ΦΩΚΙΩΝΟΣ Τ. ΧΑΤΖΗΙΩΑΝΝΟΥ
ΤΑΚΤΙΚΟΥ ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΑΘΗΝΩΝ

ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

ΤΕΥΧΟΣ Ι

ΗΛΕΚΤΡΟΣΤΑΤΙΚΗ - ΜΑΓΝΗΤΟΣΤΑΤΙΚΗ

ΑΘΗΝΑΙ 1975

Εἰς τοὺς μαθητάς μου.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Τό παρόν έγχειρίδιον 'Ηλεκτρομαγνητικῆς θεωρίας ἀπευθύνεται πρός φοιτητάς τῶν τελευταίων ἐτῶν βασικῶν πανεπιστημιακῶν σπουδῶν ἤ πρώτων ἐτῶν μεταπτυχιακοῦ κύκλου.

Εἰς τό πρῶτον τεῦχος ἀναπτύσσεται 'Ηλεκτροστατική- Μαγνητοστατική καθώς καί μαθηματικαί μέθοδοι, σύμμορφος ἀπεικόνισις, ἀντιστροφή, ἀνάλυσις συμμετριῶν, κ.λ.π., διά τήν λύσιν σχετικῶν συνοριακῶν προβλημάτων. Προτάσσεται σύντομος ἀνασκόπησις 'Ανυσματικῆς 'Αναλύσεως.

Κατεβλήθη προσπάθεια, ὥστε ἡ ἀκολουθουμένη μαθηματική μεθοδολογία νά διέπεται ἀπό θεμελιακάς φυσικάς ἰδέας.

Εἰς τό πέρας ἑκάστου κεφαλαίου παρατίθεται ἀριθμός προβλημάτων, τά ὁποῖα ὑποβοηθοῦν εἰς τήν καλυτέραν ἐμπέδωσιν καί συμπλήρωσιν τῆς ὕλης. Τινά ἐξ αὐτῶν ἀπαιτοῦν μεγαλυτέραν προσπάθειαν καί ἀπευθύνονται εἰς φοιτητάς ἐπιθυμοῦντας νά ἐμβαθύνουν περισσότερον εἰς τήν θεωρίαν.

Εἰς τό δεύτερον τεῦχος θά ἀσχοληθῶμεν μέ τάς ἐξισώσεις τοῦ Maxwell γενικώτερον, καί τά ἠλεκτρομαγνητικά κύματα.

Εὐχαριστῶ τήν Φυσικόν δ. Μ. Κουμέντη, βοηθόν τῆς Ἕδρας Θεωρητικῆς Φυσικῆς, διά τήν μεγίστην ἐπιμέλειαν εἰς τήν διόρθωσιν τῶν χειρογράφων καί τάς πλείστας κριτικάς παρατηρήσεις της, αἱ ὁποῖαι συνέβαλον εἰς τήν βελτίωσιν καί ἀρτιωτέραν ἐμφάνισιν τοῦ παρόντος.

ΑΘΗΝΑΙ ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 1971

ΦΩΚΙΩΝ ΧΑΤΖΗΙΩΑΝΝΟΥ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι.

ΣΥΝΤΟΜΟΣ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΙΣ ΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ.

ΗΛΕΚΤΡΟΣΤΑΤΙΚΗ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙΙ.

ΜΑΓΝΗΤΟΣΤΑΤΙΚΗ.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

J. C. Maxwell, Treatise on Electricity and Magnetism 3rd ed, reprint Dover New york, 1954

Κ. Δ. ΑΛΕΞΟΠΟΥΛΟΥ, Ἠλεκτρισμός, Ἀθῆναι 1959.

BERKLEY - Vol. 2, Electricity and Magnetism, Mc Graw hill, 1965.

REITZ - MILFORD, Foundations of Electromagnetic Theory, Addison - Wesley, 1967.

J. D. JACKSON, Classical Electrodynamics, Wiley, 1962.

W. K. H. PANOFSKY- M. PHILLIPS, Classical Electricity and Magnetism, Addison - Wesley, 1964.

L. D. LANDAU- E. M. LIFSITZ, The Classical Theory of Fields, Addison-Wesley, 1951.

J. A. STRATTON, Electromagnetic Theory, Mc Graw Hill, 1941.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι.

ΣΥΝΤΟΜΟΣ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΙΣ ΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ.

1. Ἀνυσματικός λογισμός - στοιχειώδη ἀνύσματα.

