός τῶν χρονομέτρων π.χ. κατά μῆκος τοῦ ἄξονος τῶν x γίνεται ὡς ἑξῆς : Τήν χρονικήν στιγμήν 0 ἐκπέμπεται φωτεινόν σῆμα ἐκ τῆς ἀρχῆς κατά μῆκος τοῦ ἄξονος x . Τήν στιγμήν πού ὁ εὑρισκόμενος εἰς τήν θέσιν 1 παρατηρητής ἀντιλαμβάνεται τό φωτεινόν σῆμα, θέτει τό χρονόμετρό του εἰς τήν ἔνδειξιν 1 καί κατά τόν ἴδιον τρόπον ὅταν τό σῆμα φθάση εἰς ἀπόστασιν n ὁ χρόνος εἶναι n .

Οὕτω, κατ'ἀρχήν ἡ χάραξις τῶν χωροχρονικῶν συντεταγμένων ἐπετεύχθη.

3.4. ΓΙΑΤΙ ΠΑΝΤΟΤΕ ΤΟ ΦΩΣ ;

Εἴδομεν ὅτι ἡ ἔννοια τοῦ συγχρονισμοῦ, καί κατά συνέπειαν τοῦ χρόνου,καί ἐν συνεχείᾳ ὁ καθορισμός τοῦ συστήματος χωροχρονικῶν συντεταγμένων ἔγιναν μέ βάσιν τήν ταχύτητα τοῦ φωτός.

Θά ἦτο δυνατόν νά χρησιμοποιήσωμεν ὁποιανδήποτε ἄλλην ταχύτητα, ἐφ'ὅσον βεβαίως εἶχε τό χαρακτηριστικόν νά εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ συστήματος ἀναφορᾶς. Τό φῶς ἔχει αὐτήν τήν ἰδιότητα ἤ τοὐλάχιστον αὐτό εἶναι ἕνα βασικό ἀξίωμα τῆς θεωρίας τῆς σχετικότητος. Καί τά πειράματα συμφωνοῦν ἀπολύτως ! (π.χ. D.Sadeh (1963)).

Ἄ σ κ η σ ι ς 3-1. Ἐξετάσατε κατά πόσον ὁμοιάζουν αἱ σχέσεις αἰθήρ-ἀπόλυτον σύστημα ἀναφορᾶς (αἰθέρος) καί ἀήρ-ἀπόλυτος χῶρος (τοῦ Ἀριστοτέλους)."Αν διά τόν συγχρονισμόν χρησιμοποιήσωμεν τήν ταχύτητα τοῦ ἤχου εἰς τόν ἀέρα, ὁδηγούμεθα εἰς τήν σχετικότητα τοῦ Ἀριστοτέλους ;

3.5. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΤΟΥ LORENTZ.

Πρῶτος ὁ Voigt (ὅρα βιβλιογραφία), τό 1887 παρετήρησεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις τοῦ κύματος

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial\, t^2} = 0$$

παραμένει ἀναλλοίωτος εἰς μετασχηματισμούς τῆς μορφῆς :

$$x' = k\,\frac{x-vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y' = ky, \quad z' = kz, \quad t' = k\,\frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

ἔνθα $\beta = \frac{v}{c}$.

Ὁ Lorentz παρετήρησεν ὅτι ἄν ἀδρανειακόν σύστημα ἀναφορᾶς κινεῖται μέ ταχύτητα v ὡς πρός τόν αἰθέρα αἱ ἐξισώσεις τοῦ Maxwell εἶναι ἀναλλοίωτοι ἐφ'ὅσον αἱ συντεταγμέναι μετασχηματίζονται ὡς ἀνωτέρω.

Ὁ Poincaré θεωρῶντας τό σύνολο τῶν ἀνωτέρω μετασχηματισμῶν, παρετήρησε ὅτι ἀποτελεῖ ὁμάδα καί ὅτι $k = 1$.

3.6. EINSTEIN : C = ΣΤΑΘ. ΚΑΙ ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΟΣ.

Ἡ ἀναζήτησις τῶν νόμων μετασχηματισμοῦ τῆς γεωμετρίας τοῦ χωροχρόνου διά δύο ἀδρανειακά συστήματα, βασίζεται εἰς τά κατωτέρω ἀξιώματα :

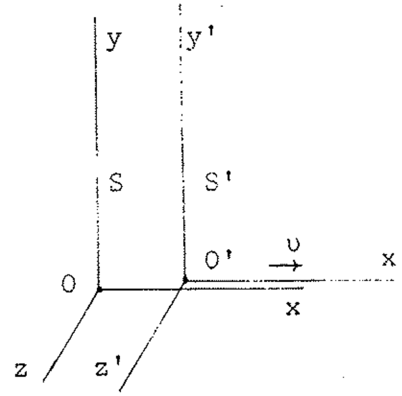
α) Αἱ ἐξισώσεις μετασχηματισμοῦ πρέπει νά εἶναι γραμμικαί. Τοῦτο ἀπαιτεῖται, ἵνα ἐξασφαλίζεται ἡ ὁμογένεια τοῦ χωροχρόνου.

β) Πρέπει νά ἔχωμεν ἀμοιβαίαν ἰσοδυναμίαν τῆς σχετικῆς γεωμετρίας δύο ἀδρανειακῶν συστημάτων.

γ) Ἡ ταχύτης τοῦ φωτός πρέπει νά εἶναι ἡ αὐτή δι'ὅλα τά ἀδρανειακά συστήματα ἀναφορᾶς.

Θεωροῦμεν δύο ἀδρανειακά συστήματα ἀναφορᾶς S καί S'

ἐκ τῶν ὁποίων τό δεύτερον κινεῖται ὡς πρός τό πρῶτον κατά τόν ἄξονα τῶν x μέ ταχύτητα v, σταθεράν, εἰς τρόπον ὥστε οἱ ἄξονες τῶν δύο συστημάτων νά παραμένουν παράλληλοι.



Σχ. 7

Ἐπειδή οἱ μετασχηματισμοί μας εἶναι γραμμικοί θά ἔχωμεν *):

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x+\beta t & \qquad \Delta x' &= \alpha\Delta x+\beta\Delta t \\ y' &= y & & \\ z' &= z & \text{καί} & \\ t' &= \alpha' x+\beta' t & \qquad \Delta t' &= \alpha'\Delta x+\beta'\Delta t. \end{aligned} \tag{1}$$

Ἡ ἀρχή τοῦ συστήματος S' ἔχει ἐξίσωσιν :

$$x' = 0 \text{ ἤ } \alpha x+\beta t = 0 \tag{2}$$

ἀπό τήν ὁποίαν λαμβάνομεν ὅτι ἡ ταχύτης της ὡς πρός τό S εἶναι :

$$v = -\frac{\beta}{\alpha} \tag{3}$$

*) Χρησιμοποιοῦμεν τό φυσικόν σύστημα μονάδων, διά τό ὁποῖον $c = 1$.

Ἡ ἀρχή τοῦ συστήματος S ἔχει ἐξίσωσιν $x = 0$. Ἀπό αὐτήν καί τάς (1), λαμβάνομεν :

$$x' = \beta t \quad \text{καί} \quad t' = \beta' t \tag{4}$$

Ἐάν τώρα w ἡ ταχύτης τοῦ S ὡς πρός τό S' ἐκ τῶν (4) ἔχομεν :

$$w = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\beta}{\beta'} \tag{5}$$

Ἐκ τοῦ ἀξιώματος (β) ἔχομεν ὅτι : ἐάν τό σύστημα S' κινεῖται ὡς πρός τό S μέ ταχύτητα v , τότε τό S κινεῖται ὡς πρός τό S' μέ ταχύτητα -v . Δηλαδή εἰς τήν περίπτωσίν μας :

$$w = -v \quad \text{ἤ} \quad \frac{\beta}{\beta'} = -\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) = \frac{\beta}{\alpha} \tag{6}$$

ἐκ τῆς ὁποίας ἔπεται ὅτι :

$$\beta' = \alpha \tag{7}$$

Ὁ μετασχηματισμός (1) ἁπλουστεύεται εἰς :

$$x' = \alpha(x-vt), \quad y'=y, \quad z' = z, \quad t' = \alpha' x+\alpha t \tag{8}$$

ἤ

$$\Delta x' = \alpha(\Delta x-v\Delta t), \quad \Delta t' = \alpha'\Delta x - \frac{\beta}{v}\Delta t \quad . \tag{9}$$

Θεωρήσωμεν φωτεινόν σῆμα κατά τόν ἄξονα x. Ἐφ'ὅσον ἡ ταχύτης τοῦ φωτός εἶναι σταθερά $c = 1$, αἱ ἐξισώσεις κινήσεως τοῦ σήματος διά τά S καί S' εἶναι :

$$\Delta x^2 - \Delta t^2 = 0 \quad \text{καί} \quad \Delta x'^2 - \Delta t'^2 = 0 \quad . \tag{10}$$

Ἡ δευτέρα, δυνάμει τῆς (9), γίνεται :

$$(\alpha^2-\alpha'^2)\Delta x^2+\left(\alpha^2 v^2- \frac{\beta^2}{v^2}\right)\Delta t^2 + 2\left(\alpha' \frac{\beta}{v}-\alpha^2 v\right)\Delta x\Delta t= 0.$$

Ἡ τελευταία ἐξίσωσις περιγράφει ἕνα φωτεινό σῆμα. Καί τό φωτεινό σῆμα περιγράφεται εἰς ὅλα τά συστήματα ἀναφορᾶς ἀπό τίς (10). Ἑπομένως ὁ συντελεστής τοῦ ΔxΔt πρέπει νά εἶναι μηδέν :

$$\alpha' \frac{\beta}{v} = \alpha^2 v \quad \text{ἤ} \quad \alpha'\beta = \alpha^2 v^2$$

Ἄρα :

$$\alpha' = \beta = -\alpha\beta \tag{11}$$

Κατόπιν τῆς (11), αἱ (9) γίνονται :

$$\Delta x' = \alpha(\Delta x-v\Delta t), \quad \Delta t'= \alpha(-v\Delta x+\Delta t) \tag{12}$$

Διά τόν προσδιορισμόν τοῦ πολλαπλασιαστικοῦ συντελεστοῦ α θεωροῦμεν τό ἑξῆς πείραμα: Μετροῦμεν τήν μονάδα μήκους τοῦ ἄξονος τῶν x ἐκ τοῦ συστήματος S'. Δηλαδή τήν αὐτήν χρονικήν στιγμήν ($\Delta t' = 0$) παρατηροῦμεν τά ἄκρα του. $\Delta x'=\alpha(1-\upsilon\Delta t)$, $0 = \alpha(-\upsilon.1+\Delta t)$. Ἡ δευτέρα δίδει: $\Delta t=0$ καί κατόπιν τούτου ἡ πρώτη: $\Delta x' = \alpha(1-\upsilon^2)$.

Μετροῦμεν τώρα τήν μονάδα μήκους κατά τόν x' ἐκ τοῦ S.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν:

$$\Delta x = 1/\alpha \ . \qquad (13)$$

Κατά τήν γ) προϋπόθεσιν $\Delta x = \Delta x'$

$$\text{ἄρα} \quad \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \qquad (14)$$

Τώρα αἱ (8) γράφονται :

$$x' = \pm \frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}}, \ y' = y, \ z' = z, \quad t' = \pm \frac{t-vx}{\sqrt{1-v^2}} \ . \qquad (15)$$

Διά v = 0 ὁ μετασχηματισμός πρέπει νά εἶναι ὁ ταυτοτικός.

Προφανῶς λοιπόν ἀπορρίπτεται τό (-) .

Ἄρα τελικῶς :

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}} \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{-vx+t}{\sqrt{1-v^2}} \end{aligned}} \qquad (16)$$

Ὁ ἀνωτέρω μετασχηματισμός γράφεται ὑπό μορφήν πίνακος :

$$L(v) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}} & 0 & 0 \\ \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

καί ἡ (16) ἰσοδυναμεῖ μέ

$$\begin{bmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = L(v) \begin{bmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad (17)$$

Ἀκόμη, ἄν θέσωμεν : $\tan h\varphi = v$

$$L(v)\ (\varphi) = \begin{bmatrix} \cos h\varphi & -\sin h\varphi & 0 & 0 \\ -\sin h\varphi & \cos h\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad (18)$$

ἡ ὁμάς τῶν μετασχηματισμῶν Lorentz παρουσιάζεται ὡς μία ὁμάς στροφῶν, εἰς τάς τέσσαρας διαστάσεις, τῆς ὁποίας αἱ γωνίαι κατά τά ἐπίπεδα χρόνου - χώρου εἶναι ὑπερβολικαί καθαρῶς φανταστικαί, αἱ δέ λοιπαί γωνίαι πραγματικαί.

Ἄσκησις 3-2. Ἐάν τό σύστημα S' κινεῖται ὡς πρός S μέ ταχύτητα $\vec{v}$ ὄχι ἀναγκαίως κατά τόν ἄξονα τῶν x, δείξατε ὅτι :

$$\vec{x}' = \frac{(\vec{x}.\vec{v}/v^2 - t)\,\vec{v}}{\sqrt{1-v^2}} + \left[\vec{x} - (\vec{x}.\vec{v}/v^2)\vec{v}\right]$$

$$t' = \frac{t - \vec{x}.\vec{v}}{\sqrt{1-v^2}} \qquad (19)$$

Οἱ ἄξονες τῶν S καί S' εἶναι παράλληλοι.

3.7. ΣΥΝΕΠΕΙΑΙ ΤΩΝ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ LORENTZ ΕΠΙ ΤΗΣ ΜΕΤΡΗΣΕΩΣ ΤΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ.

(i)) Συστολή μήκους. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (12) τῆς προηγουμένης παραγράφου ἔχομεν τήν τιμήν τῆς μονάδος τοῦ μήκους τοῦ S μετρουμένης ἐκ τοῦ S'

$$\Delta x' = \sqrt{1-v^2}$$

Παρατηροῦμεν δηλαδή μίαν συστολήν τοῦ μήκους.

Γενικῶς τώρα, ἐάν ῥάβδος ἔχει μῆκος L_o ὡς πρός τό S κατά τήν διεύθυνσιν τοῦ ἄξονος x, αὐτή θεωρουμένη ἐκ τοῦ S' ἔχει μῆκος :

$$L = L_o\sqrt{1-v^2} \qquad (1)$$

(ii) Διαστολή χρόνου. Ὑποθέσωμεν ὅτι εὑρισκόμεθα εἰς μίαν θέσιν x τοῦ συστήματος S καί μετρῶμεν χρόνον μεταξύ δύο συμβάντων Δt . Εἰς τό S' ἔχομεν (ἐκ τῶν (16) τῆς προηγουμένης παραγράφου)

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - v\Delta x}{\sqrt{1-v^2}} \qquad (2)$$

Ἐπειδή τώρα τά δύο συμβάντα λαμβάνουν χώραν εἰς τήν αὐτήν θέσιν : Δx = 0 ,

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-v^2}} \qquad (3)$$

Δηλαδή διά τόν κινούμενον παρατηρητήν $\Delta t' > \Delta t$, δεδομένου ὅτι $\sqrt{1-v^2} < 1$.

Παράδοξον τῶν διδύμων.

Ἐκ πρώτης ὄψεως αὐτή ἡ διαστολή τοῦ χρόνου ὁδηγεῖ εἰς τό παράδοξον τῶν διδύμων : Πράγματι, θεωρήσωμεν δύο διδύμους ἀδελφούς. Ὁ εἷς ἐξ αὐτῶν ἐκκινεῖ,κινεῖται ἐπί τι διάστημα μέ ταχύτητα v καί τελικῶς ἐπιστρέφει πλησίον τοῦ ἄλλου. Ὁ ταξιδιώτης εὑρίσκεται νά εἶναι νεώτερος τοῦ ἄλλου. Μία ἁπλῆ σκέψις καθ'ἥν ἀνά πᾶσαν στιγμήν ὑπάρχει μεταξύ των σχετική ταχύτης, ἄρα ἄν ὁ εἷς ἔχη διαστολήν χρόνου, τό αὐτό θά συμβαίνη καί διά τόν ἄλλον, μᾶς ὁδηγεῖ εἰς τό νά θεωρήσωμεν τό φαινόμενον ὡς παράδοξον. Ἀλλά ὁ ταξιδεύων ἀδελφός ἐπιταχύνεται ὅταν ἐκκινῆ καί ὅταν ἐπιστρέφη (ἀλλαγή ταχύτητος ἀπό $\vec{v}$ εἰς $-\vec{v}$). Ὥστε οἱ δύο ἀδελφοί δέν εἶναι σχετικιστικῶς ἰσοδύναμοι. Τό σύστημα ἠρεμίας τοῦ ταξιδεύοντος δέν εἶναι ἀδρανειακόν. Εἰς τά ἐπιταχυνόμενα συστήματα ἀναφορᾶς ἀναφέρεται ἡ Γενική Θεωρία τῆς Σχετικότητος.

3.8. ΔΙΑΣΤΟΛΗ ΧΡΟΝΟΥ ΕΙΣ ΠΕΔΙΟΝ ΒΑΡΥΤΗΤΟΣ.

Θεωρήσωμεν δύο συστήματα ἀναφορᾶς ἔχοντα κοινόν τόν ἄξονα z. Τό ἕν ἐξ αὐτῶν, ἔστω K, εἶναι ἀδρανειακόν. Τό δεύτερον K', περιστρέφεται περί τόν z-ἄξονα μέ σταθεράν γωνιακήν ταχύτητα ω. Θεωρήσωμεν περιφέρειαν ἐπί τοῦ $x'Oy'$ μέ ἀκτῖνα R καί κέντρον O. Θεωρήσωμεν ἕν στοιχειῶδες τμῆμα τῆς περιφερείας $d\ell$. Τό στιγμιαῖον σύστημα ἠρεμίας τοῦ $d\ell$ κινεῖται μέ ταχύτητα ωR. Ἄρα τό $d\ell$ φαίνεται ἐκ τοῦ K ἔχον μῆκος $d\ell' = \sqrt{1-\omega^2R^2}\; d\ell$ (Τό R παραμένει ἀναλλοίωτον δεδομένου ὅτι εἶναι συνεχῶς κάθετον ἐπί τήν ταχύτητα). Ἄρα τό μῆκος τῆς περιφερείας εἶναι :

$$\Gamma' = \sqrt{1-\omega^2 R^2}\;\Gamma , \qquad (1)$$

ἔνθα Γ τό μῆκος τῆς περιφερείας εἰς τό σύστημα ἠρεμίας. Ἐάν χρησιμοποιήσωμεν τό φυγοκεντρικόν δυναμικόν $\phi = \frac{-1}{2}\omega^2 R^2$ ἡ (1) γράφεται :

$$\Gamma' = \sqrt{1+2\varphi}\;\Gamma, \quad \text{ἤ}$$

$$\Gamma' = 2\pi\sqrt{1+2\varphi}\;R \qquad (2)$$

Δηλαδή εἰς τό K' ἡ γεωμετρία δέν εἶναι Εὐκλείδειος. Ἐπίσης διά τόν χρόνον ἔχομεν :

$\Phi = -\frac{GM}{r}$ (βαρυτ. δυναμ.)

$$dt' = \frac{dt}{\sqrt{1+2\varphi}} \qquad (3)$$

ανάποδα το t', t

Ἡ ἐξίσωσις αὐτή ἰσχύει καί ὅταν φ εἶναι δυναμικόν βαρύτητος βάσει τῆς ἀρχῆς τῆς ἰσοδυναμίας (μεταξύ πεδίων βαρύτητος καί πεδίων ἐπιταχ[illegible]

Ἄσκησις 3.3. Ἐκ δύο διδύμων ἀδελφῶν ὁ εἷς παραμένει ἀκίνητος εἰς τήν ἀρχήν τῶν ἀξόνων, O, ἀπό τῆς γεννήσεώς του. Ὁ ἕτερος ἐκκινεῖ εὐθυγράμμως καί ἰσοταχῶς μέ ταχύτητα $\vec{u}$, ἀφικνεῖται εἰς τόπον B καί ἐπιστρέφει εἰς O μέ τήν αὐτήν ταχύτητα $|\vec{u}|$ ἄνευ καθυστερήσεως εἰς B. Νά συγκριθοῦν αἱ ἡλικίαι ἀκινήτου καί ταξιδεύσαντος ἀδελφοῦ κατά τήν στιγμήν τῆς ἐπανασυναντήσεως τῶν θεωρούμεναι:

(α) Ἐκ τοῦ ἀδρανειακοῦ συστήματος ἀναφορᾶς τοῦ ἀκινήτου ἀδελφοῦ, καί

(β) Ἐκ τῶν δύο ἀδρανειακῶν συστημάτων ἠρεμίας τοῦ ταξιδεύσαντος ἀδελφοῦ.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.

Voigt, N. :"Über das Doppler'she Princip" Nachr.Ges.Wiss.Göttingen (1887), 41.

Lorentz, H.A. :"Electromagnetic Phenomena in a System Moving with a Velocity Less than That of Light", Proc. Academ.Sc.Amst. 6 (1904),869.

Poincaré, H. :"Sur la Dynamique de l'Electron", Rend. del Circ.Mat. di Pal. 21, (1906), 129.

Einstein, A. :"Zur Electrodynamik bewegter Körper", Ann. der Phys. 17 (1905), 891.

(Αἱ ἱστορικαί ἐργασίαι τῶν Lorentz καί Einstein εὑρίσκονται ἀγγλιστί εἰς τό "Principle of Relativity" Einstein and others. Dover. Τοῦ Poincaré εἰς τόν ἔνατον τόμον τῶν "Oeuvres de Henri Poincaré" Ganthier-Villars).

Berzi, V. and Gorini, V. : "Journ. of Math.Phys. 10, (1968), 1518.

Sadeh, D. :"Phys.Rev.Letters, 10 (1963), 271.

Aharoni, J. :"The Special Theory of Relativity" Oxford, 1965.

Χ Ω Ρ Ο Σ M I N K O W S K I.

4.1. Ο ΧΩΡΟΣ ΤΟΥ MINKOWSKI - ΤΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ ds.

Οἱ μετασχηματισμοί Lorentz διατηροῦν ἀναλλοίωτον τό :

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \qquad [1]$$

('Ασκ. 4.1.). Τό ds καλεῖται χωροχρονικόν διάστημα (interval). Τοῦτο ,ἀναλόγως τοῦ σχετικοῦ χωροχρονικοῦ χαρακτῆρος τῶν ἄκρων του, εἶναι θετικόν μηδέν ἤ καί καθαρῶς φανταστικόν ($ds^2 < 0$).

῎Ας θεωρήσωμεν τώρα τόν χῶρον τοῦ ὁποίου ἕκαστον σημεῖον εἶναι ἕνα συμβάν ἤ γεγονός (event). Τά συμβάντα καθορίζονται διά τῆς θέσεως καί τῆς χρονικῆς στιγμῆς καθ'ἥν συνέβησαν. Δηλαδή τά ἀνύσματα θέσεως τοῦ χώρου αὐτοῦ εἶναι $x^\mu = (x^0, \vec{x})$ ἔνθα $\vec{x}$ τό σύνηθες ἄνυσμα θέσεως είς τόν τριδιάστατον χῶρον, καί $x^0 = t$ ὁ χρόνος. Τό τετραδιάστατον συνεχές τῶν γεγονότων ὀνομάζομεν χῶρον τοῦ *Minkowski*

Ὁ χῶρος τοῦ *Minkowski* ὀνομάζεται ἐπίσης καί κόσμος (*world*). Κάθε ὑλικό σημειακό σωμάτιο, κατά τήν διάρκειαν τῆς ἱστορίας του, διαγράφει είς τόν κόσμον μίαν γραμμήν. Αὐτή καλεῖται κοσμική γραμμή (*world line*) τοῦ σημείου. Οἱ φυσικοί νόμοι δύνανται νά θεωρηθοῦν ὡς γεωμετρικαί ἰδιότητες καί σχέσεις μεταξύ τῶν διαφόρων κοσμικῶν γραμμῶν. Οὕτω είς τήν γλῶσσαν τοῦ τετραδιαστατου χώρου δυνάμεθα νά ὁμιλῶμεν περί τῆς γ ε ω μ ε τ ρ ο π ο ι ή σ ε ω ς τῆς Φυσικῆς.

Ἐπανερχόμεθα τώρα είς τό στοιχεῖον μήκους τοῦ χώρου τοῦ *Minkowski*. Κατόπιν τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ x^μ, ἡ (1) γράφεται :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \qquad (2)$$

ἔνθα $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1$, $g_{\mu\nu} = 0$, $\mu \neq \nu$.