Εἶναι γνωστόν ἐκ τῆς μέσης παιδείας τί καλεῖται ἄνυσμα. Ἐννοοῦμεν τά ἐλεύθερα ἀνύσματα εἰς τόν Εὐκλείδειον χῶρον τριῶν διαστάσεων. Αὐτά χαρακτηρίζονται ἀπό μέτρον, διεύθυνσιν, φοράν. Ἐπ' αὐτῶν ὁρίζονται αἱ πράξεις:

(α) Ἄθροισμα ἀνυσμάτων. Καθιστῶμεν αὐτά διαδοχικά (εἰς τυχαίαν ἀρίθμησιν) διά παραλλήλου μετατοπίσεως καί ὁρίζομεν ὡς ἄθροισμα ἤ συνισταμένην αὐτῶν τό ἄνυσμα μέ ἀρχήν, τήν ἀρχήν τοῦ πρώτου καί πέρας τό πέρας τοῦ τελευταίου.

(β) Γινόμενον ἀνύσματος $\vec{a}$ ἐπί πραγματικόν ἀριθμόν α. Τό ἄνυσμα $\alpha\vec{a}$ ἔχον μέτρον $|\alpha||\vec{a}|$, ὅπου $|\vec{a}|$ τό μέτρον (μῆκος) τοῦ $\vec{a}$ καί τό ὁποῖον εἶναι ὁμόρροπον ἤ ἀντίρροπον πρός τό $\vec{a}$ ἐάν $\alpha>0$ ἤ $\alpha<0$ ἀντιστοίχως. Ἐπίσης $0\cdot\vec{a} = \vec{0}$ ἔνθα $\vec{0}$ τό μηδενικόν ἄνυσμα.

(γ) Ἐσωτερικόν γινόμενον $\vec{a}\cdot\vec{b}$ δύο ἀνυσμάτων $\vec{a}$ καί $\vec{b}$ εἶναι εἷς πραγματικός ἀριθμός, ἴσος πρός τό γινόμενον τῶν μέτρων τῶν δύο ἀνυσμάτων ἐπί τό συνημίτονον τῆς γωνίας φ, τήν ὁποίαν ὁρίζουν τά ἀνύσματα $\vec{a}$ καί $\vec{b}$, ἤτοι:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi .$$

Τά ἀνύσματα περιγράφονται ἰσοδυνάμως καί διά τῶν συνιστωσῶν των: $\vec{a} = (a_1,a_2,a_3)$, ὡς πρός ἕν σύστημα συντεταγμένων π.χ. ὀρθογώνιον Καρτεσιανόν σύστημα συντεταγμένων. Ἀλλαγή τῶν ἀξόνων, π.χ. περιστροφή, συνεπάγεται ἀλλαγήν τῶν συντεταγμένων. Τό ἄθροισμα τότε ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

$$(\vec{a}+\vec{b}) = (a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3),$$

ἤτοι δι' ἑνός ἀνύσματος μέ συνιστώσας τό ἄθροισμα τῶν συνιστωσῶν. Τό γινόμενον $\alpha\vec{a}$, πραγματικοῦ ἀριθμοῦ α ἐπί τό διάνυσμα $\vec{a}$ ὁρίζεται διά τοῦ $\alpha\vec{a} = (\alpha a_1,\alpha a_2,\alpha a_3)$. Τό ἐσωτερικόν γινόμενον ἐκφράζεται ὡς ἑξῆς:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 .$$

Οἱ ὁρισμοί διά τῶν συνιστωσῶν ἔχουν τό πλεονέκτημα, ὅτι γενικεύονται εἰς τούς Εὐκλειδείους χώρους n-διαστάσεων μέ n > 3, διά τούς ὁποίους δέν ἔχομεν γεωμετρικήν ἐποπτείαν.

2. Μετρικοί χῶροι.

Εἰς τήν Φυσικήν καί εἰδικώτερον εἰς τήν θεωρίαν τῶν πεδίων, ὡς τό ἠλεκτρομαγνητικόν πεδίον μέ τό ὁποῖον θά ἀσχοληθῶμεν κατωτέρω, συναντῶμεν ἀνύσματα τά ὁποῖα δέν εἶναι ἐλεύθερα, ἀλλά συναρτήσεις ἑκάστου σημείου ἑνός μετρικοῦ χώρου.