Αἱ $g_{\mu\nu}$ εἶναι αἱ συνιστῶσαι τοῦ μετρικοῦ τανυστοῦ

τοῦ χώρου τοῦ *Minkowski* (είς καρτεσιανάς συντεταγμένας). Ὁ μετρικός τανυστής ἔχει τάς ἑξῆς ἰδιότητάς:

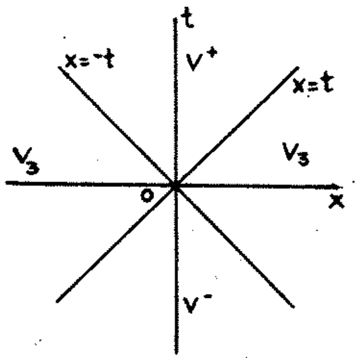
$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \quad , \qquad g^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu$$

Τό μέτρον ἑνός ἀνύσματος θέσεως x^μ τοῦ χώρου τοῦ *Minkowski* καθορίζεται συναρτήσει τοῦ ἐσωτερικοῦ γινομένου

$$x^\mu x_\mu = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu .$$

4.2. ΠΕΡΙΟΧΑΙ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ ΤΟΥ MINKOWSKI.

Ἡ κωνική ὑπερεπιφάνεια (τριδιάστατος) $x^\mu x_\mu = 0$ καλεῖται κῶνος φωτός τοῦ σημείου 0 (ὅπου x^μ ἄνυσμα θέσεως ἀναφορικῶς ὡς πρός 0) καί περιλάμβάνει δύο κώνους, τόν μελλοντικόν κῶνον φωτός $x^0 > 0$ καί τόν παρελθοντικόν κῶνον $x^0 < 0$ ἡνωμένους είς τό σημεῖο 0 . Ὁ κῶνος τοῦ φωτός διαιρεῖ τόν φυσικόν χῶρον τοῦ *Minkowski* είς τρεῖς περιοχάς V^+ , V^- , καί V_3. Ἡ περιοχή V^+ χαρακτηρίζεται ἐκ τοῦ $x^\mu x_\mu > 0$, $x^0 > 0$ καί καλεῖται κῶνος τοῦ μέλλοντος τοῦ σημείου 0 . Ἡ περιοχή V^-, $x^\mu x_\mu > 0, x^0 < 0$ ἀποτελεῖ τόν παρελθοντικόν κῶνον τοῦ O καί τό σύνολον τῶν σημείων τῆς V_3, $x^\mu x_\mu < 0$ ἀποτελεῖ τό ἀ λ λ α χ ο ῦ τοῦ O. Ἄν θεωρήσωμεν χάριν ἁπλότητος τήν περίπτωσιν μιᾶς χωρικῆς διατάξεως (σχ. 1) ὁ χῶρος τοῦ *Minkowski* εἶναι τό ἐπίπεδον (t, x) καί ὁ κῶνος τοῦ φωτός αἰεὐθεῖαι $x=t$, $x=-t$.



Παρατηροῦμεν ὅτι διά καταλλήλου συστήματος ἀναφορᾶς τυχόν συμβάν ἐντός τοῦ κώνου τοῦ φωτός δύναται νά τεθῇ εἰς τήν αὐτήν χωρικήν θέσιν μέ τό O.

Σχῆμα 8

Πράγματι τυχόν συμβάν (t,x) τῆς περιοχῆς V^+ παρατηρούμενον ἐξ ἑνός συστήματος ἀναφορᾶς S' κινούμενον μετά ταχύτητος U, $-1 < U = \frac{x}{t} < 1$, ὡς πρός τό S, λαμβάνει χώραν εἰς τήν αὐτήν (χωρικήν) θέσιν μετά τοῦO O. Τό αὐτό ἰσχύει καί διά τήν περιοχήν V^-.

Οἱ χαρακτηρισμοί μ ε λ λ ο ν τ ι κ ό ς , π α ρ ε λ θ ο ν τ ι κ ό ς ἔχουν ἀπόλυτον, *Lorentz* ἀναλλοίωτον,

σημασίαν. Τοῦτο ἕπεται ἀμέσως ἐκ τῆς προφανοῦς ἀνισότητος

$$tt' = \frac{t^2 - uxt}{\sqrt{1-u^2}} > \frac{t^2(1-|u||x|)}{\sqrt{1-u^2}} > 0$$

ὅπου t' ὁ χρόνος τοῦ συμβάντος (t, x) παρατηρουμένου ἐκ τυχόντος ἀδρανειακοῦ παρατηρητοῦ S' κινουμένου μέ ταχύτητα u ὡς πρός τό ἀρχικόν σύστημα S. Ἡ ἀπόλυτος χρονολογική διάταξις ἰσχύει ἐπίσης μεταξύ δύο τυχόντων σημείων, ἑνός ἐκ τοῦ μελλοντικοῦ καί ἑνός ἐκ τοῦ παρελθοντικοῦ κώνου (ἄσκ. 4.2.). Ἐν ἀντιδιαστολῇ, ἡ χρονολογική διάταξις μεταξύ τοῦ O καί τυχόντος σημείου τῆς περιοχῆς V_3 δέν εἶμαι ἀναλλοίωτος. Ὡς συμπέρασμα, τ ό σ η μ ε ῖ ο ν O ε ἶ ν α ι δ υ ν α τ ό ν ν ά σ υ ν δ ε θ ῇ α ἰ τ ι α τ ά μ ό ν ο ν μ ε τ ά τ ο ῦ μ ε λ λ ο ν τ ι κ ο ῦ κ ῶ ν ο υ .

Ἄσκησις 4.1. Δείξατε ὅτι οἱ μετασχηματισμοί *Lorentz* διατηροῦν ἀναλλοίωτον τό :

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Ἄσκησις 4.2. Δείξατε ὅτι ἡ χρονολογική διάταξις $t_2 > t_1$ ἑνός σημείου x_2 ἐντός ἑνός μελλοντικοῦ κώνου ὡς πρός σημεῖον x_1 ἐντός τοῦ συζυγοῦς παρελθοντικοῦ κώνου εἶναι ἀπόλυτος (ἀναλλοίωτος εἰς μετασχηματισμούς Lorentz) .

4.3. ΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ LORENTZ ΩΣ ΣΤΡΟΦΑΙ ΕΝ ΤΩ ΧΩΡΩ ΤΟΥ MINKOWSKI.

Ὡς παρετηρήθη εἰς τήν παραγραφον 4.1. οἱ μετασχηματισμοί Lorentz ἀφήνουν ἀναλλοίωτον τό ds^2 , τό ὁποῖον ἀποτελεῖ τό στοιχειῶδες μῆκος ἐν τῷ χώρῳ τοῦ Minkowski . Εἶναι γνωστόν ἐκ τῆς Γεωμετρίας ὅτι οἱ μετασχηματισμοί οἵτινες ἀφήνουν ἀναλλοίωτον τό ds^2 εἶναι στροφαί καί μεταθέσεις , δηλαδή γραμμικοί μετασχηματισμοί. Εἷς τέτοιος μετασχηματισμός δύναται νά γραφῆ ὡς ἑξῆς:

$$\begin{aligned} x^\mu &\longrightarrow x'^\mu \\ x'^\mu &= a^\mu_\nu x^\nu + \beta^\mu \end{aligned} \qquad (4)$$

ὅπου ὁ πίνακας $a^\mu{}_\nu$ ἱκανοποιεῖ τίς σχέσεις

$$g_{\mu\nu} \alpha^\mu_\xi \alpha^\nu_\eta = g_{\xi\eta} \qquad (5)$$

καί περιγράφει στροφάς εἰς τόν χῶρον τοῦ Minkowski

Μία στροφή τοῦ χώρου τοῦ Minkowski δύναται νά ἀναλυθῆ εἰς στροφάς εἰς τά ἐπίπεδα xy , yz , zx , tx , ty tz . Αἱ πρῶται τρεῖς περιστροφαί εἶναι συνήθεις στροφαί ἐν τῷ χώρῳ . Θεωρήσωμεν μίαν στροφήν εἰς τό ἐπίπεδον tx . Αἱ συντεταγμέναι z , y δέν ἐπηρεάζονται . Ὁ μετασχηματισμός πρέπει νά διατηρῆ τό

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

καί ἐπειδή τά dy^2 , dz^2 δέν μεταβάλλονται $dt^2 - dx^2 =$ σταθ. Δηλαδή ἡ στροφή αὐτή διαφέρει ἀπό μία στροφή στόν Εὐκλείδιο χῶρο ὡς πρός τό ὅτι ἡ τελευταία διατηρεῖ τό $dx^2 + dy^2$ διά μίαν στροφήν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ xy . Τούτου συνέπεια εἶναι τό ὅτι ἀντί τῶν συνήθων ἡμιτόνων καί συνημιτόνων ἐδῶ θά χρησιμοποιήσωμεν τά ὑπερβολικά τοιαῦτα.

Αἱ παλαιαί μέ τάς νέας συντεταγμένας συνδέονται διά τῆς σχέσεως

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\psi & -\sinh\psi \\ -\sinh\psi & -\cosh\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \qquad (6)$$

Ἡ (6) εἶναι ἰσοδύναμος μέ τήν (Κεφ. III.§ 16) ἐάν

$\tanh\psi = v$ (διά $c=1$). Δηλαδή ή (6) παριστᾶ ἕνα μετασχηματισμό Lorentz . Διά κάθε v δυνάμεθα νά εὕρωμεν ἕνα ψ καί νά γράφωμεν τόν μετασχηματισμόν Lorentz ὑπό τήν μορφήν (6) . Τό ἀντίστροφον ἐπίσης ἰσχύει διότι $|\tanh\psi| < 1$ διά κάθε ψ.

4.4. ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΙΣ ΤΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ ΚΑΤΑ ΤΟΥΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥΣ LORENTZ .

Αἱ ἔννοιαι τοῦ βαθμωτοῦ ,τοῦ συναλλοιώτου(covariant) καί ἀνταλλοιώτου (contravariant) ἀνύσματος δίδονται καί διά τόν χῶρον τοῦ Minkowski ὡς συνήθως .
Τά συναλλοίωτα ἀνύσματα τρέπονται εἰς ἀνταλλοίωτα καί ἀντιστρόφως μέ τήν βοήθειαν τοῦ μετρικοῦ τανυστοῦ $g_{\mu\nu}$:

$$A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu$$
$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$$

Τό ἐσωτερικόν γινόμενον ὁρίζεται ὡς:

$$A^\mu B_\mu = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = A^0 B^0 - A^1 B^1 - A^2 B^2 - A^3 B^3$$

Τοῦτο ,λόγω τῆς σχέσεως (5),παραμένει ἀναλλοίωτον εἰς μετασχηματισμούς Lorentz .

'Ακόμη κατατάσσομεν τά ἀνύσματα ἀναλόγως τοῦ προσήμου τοῦ τετραγώνου τοῦ μέτρου των. 'Εάν $A^\mu A_\mu > 0$ τότε τό A_μ λέγεται χρονοάνυσμα (time-like vector), ἐάν $A^\mu A_\mu < 0$ χωράνυσμα (space - like vector)καί ἐάν $A^\mu A_\mu = 0$ κεῖται ἐπί τοῦ κώνου φωτός (light - like vector).

Εἰς τόν χῶρον τοῦ Minkowski ὁρίζεται ἐπίσης καί διανυσματικός διαφορικός τελεστής ἀνάλογος τοῦ ἀνάδελτα :

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right)$$

"Ασκησις 4.3. : 'Ο χῶρος τοῦ Minkowski δύναται νά περιγραφῆ καί μέ καμπυλογράμμους συντεταγμένας. Τοῦτο πάντως ἰσχύει μόνον διά τό χωρικόν μέρος. Δείξατε ὅτι διά τόν μετρικόν τανυστήν τοῦ χώρου τοῦ Minkowski ἰσχύει πάντοτε : $g^{0i} = g^{i0} = 0 \quad i = 1,2,3,$

"Ασκησις 4.4. : Τό τετράνυσμα τῆς ταχύτητος ὁρίζεται ὡς . $U^\mu = \dfrac{dx^\mu}{ds}$
καί τῆς ἐπιταχύνσεως : $a^\mu = \dfrac{dU^\mu}{ds}$

Εὕρατε τήν σχέσιν τοῦ v^μ καί a^μ μέ τά $\vec{v}$ καί $\vec{a}$. Ποῖος ὁ χαρακτήρ τῶν v^μ καί a^μ , (εἶναι χρονοανύσματα ἤ χωροανύσματα ;)

Ἄσκησις 4. 5 . : **Δείξατε** ὅτι τό σύνολον τῶν μετασχηματισμῶν (4) ἀποτελεῖ ὁμάδα , μέ νόμον μεταθέσεως :

$$\left\{(a''^{\mu}_{\nu}),\, \beta''^{\mu}\right\} = \left\{(a'^{\mu}_{\sigma}),\beta'^{\mu}\right\}\cdot\left\{(a^{\sigma}_{\nu}),\beta^{\mu}\right\}$$

ἔνθα $a''^{\mu}_{\nu} = a'^{\mu}_{\sigma}a^{\sigma}_{\nu}$, $\beta''^{\mu} = a'^{\mu}_{\sigma}\beta^{\sigma} + \beta'^{\mu}$

Ἡ ὁμάς αὕτη ὀνομάζεται ὁμάς τοῦ Poincaré.