Ὁ Χῶρος οὗτος δύναται νά εἶναι Εὐκλείδειος(π.χ. τό ἐπίπεδον) ἤ μή (π.χ. ἡ ἐπιφάνεια μιᾶς σφαίρας) ὥστε νά ἀπαιτεῖται εἰσαγωγή καμπυλογράμμων συντεταγμένων καί χρῆσις διανυσματικῆς ἀναλύσεως εἰς γενικούς μετρικούς χώρους.

Θεωροῦμεν "συνεχῆ" χῶρον n διαστάσεων. Θά δεχθῶμεν, ὅτι τοπικῶς τοὐλάχιστον, ἕκαστον σημεῖον q τοῦ χώρου περιγράφεται διά καρτεσιανῶν συντεταγμένων $q \leftrightarrow (q_1,q_2,..q_n)$* καί ὅτι ὁ χῶρος εἶναι μετρικός· ἤτοι μεταξύ δύο γειτονικῶν σημείων αὐτοῦ $q = (q_1,q_2,..,q_n)$ καί $q' \equiv (q_1+dq_1,...,q_n+dq_n)$, ὁρίζεται μία "ἀπόστασις" ds, τό τετράγωνον τῆς ὁποίας εἶναι μία διγραμμική μορφή τῶν διαφορικῶν τῶν συντεταγμένων

$$ds^2 = \sum_{\substack{i=1\\k=1}}^{n} g^{ik}(q)dq_i dq_k . \qquad (1)$$

Αἱ συναρτήσεις $g^{ik}(q)$, αἱ ὁποῖαι ἐξαρτῶνται ἐκ τῆς θέσεως q, συνιστοῦν τόν μετρικόν τανυστήν, ὁ ὁποῖος εἶναι συμμετρικός, δηλ.

$$g^{ik}(q) = g^{ki}(q).$$

Ἐκ τῆς συμμετρίας τοῦ μετρικοῦ τανυστοῦ, ὁ ὁποῖος εἰς ἕνα γενικόν χῶρον Riemann εἶναι διάφορος τοῦ ταυτοτικοῦ, συμπεραίνομεν ὅτι δύναται οὗτος νά τεθῇ ὑπό διαγώνιον μορφήν, τοπικῶς τοὐλάχιστον, καί τελικῶς διά καταλλήλου ἐκλογῆς μονάδων

* Εἰς μαθηματικήν ὁρολογίαν μία διαφορίσιμος πολλαπλότης, (**differentiable manifold**).

τοῦ συστήματος συντεταγμένων νά ἐκφράσωμεν τό ds τοπικῶς εἰς Εὐκλειδείους ἤ ψευδοευκλειδείους συντεταγμένας

$$(ds(q))^2=(dx_1)^2+(dx_2)^2+\dots+(dx_s)^2-(dx_{s+1})^2-\dots-(dx_{s+n})^2 \ . \qquad (2)$$

Εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν,

$$g^{ik}(q) = \sum_{\ell=1}^{s} \frac{\partial x_\ell}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial x_\ell}{\partial q_k} - \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial x_{s+\ell}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial x_{s+\ell}}{\partial q_k} \ . \qquad (3)$$

Ὁ ἀριθμός τῶν (+) ἤ (-) τῆς ἀνωτέρω ἐκφράσεως, καλεῖται χαρακτήρ (signature) τοῦ μετρικοῦ χώρου.

2.1. Παραδείγματα.

α) Εἰς τόν Εὐκλείδειον τρισδιάστατον χῶρον μέ καρτεσιανάς συντεταγμένας ἔχομεν $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$, ὁπότε $g^{ik} = \delta^{ik}$ ἤτοι ὁ ἀντίστοιχος πίναξ εἶναι ὁ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$ ὁ χαρακτήρ αὐτοῦ εἶναι + 3.

β) Ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἀποτελεῖ ἕνα διδιάστατον χῶρον, ὅπου ἡ ἀπόστασις δίδεται ἀπό τόν τύπον:

$$ds^2 = r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta \, d\varphi^2 .$$

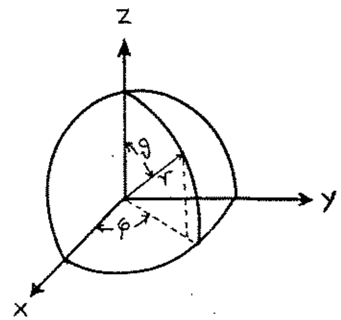
Ἔχομεν: (βλέπε σχ. 1)

$g^{11} = r^2$, $g^{22} = r^2 \sin^2\vartheta$,

$g^{ik} = 0$ διά $i \neq k$

ἤτοι ὁ ἀντίστοιχος πίναξ τοῦ μετρικοῦ τανυστοῦ εἶναι:

$$\begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2\sin^2\vartheta \end{pmatrix}$$ Ὁ χαρακτήρ



Σχῆμα 1.

τοῦ διδιαστάτου μετρικοῦ αὐτοῦ χώρου εἶναι +2.

γ) Ὁ χωρόχρονος εἰς τήν εἰδικήν θεωρίαν τῆς Σχετικότητος ἤ χῶρος Minkowski, ἀποτελεῖ ἕνα τετραδιάστατον ψευδοευκλείδειον μετρικόν χῶρον, τοῦ ὁποίου ἡ ἀπόστασις ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - c^2dt^2 ,$$

ὅπου c ἡ ταχύτης τοῦ φωτός, $c = 3 \times 10^{10}$ cm.sec^{-1}.

Εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν ἔχομεν $g^{11} = g^{22} = g^{33} = 1$, $g^{44} = -c^2$, καί $g^{ik} = 0$ διά $i \neq k$.

Ὁ ἀντίστοιχος πίναξ εἶναι

$$g^{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c^2 \end{pmatrix}$$

Ὁ χῶρος οὗτος εἶναι τετραδιάστατος μέ χαρακτῆρα +3.

3. Πεδία.

Πλεῖστα φυσικά μεγέθη εἶναι πεδία, ὡς τό ἠλεκτρομαγνητικόν. Θά περιορισθῶμεν εἰς τοπικά (local) πεδία, δηλ. εἰς φυσικά μεγέθη, τά ὁποῖα εἶναι συναρτήσεις τῶν σημείων τοῦ χώρου καί θά ἀσχοληθῶμεν μέ τήν συμπεριφοράν των κατά τούς μετασχηματισμούς τῶν συντεταγμένων. Ἡ ταξινόμησις τῶν διαφόρων φυσικῶν μεγεθῶν καί ἡ μελέτη των ὡς πρός τάς ἰδιότητας μετασχηματισμοῦ εἶναι βασικῆς σπουδαιότητος εἰς τήν Φυσικήν.

(α) Ἀποτελεῖ προϋπόθεσιν διά τήν γεωμετρικῶς ἀναλλοίωτον ἔκφρασιν τῶν φυσικῶν νόμων. (β) Ἔχει εὑρετικόν χαρακτῆρα. Οὕτω, διάφοροι ἁπλαῖ καί εὔλογοι ὑποθέσεις συμμετριῶν ὡς πρός τούς μετασχηματισμούς, ὁδηγοῦν πολλάκις ἄμεσα εἰς ἀνακάλυψιν φυσικῶν νόμων π.χ. Θεωρία τῆς Σχετικότητος.

Ἀπό φυσικῆς ἀπόψεως δύο διάφορα συστήματα συντεταγμένων (ἤ συστήματα ἀναφορᾶς) ἀντιστοιχοῦν εἰς δύο διαφόρους παρατηρητάς, οἱ ὁποῖοι μετροῦν τό φυσικόν μέγεθος $\Phi(q)$ καί $\Phi'(q')$ ἀντιστοίχως.

3.1. Βαθμωτά πεδία.

Ἕν βαθμωτόν πεδίον περιγράφεται διά μιᾶς συναρτήσεως, ἡ ὁποία εἶναι ἀναλλοίωτος εἰς τούς μετασχηματισμούς τῶν συντεταγμένων. Δηλ. ἄν $\Phi(q)$ εἶναι συνάρτησις, ἡ ὁποία περιγράφει τό πεδίον εἰς σύστημα συντεταγμένων $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ καί $\Phi'(q')$ ἡ περιγράφουσα τό πεδίον συνάρτησις εἰς σύστημα

$$q'(q) = (q_1'(q), q_2'(q), \ldots, q_n'(q)), \text{ τότε ἔχομεν } \underset{q \to q'}{\Phi(q) = \Phi'(q')}. \tag{4}$$

Θά θεωρῶμεν ὅτι οἱ μετασχηματισμοί καί αἱ παράγωγοι

$\dfrac{\partial q_k'}{\partial q_\ell}$ εἶναι συνεχεῖς.