Ἄν θεωρήσωμεν τούς μετασχηματισμούς:

$$X'^{\mu} = a^{\mu}_{\nu}X^{\nu}$$

οὗτοι ἀποτελοῦν ὁμάδα (6-παραμετρικήν). Αὕτη εἶναι ἡ ὁμάς τοῦ Lorentz.

Μία ἰδιαιτέρα κατηγορία μετασχηματισμῶν τοῦ Lorentz εἶναι ἐκεῖνοι διά τούς ὁποίους $a^{0}_{0} > 0$. Ὀνομάζονται ὀρθόχρονοι, διότι δέν ἀλλάζουν τήν φοράν τῆς ροῆς τοῦ χρόνου ἀπό ἕν σύστημα εἰς ἄλλο.

Τό σύνολον τῶν ὀρθοχρόνων , μετασχηματισμῶν Lorentz ἀποτελεῖ ὑποομάδα τῆς γενικῆς ὁμάδος τοῦ Lorentz.

Ἄσκησις 4.6. : Νά ἀποδειχθῇ ἡ ἀνωτέρω πρότασις.

Εἰς τήν περίπτωσιν ὅπου ἡ $\vec{v}$ ἔχει συνιστῶσαν μόνον κατά τόν ἄξονα x , καί οἱ ἄξονες τῶν συστημάτων παραμένουν παράλληλοι, οἱ μετασχηματισμοί Lorentz ἔχουν τήν μορφήν (κεφ. III ἐξ.16), ἐνῶ μέ ἄξονας παραλλήλους καί τυχαίαν $\vec{v}$ ἔχουν τήν μορφήν (κεφ. III ἐξ. 19).Εἰς τήν πρώτην περίπτωσιν ἔχομεν τόν εἰδικόν μετασχηματισμόν Lorentz.

Ἄσκησις 4.6. Δείξατε ὅτι τό σύνολον τῶν εἰδικῶν μετασχηματισμῶν Lorentz εἶναι ὁμάς . Ἐκ τούτου νά συναχθῇ ὁ νόμος μετασχηματισμοῦ τῶν ταχυτήτων :

$$u' = \frac{u+v}{1+uv}$$

Ἐπίσης εἰς τήν περίπτωσιν τοῦ (κεφ. III, ἐξ. 19)

$$\vec{u}' = \frac{\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{v^2} - 1\right)\vec{v}}{1-\vec{u}\cdot\vec{v}} + \sqrt{1-v^2}\,\frac{\left(\vec{u} - \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{v^2}\vec{v}\right)}{1-\vec{u}\cdot\vec{v}} \quad (8)$$

'Από τήν (7) λαμβάνομεν $1-u'^2=\frac{(1-u^2)(1-v^2)}{(1+uv)^2}$ (9)

"Οταν $u<1$, $v<1$ ή (9) δίδει $u'<1$. Δηλαδη είς οίονδήποτε σύστημα άναφορᾶς u παραμένει μικροτέρα τῆς ταχύτητος τοῦ φωτός , ἤτοι οἱ μετασχηματισμοί τῆς μορφῆς αὐτῆς ἀποτελοῦν μίαν ὁμάδα .

'Εξετάζομεν τώρα τήν περίπτωσιν $v<1$,$u>1$ δηλαδή τήν περίπτωσιν σωματίου κινουμένου ταχύτερον τοῦ φωτός (ταχυονίου, tachyon), ὡς πρός ἕνα σύστημα ἀναφορᾶς. 'Η (9) δίδει $u'>1$. Δηλαδή τό αὐτό συμβαίνει καί γιά ὁποιοδήποτε σύστημα ἀναφορᾶς κινούμενον μέ $u<1$. "Αν θεωρήσωμεν ἕνα σωμάτιον κινούμενον μέ ταχύτητα $u<1$ ὡς πρός ἕνα σύστημα ἀναφορᾶς , τοῦτο φαίνεται ὡς ταχυόνιο ($u'>1$) ἀπό ταχυονικόν ($v>1$) σύστημα ἀναφορᾶς . Εἰς περίπτωσιν ὅμως ὅπου θεωροῦμεν ταχυόνιον ($u>1$) ἀπό ταχυονικόν σύστημα ἀναφορᾶς ($v>1$) τοῦτο φαίνεται κινούμενον μέ ταχύτητα $u'<1$. Δηλαδή τό σύνολον τῶν ταχυονικῶν μετασχηματισμῶν (μετασχηματισμοί Lorentz μέ $v>1$) δέν εἶναι κλειστόν ὡς πρός τήν σύνθεσιν (7), ἄρα δέν εἶναι ὁμάς .

'Εάν $u=1$, τότε $u'=1$. "Ητοι ἡ ταχύτης τοῦ φωτός εἶναι ἀναλλοίωτος δι'ὅλα τά συστήματα ἀναφορᾶς.

4.5 ΟΙ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΙ ΤΕΛΕΣΤΑΙ ΕΙΣ ΤΟΝ ΤΕΤΡΑΔΙΑΣΤΑΤΟΝ ΧΩΡΟΝ ΤΗΣ ΕΙΔΙΚΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΟΣ .

'Η Διαφορική Γεωμετρία είς τόν τετραδιάστατον χῶρον τῆς Εἰδικῆς Θεωρίας τῆς Σχετικότητος εἶναι τετριμμένη , λόγω τοῦ ψευδοευκλείδειου χαρακτῆρος τῆς τοπολογίας τοῦ χώρου αὐτοῦ . Οὕτω ἡ συναλλοίωτος παραγώγησις (βλ. ΗΛ. κεφ. Ι) ταυτίζεται μέ τήν συνήθη παραγώγησιν . 'Η μερική παραγώγησις $\frac{\partial}{\partial x^\mu}T_{\nu\rho\ldots\sigma}$ συναλλοιώτου τανυστικοῦ πεδίου m τάξεως μᾶς δίδει συναλλοίωτον τανυστικόν πεδίο $m+1$ τάξεως. 'Υπενθυμίζομεν , ὅτι εἰς γενικούς χώρους Riemann (ὡς π.χ. εἰς τήν Γενικήν Θεωρίαν τῆς Σχετικότητος ἤ Θεωρίαν τῆς Βαρύτητος κατά Einstein) ἡ μερική παραγώγισις τανυστικοῦ πεδίου , ἐξαιρουμένου τοῦ $\frac{\partial}{\partial x^\mu}\phi$,ὅπου $\phi(x)$ βαθμωτόν πεδίον , καί ὀλίγων ἄλλων περιπτώσεων, δέν όδηγεῖ εἰς τανυστικά πεδία.

Κατόπιν τοῦ ἀνωτέρω ,καί πρός οἰκονομίαν χώρου, αἱ πλεῖσται λεπτομέρειαι τῆς Διαφορικῆς Γεωμετρίας τοῦ χώρου τοῦ *Minkowski* εἰς τήν παροῦσαν παράγραφον παραλείπονται ὡς προφανεῖς καί περιοριζόμεθα κυρίως εἰς ὁλοκληρωτικάς σχέσεις καί εἰδικώτερον εἰς τό βασικῆς σημασίας θεώρημα τοῦ *Gauss* .

Θ Ε Ω Ρ Η Μ Α Τ Ο Υ G A U S S .

Τό κλασσικό θεώρημα τοῦ *Gauss* γενικεύται ἀμέσως εἰς τόν τετραδιάστατον χῶρον τοῦ *Lorentz* . 'Εν προκειμένω , ἄν $A^{\mu}(x)$ τυχόν ἀνυσματικόν πεδίον, ἔχομεν :

$$\int_{V_4} \partial_\mu A^{\mu}(x)\, d^4x = \int_{S_3(V_4)} A^{\mu} d\sigma_\mu \qquad (10)$$

ὅπου V_4 τυχοῦσα περιοχή ὄγκου(τεσσάρων διαστάσεων) καί $d\sigma^{\mu} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} d\xi_\nu d\eta_\rho d\zeta_\sigma$ στοιχεῖα ὑπερεπιφανειῶν (τριῶν διαστάσεων), τά ὁποῖα συνιστοῦν τήν ὑπερεπιφάνειαν $S_3(V_4)$, ἡ ὁποία περικλείει τόν ὄγκον V_4 ('Υποθέτομεν ἀνωτέρω ὅτι ἐντός τῆς περιοχῆς V_4 ἡ ἀπόκλισις $\partial_\mu A^{\mu}(x)$ τοῦ πεδίου A^{μ} εἶναι συ-

νεχής συνάρτησις τοῦ χ).

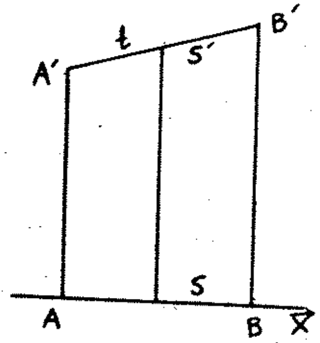
'Ε φ α ρ μ ο γ ή : Τό θεώρημα διατηρήσεως καί τοῦ ἀναλλοιώτου τοῦ ὁλικοῦ ἠλεκτρικοῦ φορτίου .

Δίδομεν κατωτέρω μίαν ἐφαρμογήν τοῦ θεωρήματος τοῦ *Gauss* εἰς τήν ἀπόδειξιν τῆς βασικῆς σημασίας θεωρήματος τῆς διατηρήσεως καί τοῦ ἀναλλοιώτου τοῦ ὁλικοῦ ἠλεκτρικοῦ φορτίου. Πρός τοῦτο θεωρήσωμεν ὅτι τό ἀνυσματικόν πεδίον εἶναι μηδενικῆς ἀποκλίσεως $\partial_\mu A^{\mu} = 0$, ὅπως π.χ. εἰς τήν περίπτωσιν ὅπου $A^{\mu} = (\rho, \vec{j})$, τό τετράνυσμα πυκνότητος φορτίου καί πυκνότητος ἠλεκτρικοῦ ρεύματος . 'Η ἐξίσωσις

$$\partial_\mu j^{\mu} = 0 \iff \frac{\partial}{\partial t}\rho + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0 \qquad (11)$$

ἀποτελεῖ τήν τοπικήν ἔκφρασιν τῆς διατηρήσεως τοῦ ἠλεκτρικοῦ φορτίου.