<u>Π α ρ α δ ε ί γ μ α τ α .</u>

α) Τό τετράγωνον τῆς ἀποστάσεως, τό ὁποῖον δίδεται διά τῆς (1) χαρακτηρίζει ἕν βαθμωτόν μέγεθος.

β) Ἡ θερμοκρασία $T(\vec{x})$ περιγράφει ἕν βαθμωτόν πεδίον.

γ) Ἐάν $\Phi(q) = \Phi(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ ἕν βαθμωτόν πεδίον, τό

$$d\Phi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} dq_i \quad \text{περιγράφει ἕν βαθμωτόν πεδίον.}$$

3.2. Ἀνυσματικά πεδία.

Ἄς θεωρήσωμεν τό στοιχειῶδες ἄνυσμα $d\vec{q} = (dq_1, dq_2, \ldots, dq_n)$. Αἱ συνιστῶσαι αὐτοῦ $dq_i = 1,2,\ldots,n$, ὀνομάζονται ἀνταλλοίωτοι συνιστῶσαι.

Ἄν μεταβῶμεν ἐκ τοῦ συστήματος συντεταγμένων (q) εἰς ἕν ἕτερον (q'), αἱ ἀνταλλοίωτοι συνιστῶσαι τοῦ ἀνύσματος $d\vec{q}$ εἰς τό νέον αὐτό σύστημα δίδονται ἐκ τοῦ τύπου:

$$dq_i \to dq_i'(q) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial q_i'}{\partial q_k} dq_k \ , \ i = 1,2,\ldots n \ . \tag{5}$$

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u> : Μία n-άς $(A_1(q), A_2(q), \ldots, A_n(q))$ θά περιγράφῃ τάς ἀνταλλοιώτους συνιστώσας ἑνός ἀνυσματικοῦ πεδίου $\vec{A}(q)$, ἐάν

τά $A_i(q)$ μετασχηματίζονται ὡς τά dq_i δηλ. $q \to q'$,

$$A_i(q) \to A_i'(q') = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial q_i'}{\partial q_k} A_k(q), \quad i = 1,2,3,\ldots,n. \tag{6}$$

Αἱ n ποσότητες $dq^i = \sum_{k=1}^{n} g^{ik} dq_k$, $i = 1,2,\ldots,n$, ἀποτελοῦν

τάς συναλλοιώτους συνιστώσας τοῦ ἀνύσματος $d\vec{q}$. Ἄν μεταβῶμεν ἐκ τοῦ συστήματος συντεταγμένων (q) εἰς ἕν ἕτερον (q΄), αἱ συναλλοίωτοι συνιστῶσαι τοῦ ἀνύσματος $d\vec{q}$ εἰς τό νέον αὐτό σύστημα δίδονται ἐκ τοῦ τύπου:

$$dq'^i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial q_k}{\partial q_i'} dq^k , \quad i = 1,2,\ldots,n . \tag{7}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Αἱ n ποσότητες

$$A^i(q) = \sum_{k=1}^{n} g^{ik}(q) A_k(q) , \quad i = 1,2,\ldots,n ,$$

ἀποτελοῦν τάς συναλλοιώτους συνιστώσας τοῦ ἀνυσματικοῦ πεδίου $\vec{A}(q)$ καί μετασχηματίζονται ὡς τά dq^i , ἤτοι:

$q \to q'$

$$A^i(q) \to A'^i(q') = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial q_k}{\partial q_i'} A^k(q) , \quad i = 1,2,\ldots,n. \tag{8}$$

Ὡς παράδειγμα συναλλοιώτων συνιστωσῶν ἀναφέρομεν τάς συνιστώ-

σας τοῦ ἀνάδελτα

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial q_1} , \frac{\partial \Phi}{\partial q_2} , \ldots , \frac{\partial \Phi}{\partial q_n} \right) ,$$

τό ὁποῖον χρησιμοποιεῖται ὡς ὑπόδειγμα συναλλοιώτου ἀνύσματος.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ἐσωτερικόν γινόμενον δύο ἀνυσμάτων $\vec{A}$ καί $\vec{B}$ μέ ἀνταλλοιώτους συνιστώσας $(A_1,A_2,\ldots,A_n)$ καί $(B_1,B_2,\ldots,B_n)$ ἀντιστοίχως, ὁρίζεται τό ἄθροισμα:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} g^{ik} A_i B_k = \sum_{k=1}^{n} A^k B_k = \sum_{i=1}^{n} A_i B^i . \tag{9}$$