'Εφαρμόζομεν τό θεώρημα τοῦ *Gauss* δι'ἕνα πεπερασμένον κύλινδρον παράλληλον πρός τόν ἄξονα τοῦ χρόνου καί τοιοῦτον ὥστε ἐπί τῆς παραπλεύρουἐπιφανείας νά ἔχωμεν: $j^{\mu} = 0$. 'Ως βάσεις τοῦ κυλίνδρου θεωροῦμεν (διά τήν ἁπλότητα)τήν AB ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς $t = t_1 = 0$ καί τήν A΄B΄ἀντιστοιχοῦσαν εἰς $t' = t_2' =$ σταθερόν χρόνον



Σχ. 9

δι'ἕν νέον ἀδρανειακόν σύστημα ἀναφορᾶς. Ἔχομεν :

$$\int \partial_\mu j^\mu d^4x = 0 = \int\!\!\int j^\mu d\sigma_\mu = \int\!\!\int j^0 d\sigma_0 - \int\!\!\int j'^0 d\sigma'_0 = Q_{AB} - Q'_{A'B'} = 0$$

ὅπου Q_{AB}, $Q'_{A'B'}$ τά ἠλεκτρικά φορτία $\int \rho d^3x$ ἐντός τῶν χώρων AB, A'B' ἀντιστοίχως. Ἄν ἔχωμεν πεπερασμένην κατανομήν φορτίου εἰς τόν χῶρον καί οἱ χῶροι AB, A'B' εἶναι τόσον μεγάλοι ὥστε νά δύναται νά περιληφθῆ ὁλόκληρο τό φορτίο Q ἐντός αὐτῶν θά ἔχωμεν :

$$Q = Q_{AB} = Q'_{A'B'} = Q \qquad (12)$$

Εἰς τήν εἰδικήν περίπτωσιν ὅπου AB // A'B', δηλαδή ὅταν ἔχωμεν παράλληλον μετάθεσιν ὡς πρός τόν χρόνον, ἡ (12) ἐκφράζει τήν διατήρησιν ὁλικοῦ φορτίου παρατηρουμένου ἐξ ἑνός συστήματος ἀναφορᾶς. Ἐπί πλέον βεβαίως ἐδείχθη ὅτι τό ὁλικό φορτίο εἶναι βαθμωτό μέγεθος, ἤτοι παραμένει ἀναλλοίωτον ὡς πρός ὅλα τά συστήματα ἀναφορᾶς. Οὕτω π.χ. ὅλοι οἱ παρατηρηταί εὑρίσκουν τό αὐτό φορτίο τοῦ ἠλεκτρονίου $e = 4,8 \cdot 10^{-10}$ Η.Σ.Μ.-φορτίου

Γενικώτερον διά ἐφαρμογῆς τοῦ θεωρήματος τοῦ Gauss ἐξ ἑνός τανυστικοῦ πεδίου n τάξεως τό ὁποῖον διατηρεῖται τοπικῶς, $T^{\mu_1 \dots \mu_n}$

$$\partial_{\mu_1} T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} = 0$$

ἔχομεν ὅτι τό τανυστικόν φορτίον

διατηρεῖται καί εἶναι τανυστής $n-1$ τάξεως. Οὕτω π.χ. ἐκ τῆς τοπικῆς διατηρήσεως τανυστοῦ $T^{\mu\nu}$ τῆς ἐνεργείας καί ὁρμῆς προκύπτει ὁ ἀνυσματικός χαρακτήρ καί ἡ διατήρησις τῆς ὁλικῆς ἐνεργείας καί ὁρμῆς

$P^\mu = (E_{o\lambda} , \vec{P}_{o\lambda})$

$$P^\mu = \int T^{0\mu} (t, x)\, d^3x$$

Τά μεγέθη $E_{o\lambda}$ καί $\vec{P}_{o\lambda}$ δέν ἀλλάζουν συναρτήσει τοῦ χρόνου (διατηροῦνται), ἀλλά κατά τούς μετασχηματισμούς Lorentz μετασχηματίζονται ὡς συνιστῶσαι τετρανύσματος.

Π α ρ α τ ή ρ η σ ι ς : Εἰς τάς ἀνωτέρω ἐφαρμογάς τοῦ θεωρήματος τοῦ Gauss ἐθεωρήσαμεν διά τήν ἁπλότητα ἐπιπέδους ὑπερεπιφανείας $t =$ σταθ. ἤ $t' =$ σταθ. Τό αὐτό ἰσχύει προφανῶς καί ἐάν ἀντί τῆς ὑπερεπιφανείας

$t=$ σταθ. θεωρήσωμεν τυχοῦσαν ὑπερεπιφάνειαν τύπου χώρου., δηλ. ὁρίσωμεν τά φορτία Q διά τῆς σχέσεως :

$$Q = \int_{S_{\chi\acute{\omega}\rho o\upsilon}} j^{\mu}\, d\sigma_{\mu}$$

Θ ε ῶ ρ η μ α τ ο ῦ STOKES.

Χρησιμοποιοῦντες τόν ἀντισυμμετρικόν τανυστήν

$$d\Sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(d\xi_{\mu}\, d\eta_{\nu} - d\xi_{\nu}\, d\eta_{\mu}\right),$$

ὡς σ τ ο ι χ ε ῖ ο ν ἐ π ι φ α ν ε ί α ς τοῦ παραλληλογράμμου τό ὁποῖον ὁρίζουν δύο ἀνύσματα $d\xi_{\mu}$, $d\eta_{\nu}$ εἰς τόν τετραδιάστατον χῶρον , τό θεώρημα τοῦ STOKES ἐκφράζεται ὡς ἀκολούθως

$$\oint_{C} A^{\mu}\, dx_{\mu} = \iint_{S(C)} \left(\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x_{\nu}} - \frac{\partial A^{\nu}}{\partial x_{\mu}}\right) d\Sigma_{\mu\nu} \qquad (13)$$

ὅπου $S_{(C)}$ ἐπιφάνεια σπιθαμή τῆς κλειστῆς περιμέτρου C.

Τόν ἀνωτέρω τύπον ἐκφράζομεν συμβολικῶς καί ὡς ἀκολούθως διά νά ὑπενθυμίσωμεν τό κλασσικό θεώρημα STOKES.

$$\oint_{C} A\, dx = \int_{S(C)} (\Box \times A)\cdot d\Sigma$$

ὅπου $(\Box \times A)^{\mu\nu} \equiv \dfrac{\partial A^{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \dfrac{\partial A^{\nu}}{\partial x^{\mu}}$,

ὁ τετραδιάστατος στροβιλισμός , ἀντισυμμετρικός τανυστής δευτέρας τάξεως .

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

"Ο Π Τ Ι Κ Η"

5.1. ΑΠΟΠΛΑΝΗΣΙΣ ΤΟΥ ΦΩΤΟΣ.

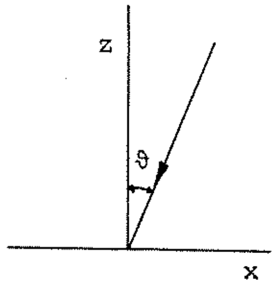
Μία ἐφαρμογή τῆς σχετικιστικῆς προσθέσεως ταχυτήτων εἶναι τό φαινόμενον ἀποπλανήσεως τοῦ φωτός.

Ἐάν δύο παρατηρηταί εὑρισκόμενοι εἰς δύο ἀδρανειακά συστήματα ἀναφορᾶς κινούμενα μέ σχετικήν ταχύτητα v παρατηροῦν ἀκτίνα φωτός, διαπιστώνουν ὅτι ἡ γωνία ἀκτίνος-γραμμῆς σχετικῆς κινήσεως τῶν δύο συστημάτων δέν εἶναι ἡ αὐτή. Ἐπειδή πάντως ἔχομεν φῶς δι'ἀμφοτέρους τούς παρατηρητάς $u^2 = u'^2 = 1$.

Ἔχομεν : $\vec{u} = \sin\vartheta\,\hat{x} + \cos\vartheta\,\hat{z}$ (1)

καί $\vec{u}' = \sin\vartheta'\hat{x} + \cos\vartheta'\hat{z}'$ (2)

'Αφ' ἑτέρου $\vec{v} = (v,0,0)$. 'Εφαρμόζοντες διά τά ἀνωτέρω τά περί τῆς σχετικιστικῆς προσθέσεως ταχυτήτων, λαμβάνομεν:



$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - u_x v} \qquad u'_z = \sqrt{1-v^2}\,\frac{u_z}{1 - u_x v} \qquad (3)$$

$$\text{ἤ} \quad \sin\vartheta' = \frac{\sin\vartheta - v}{1 - v\sin\vartheta} \qquad \cos\vartheta' = \sqrt{1-v^2}\,\frac{\cos\vartheta}{1-\sin\vartheta v} \qquad (4)$$

Σχ.10.

Κατόπιν τούτου :

$$tg.\vartheta' = \frac{\sin\vartheta - v}{\sqrt{1-v^2}\,\cos\vartheta} = \frac{tg\vartheta - v/\cos\vartheta}{\sqrt{1-v^2}} \qquad (5)$$

'Εκ τῆς τριγωνομετρίας εἶναι γνωστόν ὅτι :

$$tg\,\vartheta' = \frac{2tg\,\frac{\vartheta'}{2}}{1 - tg^2\frac{\vartheta'}{2}} \qquad (6)$$

'Εξ αὐτῆς : $tg\,\frac{\vartheta'}{2} = \frac{tg\,\vartheta'}{1+\sqrt{1+tg^2\vartheta'}}$ καί τελικῶς :

$$tg\,\frac{\vartheta'}{2} = \frac{\sin\vartheta - v}{\sqrt{1-v^2}\cos\vartheta} \Big/ \left[1 + \sqrt{1+\left(\frac{\sin\vartheta - v}{1-v^2\cos\vartheta}\right)^2}\,\right] \qquad (7)$$

5.2. ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΝ DOPPLER.

i) Κ λ α σ σ ι κ ῶ ς.

Θεωρήσωμεν ἐπίπεδον κῦμα :

$$e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{x})} .$$

Ἡ φάσις τοῦ κύματος εἶναι φυσικῶς ἕνα ἀναλλοίωτον μέγεθος. Ἤτοι :

$$\omega t - \vec{k}.\vec{x} = \omega' t' - \vec{k}'.\vec{x}' \qquad (2)$$

Τά τονούμενα ἀναφέρονται εἰς ἕτερον ἀδρανειακόν σύστημα κινούμενον ὡς πρός τό προηγούμενον μέ ταχύτητα $\vec{v}$. $\vec{k} = \frac{2\pi}{x}\hat{k}$ τό ἄνυσμα διαδόσεως.

Κατά τούς μετασχηματισμούς τοῦ Γαλιλαίου $t = t'$, $\vec{x}' = \vec{x} - \vec{v}t$ καί $k' = k$ διότι $\lambda' = \lambda$. Ἐάν θεωρήσωμεν τό $\vec{k} = \vec{k}'$ καί παράλληλον πρός τό $\hat{x}$ ἔχομεν :

$$\omega' t - \vec{k}'.(\vec{x} - \vec{v}t) = \omega t - \vec{k}.\vec{x}$$

$$\text{ἤ} \quad \omega' = \omega(1 - v\cos\vartheta) \qquad \cos\vartheta = \vec{k}.\vec{v} \qquad . \qquad (3)$$

ii) Σ χ ε τ ι κ ι σ τ ι κ ῶ ς.

Ἡ ἐξίσωσις (2) ἰσχύει καί ἐδῶ. Τώρα ὅμως ἐξ αὐτῆς συνάγομεν ὅτι τό $k^{\mu} = (\omega,\vec{k})$ εἶναι ἕνα τετράνυσμα. Γιά τό τετράνυσμα αὐτό ἰσχύουν οἱ μετασχηματισμοί Lorentz ὅταν μεταβαίνωμεν άπό ἕν σύστημα ἀναφορᾶς (ἀδρανειακόν), εἰς ἄλλον. Καί διά τήν μηδενικήν συνιστῶσαν, τήν συχνότητα :

$$\omega' = \frac{\omega - \vec{v}.\vec{k}}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{\omega\left(1 - \frac{\vec{v}.\vec{k}}{\omega}\right)}{\sqrt{1-v^2}} ,$$

$$\omega' = \frac{\omega(1 - v\cos\vartheta)}{\sqrt{1-v^2}} , \quad \cos\vartheta = \hat{v}.\hat{k} \quad . \quad (4)$$

5.3. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ LORENTZ ΜΗΔΕΝΙΚΗΣ ΑΠΟΠΛΑΝΗΣΕΩΣ ΚΑΙ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΥ DOPPLER.

Κατωτέρω δίδονται τρεῖς μετασχηματισμοί Lorentz διά τούς ὁποίους ἔχομεν μηδενικήν ἀποπλάνησιν καί μετατόπισιν Doppler :

$$T_1(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\alpha^2}{2} & 1 & 0 & -\frac{\alpha^2}{2} \\ \alpha & 1 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\alpha^2}{2} & \alpha & 0 & 1 - \frac{\alpha^2}{2} \end{bmatrix}$$

$$T_2(\beta) = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\beta^2}{2} & 0 & \beta & -\frac{\beta^2}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & 1 & -\beta \\ \frac{\beta^2}{2} & 0 & \beta & 1 - \frac{\beta^2}{2} \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

"Δ Υ Ν Α Μ Ι Κ Η"

6.1. ΟΡΜΗ.

Εἰς τήν Κλασσικήν Μηχανικήν ἔχομεν τά διάφορα θεωρήματα διατηρήσεως, τά ὁποῖα εἶναι συνέπειαι συμμετριῶν τῆς φύσεως. Οὕτω τό ἀναλλοίωτον τῶν φυσικῶν νόμων εἰς χωρικήν μετάθεσιν ὁδηγεῖ εἰς τήν διατήρησιν τῆς ὁρμῆς, εἰς χρονικήν μετάθεσιν εἰς τήν διατήρησιν τῆς ἐνεργείας καί εἰς περιστροφήν εἰς τήν διατήρησιν τῆς στροφορμῆς.

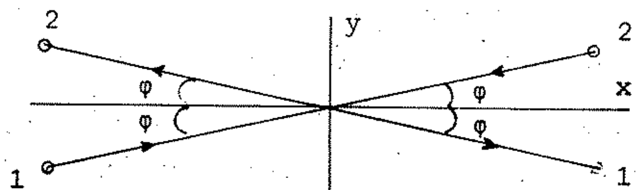
Ἐπειδή ἡ συμμετρία μεταθέσεως εἰς τόν χωροχρόνον καί στροφῆς εἰς τόν χῶρον ἀποτελοῦν βασικές ὑποθέσεις καί εἰς τήν Εἰδικήν Θεωρίαν Σχετικότητος θά πρέπει τά μεγέθη αὐτά νά διατηροῦνται καί εἰς τήν νέαν θεωρίαν.

Γεννᾶται τώρα τό ἐρώτημα : πῶς ὁρίζονται ἡ ὁρμή καί ἡ ἐνέργεια εἰς τήν σχετικιστικήν δυναμικήν; θά ἐξετάσωμεν πρῶτα τήν ὁρμήν. Εἶναι εὔλογον νά ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ὁρμή $\vec{p}$ ὑλικοῦ σημείου συνδέεται μετά τῆς ταχύτητος λόγῳ τοῦ ἀνυσματικοῦ χαρακτῆρος της, διά μιᾶς σχέσεως τῆς μορφῆς:

$$\vec{p} = \mu(m,v)\vec{v} \, . \qquad (1)$$

Ἡ $\mu(m,v)$ εἶναι συνάρτησις τοῦ μέτρου τῆς ταχύτητος καί τῆς κλασσικῆς μάζης m τοῦ σωματίου. Διά μικρές ταχύτητες θά πρέπει νά ἔχωμεν $\vec{p} = m\vec{v}$. Νορμαλίζομεν λοιπόν τήν συνάρτησιν $\mu(m,0) = m$. Ἡ συνάρτησις $\mu(m,v)$ πρέπει νά εἶναι τοιαύτη ὥστε νά ἐξασφαλίζεται τό συναλλοίωτον τῆς διατηρήσεως τῆς ὁρμῆς. Ἐν προκειμένῳ ἡ διατήρησις τῆς ὁρμῆς εἰς ἕνα σύστημα ἀναφορᾶς νά συνεπάγεται τήν διατήρησίν της εἰς ὅλα τά ἀδρανειακά συστήματα ἀναφορᾶς. Ἡ ἀπαίτησις αὕτη ἀρκεῖ διά τόν πλήρη καθορισμόν τῆς συναρτήσεως $\mu(m,v)$ καί ἑπομένως καί τῆς ὁρμῆς.

Πράγματι θεωρήσωμεν ἐλαστικήν κροῦσιν δύο ὁμοίων ὑλικῶν σημείων εἰς τό σύστημα "κέντρου μάζης"



Σχ. 11

Αἱ ἐξισώσεις κινήσεως εἶναι (ἡ κροῦσις λαμβάνει χώραν ὅταν $t = 0$):

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= at = -x_2 \\ y_1 &= bt = -y_2 \end{aligned}\right\} \quad t<0 \qquad \begin{aligned} v_{1x} &= -v_{2x} = a \\ v_{1y} &= -v_{2y} = b \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= at = -x_2 \\ y_1 &= -bt = -y_2 \end{aligned}\right\} \quad t>0 \qquad \begin{aligned} v_{1x} &= -v_{2x} = a \\ v_{1y} &= -v_{2y} = -b \end{aligned} \qquad (2)$$

Συμφώνως πρός τήν (1) ἡ διατήρησις τῆς ὁρμῆς γράφεται :

$$\left(\mu(m,v_1)\vec{v}_1+\mu(m,v_2)\vec{v}_2\right)\Big|_{t<0} = \left(\mu(m,v_1)\vec{v}_1+\mu(m,v_2)\vec{v}_2\right)\Big|_{t>0} \qquad (3)$$

Τό ἀνωτέρω φαινόμενον παρατηροῦμεν καί ἐκ συστήματος ἀναφορᾶς S' κινουμένου μέ ταχύτητα $a\vec{i}$ περιγραφόμενον ὑπό τῶν ἐξισώσεων :

$$\left.\begin{aligned} x'_1 &= 0 & x'_2 &= -\frac{2at'}{1+a^2} \\ y'_1 &= \frac{bt'}{\sqrt{1-a^2}} & y'_2 &= -\frac{\sqrt{1-a^2}\,bt'}{1+a^2} \end{aligned}\right\} \quad t'<0$$

$$\left.\begin{aligned} x'_1 &= 0 & x'_2 &= -\frac{2at'}{1+a^2} \\ y'_1 &= -\frac{bt'}{\sqrt{1-a^2}} & y'_2 &= \frac{\sqrt{1-a^2}\,bt'}{1+a^2} \end{aligned}\right\} \quad t'>0 \qquad (4)$$

ἔνθα

$$x' = \frac{x-at}{\sqrt{1-a^2}} \qquad t' = \frac{-ax+t}{\sqrt{1-a^2}} . \quad (5)$$

Ἡ διατήρησις τῆς ὁρμῆς κατά τόν ἄξονα y' τοῦ S' ἐάν θέσωμεν $b \to 0$ μᾶς δίδει :

$$\mu(m,0) = \frac{1-a^2}{1+a^2}\,\mu\left(m, \frac{2a}{1+a^2}\right) . \quad \mathbf{(6)}$$

Ἐφ'ὅσον δέ $\mu(m,0) = m$ ἡ (6) γίνεται

$$\mu(m,v) = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}} \quad (7)$$

ἔνθα ἐτέθη $v = \frac{2a}{1+a^2}$. Τήν m θά καλοῦμεν μᾶζα ἠρεμίας τοῦ σώματος.

Κατόπιν τῆς (7) ἡ ὁρμή γράφεται :

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2}} \quad (8)$$

Εἶναι προφανές ὅτι ὅταν $v << 1$, $\vec{p} = m\vec{v}$.

6.2. Η ΕΝΕΡΓΕΙΑ.

Γνωρίζομεν ὅτι διά τήν κινητικήν ἐνέργειαν T ἔχομεν :

$$\frac{dT}{dt} = \vec{F}.\vec{v} = \frac{d\vec{p}}{dt}.\vec{v} \quad (1)$$

Κατόπιν τῆς ἐξισώσεως (6.1.8) ἡ (1) δίδει :

$$\frac{dT}{dt} = \vec{F}.\vec{v} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{\sqrt{1-v^2}}\right) ,$$

καί ἐξ αὐτῆς :

$$T = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}} + C$$

Πρός καθορισμόν τῆς σταθερᾶς ὁλοκληρώσεως καταφεύγομεν εἰς τό εὔλογον ἐπιχείρημα ὅτι ὅταν $v = 0$, $T = 0$. Κατόπιν τούτου λαμβάνομεν $C = -m$ καί

$$T = m\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}} - 1\right) . \quad (2)$$

6.3. β' ΤΡΟΠΟΣ - ΤΟ ΤΕΤΡΑΝΥΣΜΑ ΤΗΣ ΟΡΜΗΣ.

Εἰς τήν σχετικιστικήν ἔκφρασιν τῆς ἐνεργείας καί τῆς ὁρμῆς ἑνός ὑλικοῦ σημείου δυνάμεθα νά φθάσωμεν καί ὡς ἑξῆς : Ἀναζητῶμεν ἕν ἀναλλοίωτον μέγεθος τοῦ ὁποίου αἱ χωρικαί συνιστῶσαι νά μᾶς παρέχουν τήν ὁρμήν εἰς οἱονδήποτε σύστημα ἀναφορᾶς. Τό συναλλοίωτον τοῦτο μέγεθος θά πρέπει νά εἶναι τετράνυσμα(*).

Εἰς τό σύστημα ἠρεμίας τοῦ σωματίου $\vec{p} = 0$. Ἐάν εἰς τό σύστημα αὐτό $p^{\mu}=(0,\vec{0})$ τό $p^{\mu} = 0$ δι'ὅλα τά συστήματα ἀναφορᾶς. Θέτω λοιπόν $p^{\mu} = (A,\vec{0})$ ἔνθα A μία σταθερά. Γιά ἕνα ἄλλο σύστημα ἀναφορᾶς ἔχω :

$$p'^{\mu} = \left[\frac{A}{\sqrt{1-v^2}} , \frac{A\vec{v}}{\sqrt{1-v^2}}\right] \qquad (1)$$

ὅταν $v \ll 1$, $\vec{p} = \frac{A\vec{v}}{\sqrt{1-v^2}} \sim A\vec{v}$. Ὥστε διά μικρές ταχύτητες ἡ σχετικιστική ἔκφρασις τῆς ὁρμῆς εἶναι ἀνάλογος τῆς κλασσικῆς μορφῆς ἐάν $A = m$. Καί τό τετράνυσμα τῆς ὁρμῆς εἶναι γενικῶς :

$$p^{\mu} = \left(\frac{m}{\sqrt{1-v^2}} , \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2}}\right) \qquad (2)$$

Ἐκ τῆς (2) παρατηροῦμεν ὅτι τό χωρικόν μέρος τοῦ p^{μ} εἶναι ἀκριβῶς ἡ ὁρμή ὅπως ἐδόθη εἰς τήν (6.1.8). Ἡ p^{0} διά μικρά v καί προσέγγισιν ὡς πρός v^2 γίνεται :

(*) Ἡ μόνη ὑπολοιπομένη δυνατότης εἶναι ἕνας ἀντισυμμετρικός τανυστής 2ας τάξεως $T^{\mu\nu} = -T^{\nu\mu}$ αὐτόδυϊκός (self-dual) ἤ ἀντιαυτοδυϊκός (antiselfdual). Εἰς τό σύστημα ἠρεμίας τοῦ σωματίου ἔνθα $\vec{p} = 0$, θά εἶναι $T^{\mu\nu} = 0$ καί ὁ $T^{\mu\nu} = 0$ εἰς ὅλα τά συστήματα ἀναφορᾶς.

$$p^{o} = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}} \simeq m + \frac{1}{2}\, mv^2 \qquad (3)$$

Ὁ δεύτερος ὅρος εἶναι ἡ κινητική ἐνέργεια, καί κατόπιν τούτου εἶναι εὔλογος ὁ συσχετισμός τοῦ p^{o} μέ τήν ἐ ν έ ρ γ ε ι α ν τοῦ ὑλικοῦ σωματίου. Τό p^{o} εἶναι :

$$p^{o} = m + T = E , \qquad (4)$$

καί τό m καλεῖται ἐ ν έ ρ γ ε ι α ἠ ρ ε μ ί α ς. Τό p^{o} δέν εἶναι δυνατόν νά ταυτισθῆ μέ τήν T διότι ἡ T εἶναι 0 εἰς τό σύστημα ἠρεμίας.

Τό τετράγωνον τοῦ μέτρου τοῦ τετρανύσματος p^{μ}, $p^{\mu}p_{\mu} = (p^{o})^2 - \vec{p}^{\,2}$ διατηρεῖται ἀναλλοίωτον εἰς τούς μετασχηματισμούς Lorentz καί εἶναι :

$$p^{\mu}p_{\mu} = (p^{o})^2 - \vec{p}^{\,2} = E^2 - p^2 = m^2, \qquad (5)$$

$$E^2 = p^2 + m^2. \qquad (5\alpha)$$

Ἡ σχέσις (5) δύναται νά ληφθῆ καί ὡς ὁρισμός τῆς μάζης. Ὁρίζομεν δηλαδή τήν ἀδρανειακήν μᾶζαν ὡς τό "μῆκος" τοῦ τετρανύσματος ἐνεργείας ὁρμῆς.

Ἀπό τήν (2) παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ταχύτης τοῦ ὑλικοῦ σημείου δίδεται ἀπό τήν σχέσιν :

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}}{p^{o}} = \frac{\vec{p}}{E} \qquad (6)$$

6.4. ΦΩΤΟΝΙΑ-ΤΑΧΥΟΝΙΑ

Πλήν τῶν τετρανυσμάτων τά ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν εἰς σωμάτια μέ μᾶζαν $m^2 > 0$ (κατηγορία (i)), καί τά ὁποῖα ὡς εἴδομεν ἀναφερόμενα εἰς τό σύστημα ἠρεμίας τοῦ σωματίου λαμβάνουν τήν μορφήν : $(m,\vec{0})$ ὑπάρχουν καί αἱ ἑξῆς ἄλλαι κατηγορίαι τετρανυσμάτων :

(ii) Τετρανύσματα τά ὁποῖα εἰς ἕν σύστημα ἀναφορᾶς ἔχουν τήν μορφήν $(\lambda,0,0,\lambda)$. Τά σωμάτια αὐτά ἔχουν ταχύτητα $|\vec{p}/p_o| = 1$ καί μᾶζαν ἠρεμίας $\lambda^2 - \lambda^2 = 0$. Τοιαῦτα τετρανύσματα χρησιμοποιοῦνται διά τήν περιγραφήν τῆς ἐνεργείας καί ὁρμῆς σωματίων μηδενικῆς μάζης ἠρεμίας, φωτονίων, νετρίνων, γκραβιτονίων.