Τό ἐσωτερικόν γινόμενον δύο ἀνυσμάτων εἶναι ἀναλλοίωτον κατά τούς μετασχηματισμούς τῶν συντεταγμένων. Πράγματι εἰς τήν ἀνωτέρω περίπτωσιν ἔχομεν:

$$\sum_{i=1}^{n} A'^i B_i' = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial q_k}{\partial q_i'} \cdot \frac{\partial q_i'}{\partial q_\ell} A^k(q) B_\ell(q) =$$

$$= \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \delta_k^\ell A^k B_\ell = \sum_{k=1}^{n} A^k B_k .$$

Ὥστε τά συναλλοίωτα ἀνύσματα ταυτίζονται μέ τά γραμμικά συναρτησοειδῆ, τά ὁριζόμενα εἰς τόν χῶρον τῶν ἀνταλλοιώτων ἀνυσμάτων.

Συμβολισμός. Ὅταν εἰς ἕν ἄθροισμα εἷς δείκτης ἐμφανίζεται δίς μίαν φοράν ὡς ἄνω δείκτης καί μίαν φοράν ὡς κάτω δείκτης, τό σύμβολον τοῦ ἀθροίσματος θά παραλείπεται. Π.χ. εἰς τήν ἀνωτέρω περίπτωσιν θά ἔχωμεν:

$$\sum_{k=1}^{n} A^{\ell} B_{\ell} \underset{\text{ορσ}}{\equiv} A^{\ell} B_{\ell} \; .$$

3.3. Τανυστικά πεδία.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ:</u> Αἱ $n^{(r+s)}$ ποσότητες

$$T^{m_1 m_2 \dots m_r}_{k_1 k_2 \dots k_s}(q) \; ,$$

ὅπου $m_k = 1,2,\dots,n$, $k_\ell = 1,2,\dots,n$, $k = 1,2,\dots,r$, $\ell = 1,2,\dots,s$, ἀποτελοῦν τάς συνιστώσας ἑνός τανυστοῦ r+s τάξεως εἰς ἕνα χῶρον n-διαστάσεων, ὅταν μετασχηματίζωνται ὡς ἀκολούθως:

$$q \longrightarrow q'$$

$$T^{m_1 m_2 \dots m_r}_{k_1 k_2 \dots k_s} \longrightarrow T'^{m_1 m_2 \dots m_r}_{k_1 k_2 \dots k_s} = T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_r}_{u_1 u_2 \dots u_s} \cdot$$

$$\cdot \; \frac{\partial q'_{k_1}}{\partial q_{u_1}} \cdot \frac{\partial q'_{k_2}}{\partial q_{u_2}} \cdots\cdot \frac{\partial q'_{k_s}}{\partial q_{u_s}} \cdot \frac{\partial q_{\mu_1}}{\partial q'_{m_1}} \cdot \frac{\partial q_{\mu_2}}{\partial q'_{m_2}} \cdots\cdot \frac{\partial q_{\mu_r}}{\partial q'_{m_r}} \; . \qquad (10)$$

Δηλ. ἕκαστος κάτω δείκτης ἀντιστοιχεῖ εἰς μίαν ἀνταλλοίωτον συνιστῶσαν τοῦ τανυστοῦ καί ἕκαστος ἄνω δείκτης εἰς μίαν συναλ-

λοίωτον συνιστῶσαν αὐτοῦ.

Συμφώνως πρός τά ἀνωτέρω ἕν βαθμωτόν μέγεθος εἶναι τανυστής μηδενικῆς τάξεως καί ἕν ἄνυσμα τανυστής πρώτης τάξεως. Οἱ τανυσταί χαρακτηρίζονται ἐν γένει καί ἐκ τοῦ τύπου συμμετρίας μεταθέσεως τῶν ἄνω ἤ κάτω δεικτῶν - συμμετρίαν ὡς πρός τήν μεταθετικήν ὁμάδα (permutation group).- Ἡ συμμετρία αὕτη παραμένει προφανῶς ἀναλλοίωτος εἰς τούς συνεχεῖς μετασχηματισμούς (10). Μάλιστα διά τῆς μεθόδου αὐτῆς τυχόν τανυστής $T^{(n)}$ ἀναλύεται τελικῶς εἰς ἄθροισμα τανυστῶν ἕκαστος τῶν ὁποίων εἶναι πλέον ἀνάγωγος ὡς πρός τούς μετασχηματισμούς τῶν στροφῶν, $T^{(n)} = \sum_{\ell=0}^{n} T^{(n),(\ell)}$. Ἕκαστος προσθετέος εἶναι καθωρισμένου (ἀκεραίου) σπίν $\ell = 0,1,2,\dots,$ δηλ. ἔχει μόνον $2\ell + 1$ ἀνεξαρτήτους συνιστώσας, αἱ ὁποῖαι κατά τάς περιστροφάς μετασχηματίζονται πρός ἀλλήλας ὡς αἱ $2\ell + 1$ συνιστῶσαι τῆς κβαντισμένης στροφορμῆς. Π.χ. διά n = 2 ἔχομεν:

$T^{ik} = \sum_{\ell=0}^{2} T^{(\ell)ik}$, ὅπου $T^{(0)ik} = \frac{1}{3}\, g^{ik} \sum_{m=1}^{3} T^{mm} g_{mm} = \frac{1}{3}\, T_{race}\, T$,

(σπίν μηδέν), $T^{(1)ik} = \frac{1}{2}\,(T^{ik} - T^{ki})$, (spin 1), καί $T^{(2)ik} =$

$\frac{1}{2}\,(T^{ik} + T^{ki} - \frac{2}{3}\, T_{race}\, T)$, (spin 2).

Τυχών τανυστής δευτέρας τάξεως ἀποτελεῖται ἀπό σπίν μηδέν (τό ἴχνος του), σπίν ἕνα (ὁ ἀντισυμμετρικός τανυστής) καί σπίν δύο (συμμετρικός τανυστής μέ ἴχνος μηδέν).

Τῇ βοηθείᾳ τῶν g^{ik} καί g_{ik} δυνάμεθα νά ἀλλάσσωμεν τήν θέσιν τῶν δεικτῶν εἰς ἕνα τανυστήν

$$g^{i_m k}T_{i_1 i_2 \ldots i_{m-1} i_m i_{m+1} \ldots i_s} = T^{k}_{i_1 i_2 \ldots i_{m-1} i_{m+1} \ldots i_s} ,$$
$$g_{i_m k}T^{i_1 i_2 \ldots i_{m-1} i_m i_{m+1} \ldots i_s} = T_k^{i_1 i_2 \ldots i_{m-1} i_{m+1} \ldots i_s} . \tag{11}$$

Ἐπίσης δυνάμεθα νά ἔχωμεν συναίρεσιν δεικτῶν καταλήγοντες εἰς τανυστήν s-2 τάξεως.

$$g^{ik}T_{\mu \ldots ik \ldots \rho} = T_{\mu \ldots . \rho} ,$$
$$g_{ik}T^{\mu \ldots ik \ldots \rho} = T^{\mu \ldots . \rho} . \tag{12}$$

Ἐάν εἰς τούς μετασχηματισμούς περιλάβωμεν καί τόν ἀσυνεχῆ μετασχηματισμόν τοῦ κατοπτρισμοῦ, τότε δυνάμεθα νά διακρίνωμεν τούς τανυστάς καί ψευδοτανυστάς καί ἀντιστοίχως τά ἀνύσματα καί τά ψευδοανύσματα, τά βαθμωτά καί ψευδοβαθμωτά μεγέθη. Οὕτω π.χ. τό ἠλεκτρικόν πεδίον $\vec{E}$ εἶναι ἄνυσμα, τό μαγνητικόν πεδίον $\vec{H}$ ψευδοάνυσμα καί τό ἐσωτερικόν γινόμενον $(\vec{E}.\vec{H})$ εἶναι ψευδοβαθμωτόν μέγεθος.

Ἕν μέγεθος $\Phi(\vec{q})$ καλεῖται ψευδοβαθμωτόν, ὅταν διά τόν

μετασχηματισμόν $\vec{q} \to \vec{q}\,' = -\vec{q}$ ἔχωμεν $\Phi'(\vec{q}\,') = -\Phi(\vec{q})$ εἰς δέ τούς συνεχεῖς μετασχηματισμούς $\vec{q} \to \vec{q}\,'$ ἰσχύει $\Phi'(\vec{q}\,') = \Phi(\vec{q})$.

Τό μέγεθος $\vec{A}(\vec{q})$ χαρακτηρίζεται ὡς ἄνυσμα, ὅταν διά τοῦ μετασχηματισμοῦ

$$\vec{q} \longrightarrow \vec{q}\,' = R\vec{q}$$

ἔχωμεν:
$$\vec{A}(\vec{q}) \longrightarrow \vec{A}'(\vec{q}\,') = R\vec{A}(\vec{q}) , \tag{13}$$

εἶναι δέ ψευδοάνυσμα ὅταν

$$\vec{A}(\vec{q}) \longrightarrow \vec{A}'(\vec{q}\,') = |R|R\vec{A}(\vec{q}) , \tag{14}$$

ὅπου $|R|$ εἶναι ἡ ὁρίζουσα τοῦ πίνακος τοῦ μετασχηματισμοῦ R. Ἐπειδή ἡ ὁρίζουσα $|R|$ ἑνός γενικοῦ μετασχηματισμοῦ R, ὁ ὁποῖος εἶναι τυχοῦσα σύνθεσις τοῦ συνεχοῦς μετασχηματισμοῦ (10) καί κατοπτρισμοῦ, ἔχει τιμήν -1, ὁ ὁρισμός τοῦ ψευδοβαθμωτοῦ πεδίου $\Phi(\vec{q})$ δύναται νά ἐκφρασθῇ καί ὡς ἀκολούθως:

ὅταν $\vec{q} \to \vec{q}\,' = R\vec{q}$, τότε $\Phi(\vec{q}) \to \Phi'(\vec{q}\,') = |R|\Phi(\vec{q})$.

Ἀναλόγως ὁρίζονται τά ψευδοανυσματικά ἤ ἀξονικά ἀνυσματικά πεδία (axial vector):

$$\vec{A}(\vec{q}) \to \vec{A}(\vec{q}\,') = |R|R\vec{A}(\vec{q}) .$$

Προφανῶς τά βαθμωτά καί ψευδοβαθμωτά, τά ἀνύσματα καί ψευδοανύσματα ταυτίζονται ὡς πρός τούς συνεχεῖς μετασχηματισμούς· π.χ.

ὡς πρός περιστροφήν τῶν ἀξόνων ἀναφορᾶς.

4. Οἱ στοιχειώδεις διαφορικοί τελεσταί είς καμπυλόγραμμα συστήματα συντεταγμένων.

Εἰς τήν παράγραφον αὐτήν θά περιορισθῶμεν εἰς τόν τριδιάστατον Εὐκλείδειον χῶρον ἐντός τοῦ ὁποίου θά χρησιμοποιήσωμεν γενικάς καμπυλογράμμους συντεταγμένας. Ἡ διαφορική ἀνάλυσις ἀνυσματικῶν πεδίων ἐντός μή Εὐκλειδείων χώρων, ἀπαιτεῖ τήν χρησιμοποίησιν συναλλοιώτων παραγωγίσεων ἀντί τῶν συνήθων παραγωγίσεων. Ἄλλως, αἱ παράγωγοι τῶν τανυστῶν εἶναι μεγέθη, τά ὁποῖα δέν μετασχηματίζονται ἐν γένει ὡς τανυσταί. Ἡ παράγωγος ἑνός ἀνυσματικοῦ πεδίου ὡς πρός μετάθεσιν δέν εἶναι ὑποχρεωτικά ἀνυσματικόν πεδίον, λόγῳ μεταβολῆς τῆς μετρικῆς τοῦ χώρου μετά τῆς μεταθέσεως, ἡ ὁποία ἀπαιτεῖται εἰς τόν ὁρισμόν τῆς συνήθους παραγωγίσεως. Εἰς Εὐκλειδείους χώρους ἡ συναλλοίωτος παραγώγισις ταυτίζεται μέ τήν συνήθη παραγώγισιν.

4.1. Τοπικαί βάσεις συντεταγμένων.

Δοθέντος ἑνός συστήματος συντεταγμένων $(q)=(q_1,q_2,q_3)$ εἰς ἕκαστον σημεῖον τοῦ χώρου ἀντιστοιχοῦν τρία ἀνύσματα $\vec{\varepsilon}^1$, $\vec{\varepsilon}^2$, $\vec{\varepsilon}^3$, τά ὁποῖα ὁρίζουν μίαν τοπικήν βάσιν καί δίδονται ἐκ τῆς κάτωθι σχέσεως:

$$\vec{\varepsilon}^k = \frac{\partial\vec{r}(q)}{\partial q_k} \qquad k = 1,2,3, \tag{15}$$

ἔνθα $\vec{r}$ τό ἄνυσμα θέσεως: $\vec{r}=\vec{r}(x_1,x_2,x_3