(iii). Τετρανύσματα διά τά ὁποῖα $p^\mu p_\mu < 0$. Τοιαῦτα σωμάτια θά εἶχον ταχύτητα μεγαλυτέραν τῆς ταχύτητος τοῦ φωτός (ταχυόνια). Δι'ἕν ταχυόνιον ὑπάρχει σύστημα ἀναφορᾶς διά τό ὁποῖον $p^\mu = (0,0,0,k)$ καί ἡ ταχύτης του εἶναι ἄπειρος.

Αἱ περιπτώσεις (i), (ii) καί (iii) ἐξαντλοῦν ὅλες τίς δυνατές κατηγορίες πραγματικῶν τετρανυσμάτων ἐνεργείας ὁρμῆς.

6.5. Η ΕΞΙΣΩΣΙΣ ΚΙΝΗΣΕΩΣ.

Ἡ κατάστασις ἐλευθέρου ὑλικοῦ σημείου καθορίζεται πλήρως καί μονοσημάντως ἐκ δύο παραμέτρων ἀρχικῶν συνθηκῶν, τῆς

θέσεως καί τῆς ταχύτητος τοῦ ὑλικοῦ σημείου εἰς μίαν χρονικήν στιγμήν.

Ὁ δυναμικός νόμος εἰς τήν θεωρίαν τῆς Σχετικότητος θά ἐκφράζη τήν χρονικήν ἐξέλιξιν τῶν καταστάσεων ἑνός ὑλικοῦ σημείου συναρτήσει τῶν δυνάμεων, αἰτίων ἀλλαγῆς τῶν καταστάσεων.

Διά νά ἔχωμεν μίαν αἰτιατήν σύνδεσιν μεταξύ ἀρχικῆς καί τελικῆς καταστάσεως θά πρέπει ὁ δυναμικός νόμος νά εἶναι διαφορική ἐξίσωσις δευτέρας τάξεως τῆς θέσεως ὡς πρός τόν χρόνον (Κεφ.I), ἤτοι:

$$A(\vec{x},\vec{v})\,\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} + B(\vec{x},\vec{v})\left(\vec{v}.\frac{d^2\vec{x}}{dt^2}\right)\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}(t) \quad . (1)$$

Ἐκ τῆς ὁμογενείας καί ἰσοτροπίας τοῦ χώρου $A(\vec{\ },\vec{v}) = A(\vec{v})$ καί $B(\vec{x},\vec{v}) = B(\vec{v})$. Ἀκόμη, ἀπό τόν νόμον τῆς ἀδρανείας ὅστις ἰσχύει πάντοτε διά $\vec{F} = 0$ θά πρέπει νά ἔχωμεν $\vec{v}$ = σταθ.

Θέτομεν

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}}\left\{\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} + \frac{1}{1-v^2}\left(\vec{v}.\frac{d^2\vec{x}}{dt^2}\right)\frac{d\vec{x}}{dt}\right\} . (2)$$

Ἡ (2) εἶναι τῆς μορφῆς (1) μέ προσδιορι ἐν .ς τάς σταθεράς. Διά $v \ll 1$ λαμβάνομεν τόν νόμον τοῦ Νεύτωνος:

$$m\,\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \vec{F} \quad (3)$$

Νεύτωνος.

6.6. Ο ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΝΟΜΟΣ, β' ΤΡΟΠΟΣ.

Δυνάμεθα νά φθάσωμεν εἰς τόν δυναμικόν νόμον ἐκκινοῦντες ἀπό τά ἑξῆς ἀξιώματα :

α) Ἐλεύθερα ὑλικά σημεῖα κινοῦνται εὐθυγράμμως καί ἰσοταχῶς.

β) Τά ὑλικά σημεῖα κινοῦνται μέ ταχύτητες μικρότερες τῆς ταχύτητος τοῦ φωτός.

Ἐκ τῆς δευτέρας προτάσεως ἔπεται ὅτι ἡ χρονολογική διάταξις τῶν γεγονότων (t,x) μιᾶς τροχιᾶς ὑλικοῦ σημείου εἶναι ἀναλλοίωτος εἰς μετασχηματισμούς Lorentz. Ἄρα ἡ συνήθης "σχέσις αἰτιατοῦ" (χρονολογική διάταξις αἰτίου καί ἀποτελέσματος, ἐν προκειμένῳ δυνάμεως καί ἀλλαγῆς ταχύτητος τοῦ ὑλικοῦ σημείου) παραμένει ἀναλλοίωτος εἰς μετασχηματισμούς Lorentz.

Ἐξ ἄλλου ἐπειδή $d\tau/dt = \sqrt{1-v^2} > 0$, παρατηροῦμεν ὅτι τά γεγονότα μιᾶς τροχιᾶς ὑλικοῦ σημείου διατάσσονται χρονολογικῶς κατά τόν αὐτόν τρόπον ἄν χρησιμοποιηθῆ ὡς παράμετρος ὁ ἰδιόχρονος (proper time) $\tau = \int \sqrt{1-v^2}dt$ τοῦ ὑλικοῦ σημείου. Ἡ παράμετρος τ ἔχει καί τό προσόν νά εἶναι Lorentz ἀναλλοίωτος ὥστε εἶναι ἡ πλέον κατάλληλος μεταβλητή διά τήν διατύπωσιν τοῦ δυναμικοῦ νόμου.

Μέ συλλογισμόν ἀνάλογον μέ τόν τῆς κλασσικῆς Μηχανικῆς

(βλ. Μηχανική, Τ.1, Κεφ. Ι), φθάνομεν εἰς τήν ἐξίσωσιν

$$A\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = F^\mu , \qquad (1)$$

τό χωρικόν μέρος τῆς ὁποίας εἶναι

$$A\frac{d^2\vec{x}}{d\tau^2} = \vec{F} . \qquad (2)$$

Ἐπειδή τό τ εἶναι βαθμωτόν, τό x^μ τετράνυσμα καί τό F^μ ὁρίζεται ὡς τετράνυσμα τῆς δυνάμεως ἡ A εἶναι μία Lorentz σταθερά ὅπως ἡ m εἰς τήν ἐξίσωσιν $md^2\vec{x}/dt^2 = \vec{F}$. Ἐπειδή διά μικρές ταχύτητες ἡ (2) πρέπει νά δίδη τόν νόμον τοῦ Νεύτωνος, $A = m$ καί ὁ δυναμικός νόμος γράφεται :

$$m\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = F^\mu . \qquad (3)$$

Αὕτη γράφεται ἀκόμη καί ὡς :

$$F^\mu = m\frac{d}{d\tau}\left(\frac{dx^\mu}{d\tau}\right) = \frac{d}{d\tau}\left(m\frac{dx^\mu}{d\tau}\right) = \frac{dp^\mu}{d\tau} , \qquad (4)$$

εἰς ἀντιστοιχίαν τοῦ γνωστοῦ νόμου $\vec{F} = d\vec{p}/dt$. Πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τά μέλη τῆς (4) ἐπί p_μ λαμβάνομεν :

$$p\mu\ F^{\mu} = p\mu \frac{dp^{\mu}}{d\tau} = \frac{1}{2}\ \frac{d(p\mu p^{\mu})}{d\tau} = \frac{1}{2}\ \frac{d(m^2)}{d\tau} \quad . \qquad (5)$$

Ἡ σχέσις m = σταθ. ἰσοδυναμεῖ μέ $p^{\mu}F\mu \Rightarrow 0$, ἤτοι ὀρθογωνιότητα τῶν τετρανυσμάτων $p\mu$, F^{μ}.

Δύναμις τῆς μορφῆς $F^{\mu} = u_{\nu}F^{\mu\nu}$, ἔνθα u^{ν} τό τετράνυσμα τῆς ταχύτητος καί $F^{\mu\nu}$ ἀντισυμμετρικός τανυστής, ἀφήνει τήν μᾶζαν ἀναλλοίωτον. Προκειμένου περί δυνάμεων $F^{\mu} = G^{\mu\nu} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x^{\nu}}$, ἔνθα τό φ βαθμωτόν κατά Lorentz, ἤ $F^{\mu} = u_{\nu}\ G^{\mu\nu}$ ἔνθα $G^{\mu\nu}$ συμμετρικός τανυστής τό m δέν διατηρεῖται ἐν γένει.

Ἄ σ κ η σ ι ς 6-1. Δείξατε τήν ἀλήθειαν τῆς ἀνωτέρω προτάσεως.

Ἄ σ κ η σ ι ς 6-2. Νά περιγραφῆ σχετικιστικῶς τό φαινόμενον ompton.

6.7. ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ

Εἰς τήν παροῦσαν παράγραφον θά ἀσχοληθῶμεν μέ τήν διατύπωσιν τοῦ Σχετικιστικοῦ νόμου τῆς κινήσεως ὑλικῶν σημείων ὑπό μορφήν ἐξισώσεων Lagrange, ἤ ἐξισώσεων Γεωδαισιακῶν γραμμῶν, βασιζομένων ἐπί μιᾶς ἀρχῆς "στασίμου" δράσεως, κατ'ἀναλογίαν τῆς κλασσικῆς Ἀναλυτικῆς Δυναμικῆς (βλ. Μηχανική-Τ.2, Κεφ. II).

Τό σχετικιστικῶς ἀναλλοίωτον τῶν ἐξισώσεων τῆς κινήσεως, ἐν προκειμένῳ, θά ἐξασφαλίζεται διά καταλλήλου ἐκλογῆς μιᾶς Lorentz ἀναλλοιώτου συναρτήσεως Lagrange L καί χρησιμοποιήσεως ὡς στοιχείου ὁλοκληρώσεως τοῦ ἀναλλοιώτου $ds = \sqrt{(dt)^2-dx^2}$ ἀντί τοῦ dt τῆς Μηχανικῆς τοῦ Νεύτωνος.

Ἔστω, π.χ., ὅτι ἐπιθυμοῦμεν τήν ἐξίσωσιν κινήσεως ἐλευθέρου ὑλικοῦ σωματίου. Ἡ ἁπλουστέρα δυνατή Lagrangian εἶναι μία Lorentz ἀναλλοίωτος σταθερά, ἔστω $-m$, τῆς ὁποίας τήν φυσικήν ἑρμηνείαν θά ἴδωμεν μετ'ὀλίγον.(Ἐλεύθερον σωμάτιον σημαίνει ὁμογένειαν καί ἰσοτροπίαν τοῦ χώρου ὥστε ἡ Lagrangian δέν ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν συντεταγμένων θέσεως τοῦ σωματίου).

Αἱ ἐξισώσεις τῆς κινήσεως θά καθιστοῦν στάσιμον, $\delta I = 0$, τό ὁλοκλήρωμα τῆς Lorentz ἀναλλοιώτου δράσεως

$$I(x(s)) = -\int_{s_1}^{s_2} m ds = -\int_{t_1}^{t_2} m\sqrt{1-(\frac{dx}{dt})^2}\, dt. \qquad (1)$$

Τό ἀνωτέρω ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα εἶναι συνάρτησις τοῦ "δυνατοῦ δρόμου" $x^{\mu}(s)$ εἰς τόν χωρόχρονον τοῦ Minkowski.

Ἐξ ἄλλου συναλλοιώτως μορφή $I = -\int m ds$ τῆς δράσεως (1) συνδέει ἀμέσως τήν τροχιάν τῶν ὑλικῶν σημείων μέ τάς Γεωδαισιακάς γραμμάς τοῦ χώρου,

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{ds^2} + \Gamma^{\mu}_{\nu\rho} \frac{dx^{\nu}}{ds} \frac{dx^{\rho}}{ds} = 0, \qquad (2)$$

ὅπου

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\rho} = \frac{g^{\mu\sigma}}{2}\left\{ \frac{\partial}{\partial x_{\rho}} g_{\sigma\nu} + \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} g_{\sigma\mu} - \frac{\partial}{\partial x_{\sigma}} g_{\nu\rho} \right\}. \quad (3)$$

Εἰς τόν ψευδοευκλείδειον χῶρον τοῦ Minkowski τῆς Εἰδικῆς θεωρίας τῆς Σχετικότητος

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\varphi} = 0 \quad , \qquad (4)$$

καί αἱ Γεωδαισιακαί γραμμαί εἶναι ἁπλαῖ εὐθεῖαι

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{ds^2} = 0 \quad , \qquad (5)$$

Λόγῳ τοῦ "μή ὁριστικά θετικοῦ" τοῦ μετρικοῦ τανυστοῦ τῆς Εἰδικῆς θεωρίας τῆς Σχετικότητος διακρίνομεν τρία εἴδη δυνατῶν δρόμων ἤ τύπων σωματίων, ἀντιστοίχων πρός τό χρονικό, χωρικό ἤ μηδενικό τύπο τοῦ διαστήματος τόν ὁποῖον ὁρίζουν τά ἄκρα (x_1, t_1), (x_2, t_2) τοῦ ὁλοκληρώματος (1).

(i) <u>Τροχιαί σωματίων μηδενικῆς μάζης.</u>

Προκειμένου περί τοιούτων τροχιῶν (π.χ. φωτός) $(\Delta x)^2 - (\Delta t)^2 = 0$, ἡ παράμετρος s δέν ἔχει ἔννοιαν ($ds = 0$), καί ἡ Γεωδαισιακή ἐξίσωσις (2) ἀντικαθίσταται ὑπό τοῦ συστήματος $ds = 0$

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{d\lambda^2} + \Gamma^{\mu}_{\nu\rho} \frac{dx^{\nu}}{d\lambda} \frac{dx^{\rho}}{d\lambda} = 0, \qquad , (6)$$

ὅπου λ κατάλληλος παράμετρος τροχιᾶς, π.χ. ὁ χρόνος t.

(ii) <u>Περιγραφή τροχιῶν σωματίων πραγματικῆς μή μηδενικῆς μάζης.</u>

Τά σημεῖα x_1, x_2 θά πρέπει ἐν προκειμένῳ νά εὑρίσκωνται εἰς σχετικήν ἀπόστασιν τύπου χρόνου :

$(t_2 - t_1)^2 - (\vec{x}_2 - \vec{x}_1) > 0$, καί τό σύνολον δυνατῶν τροχιῶν $\vec{x}(t)$ ἐπί τῶν ὁποίων θά ζητήσωμεν στάσιμον τῆς (1) δύναται νά περιορισθῆ ἀπό τήν σχέσιν $(\frac{dx}{dt})^2 < 1$. Ἡ τελευταία ἀνισότης ἁπλῶς ἐκφράζει ὅτι αἱ"δυναταί τροχιαί" εἶναι τροχιαί ὑλικοῦ σωματίου πραγματικῆς μή δμηδενικῆς μάζης. Παρατηροῦμεν ὅτι ὡς γεωδαισιακαί γραμμαί εἰς τήν παροῦσαν περίπτωσιν αἱ τροχιαί εἶναι γραμμαί "τοπικῶς μεγίστου δρόμου" (εἰς τήν μετρικήν Lorentz).

'Ε ξ ι σ ώ σ ε ι ς L a g r a n g e.

Ἡ τελική ἔκφρασις τοῦ ὁλοκληρώματος τῆς δράσεως τῆς ἐξισώσεως (1) εἶναι τυπικῶς τῆς συνήθως μή σχετικιστικῆς μορφῆς Lagrangian $L(\vec{x}, \frac{d\vec{x}}{dt})$ καί κατά τά γνωστά (βλ. Μηχ.- Τ.2, κεφ.ΙΙ)αἱ ἀντίστοιχοι ἐξισώσεις

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1,2,3 \qquad (7)$$

μᾶς δίδουν

$$\frac{d}{dt}\frac{m\frac{d\vec{x}}{dt}}{\sqrt{1-(\frac{d\vec{x}}{dt})^2}} = 0 . \qquad (8)$$

Συγκρίνοντες τήν (8) μετά τῶν (6.1.8), (6.6.3) ἀναγνωρίζομεν ὅτι m εἶναι ἡ μᾶζα τοῦ σωματίου καί

$$\vec{P} = \frac{m\frac{d\vec{x}}{dt}}{\sqrt{1-(\frac{d\vec{x}}{dt})^2}} , \qquad (9)$$

ἡ σχετικιστική ὁρμή. Οὕτω ἡ (9) γράφεται :

$$\frac{d}{dt}\vec{p} = 0 . \qquad (10)$$

Εἰς τήν ἑπομένην παράγραφον θά καταλήξωμεν εἰς τήν ...φρασιν (9) καί ἀπ'εὐθείας, χωρίς νά ἀναφερθῶμεν εἰς προη...ύμενα.

ii) Τροχιαί ταχυονίων (σωματίων φανταστικῆς μάζης) $(\Delta x)^2-(\Delta t)^2 < 0$.

Εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν τό $\Delta x^\mu = (\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$ δύ...ται νά τεθῇ ὑπό τήν μορφήν $(0,0,0,\Delta z_o)$καί ὡς ἀναλλοίωτον ...οιχεῖον νά ληφθῇ τό

$$\sigma = \sqrt{d\vec{x}^2-(dt)^2} = \sqrt{1+(\frac{dx}{dz})^2+(\frac{dy}{dz})^2-(\frac{dt}{dz})^2}\, dz ,(11)$$

$$m = i|m| \quad , I = -m\int ds = +|m|\int d\sigma . \qquad (11)$$

...δυναταί τροχιαί πρέπει νά περιορισθοῦν διά τοῦ $(\frac{d\sigma}{dt})^2 > 1$.

...ατηρήσατε ὅτι αἱ τροχιαί τῶν ταχυονίων δέν εἶναι ἀκρότα... (Π.χ. δρόμοι ἐκ τοῦ (0,0,0,0) εἰς τό $(0,0,0,\Delta z_o)$ κατά ...κος dt = 0 ἔχουν τό $|\Delta z_o|$ ἐλάχιστον, ἐνῷ δρόμοι μέ ...$x)^2+(dy)^2= 0$ ἔχουν τό $|\Delta z_o|$ μέγιστον.

7.2. Ὁ ρ μ ή - Ἐ ν έ ρ γ ε ι α κ α ί σ υ ν ά ρ τ η σ ι ς H a m i l t o n.

Ἡ ὁρμή $\vec{p}$ καί ἡ ἐνέργεια E ἑνός δυναμικοῦ συστήματος ...κύπτουν ὡς γνωστόν ἐκ τῆς συμπεριφορᾶς τοῦ συστήματος εἰς τούς μετασχηματισμούς μεταθέσεως χώρου καί χρόνου, βάσει τοῦ θεωρήματος Noether (βλ. Μηχανική, Τ.2, Κεφ. III). Ἐξ ἄλλου ἡ ὑποομάς τῶν χωροχρονικῶν μεταθέσεων εἰς τήν Σχετικιστικήν Μηχανικήν τοῦ Einstein παραμένει ἡ αὐτή, ὅπως καί εἰς τήν Μηχανικήν τοῦ Γαλιλαίου. Οὕτω ἐφαρμόζοντες τό θεώρημα Noether εἰς τήν μή συναλλοίωτον μορφήν

$$L = -m\sqrt{1-\vec{v}^2} \qquad (1)$$

τῆς Lagrangian (6.7.1), εὑρίσκομεν τήν σχετικιστικήν ἔκφρασιν τῆς ὁρμῆς (ἀναλλοίωτον εἰς τάς μεταθέσεις χώρου)

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial(\vec{v})} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2}} \qquad (2)$$

καί ἐνεργείας (ἀναλλοίωτον εἰς τάς μεταθέσεις χρόνου)

$$E = \vec{p}\cdot\dot{\vec{x}} - L = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}} \qquad (3)$$

Ἤτοι ἐπανεύρομεν τάς σχετικιστικάς ἐκφράσεις (6.1.8),(6.3. ὁρμῆς καί ἐνεργείας.

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ταχύτης $\vec{v} = \dfrac{\vec{p}}{E}$.

Βάσει τῶν (2) καί (3), ἡ Hamiltonian $H(\vec{q},p)$ τοῦ ὑλικοῦ σημείου, ἡ ἐνέργεια τοῦ ὑλικοῦ σημείου ἐκπεφρασμένη συναρτήσει κανονικῶν συντεταγμένων εἶναι :

$$H = \sqrt{m^2+p^2} \qquad (4)$$

Ἡ Hamiltonian (4) ὡς προκύπτουσα ἐκ τῆς μή συναλλοιώτου Lagrangian L, δέν εἶναι ἀναλλοίωτος -ὡς ἄλλωστε καί εἰς τήν Μηχανικήν τοῦ Νεύτωνος. Ἐν προκειμένῳ, μετασχηματίζεται ὡς ἡ τετάρτη συνιστῶσα p_o τοῦ τετρανύσματος $(p_o, \vec{p})$ ἐνεργείας, ὁρμῆς.

Ἄ σ κ η σ ι ς 6-1. Δείξατε τήν (4).

Ἐ φ α ρ μ ο γ α ί - Σ ω μ ά τ ι ο ν ἐ ν τ ό ς π ε δ ί ο υ δ υ ν ά μ ε ω ν.

Σωμάτιον ἐντός βαθμωτοῦ Δυναμικοῦ.

α) Ἡ χρησιμοποίησις ὡς συναρτήσεως Lagrange τῆς $L = -(m+V(x))$ ὅπου $V(x)$ τυχόν ἐξωτερικόν Lorentz βαθμωτόν πεδίον, ὁδηγεῖ εἰς τήν ἐξίσωσιν κινήσεως

$$\frac{d}{dt}\frac{(m+V)\vec{v}}{\sqrt{1-v^2}} = -\sqrt{1-v^2}\;\vec{\nabla} V. \qquad (5)$$

Ἡ (5) ἐκφράζει σχετικιστικήν κίνησιν σωματίου ἐντός βαθμωτοῦ πεδίου δυνάμεων. Ἡ Hamiltonian τοῦ συστήματος, εἶναι :

$$H = \frac{(m+V(x))}{\sqrt{1-v^2}} = \sqrt{(m+V(x))^2 + \vec{p}^2} \qquad (6)$$

Ἡ ὁρμή τοῦ σωματίου $\dfrac{(m+V)\vec{v}}{\sqrt{1-v^2}}$ φυσικά, δέν διατηρεῖται ἐφ' ὅσον αἱ δυνάμεις τοῦ ἐξωτερικοῦ πεδίου καταστρέφουν τήν ὁμογένειαν τοῦ χώρου. Ὅταν τό ἐξωτερικόν πεδίον εἶναι στατικόν $V(\vec{x},t) = V(\vec{x},0)$ ἡ ὁλική ἐνέργεια τοῦ σωματίου

$$E = \frac{m + V}{\sqrt{1-v^2}} \tag{7}$$

διατηρεῖται. Ἡ ἀδρανειακή (ἐνεργός) μᾶζα $(m+V)$ τοῦ σωματίου μεταβάλλεται μετά τοῦ δυναμικοῦ.

β) Φορτισμένον Σωμάτιον ἐντός Ἠλεκτρομαγνητικοῦ Δυναμικοῦ.

Εἰς τήν περίπτωσιν φορτισμένου σωματίου ἐντός ἠλεκτρομαγνητικοῦ δυναμικοῦ $A_\mu = (\Phi,-\vec{A})$, ἡ ἁπλουστέρα ἀναλλοίωτος κατά Lorentz δρᾶσις εἶναι

$$I = \int\{-mds+eA_\mu dx^\mu\} = \int\{-m+eA_\mu\frac{dx^\mu}{ds}\}ds =$$

$$= \int\{-m + eu^\mu A_\mu\}ds = \int\{-m\sqrt{1-\vec{v}^2} + e(\Phi+\vec{v}.\vec{A})\}dt ,$$

ἤτοι ἡ Lagrangian εἶναι (βλ. Ἠλ. Θεωρ. Τ.1):

$$L = - m\sqrt{1-v^2} + e(\Phi + \vec{v}.\vec{A}) \tag{8}$$

καί ἡ συνάρτησις Hamilton

$$H = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}} + e\Phi . \tag{9}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι αἱ ἐξωτερικαί ἠλεκτρομαγνητικαί δυνάμεις δέν μεταβάλλουν τήν μᾶζαν τῶν σωματίων. Αἱ ἐξισώσεις Lagrange μᾶς δίδουν ἐν προκειμένῳ τήν δύναμιν Lorentz :

$$\frac{d}{dt}\vec{p} = \frac{d}{dt}\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = e(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{H}), \tag{10}$$

ὅπου

$$\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\Phi , \tag{11}$$

ἡ ἔντασις τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου καί

$$\vec{H} = \vec{\nabla}\times\vec{A} , \tag{12}$$

ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου.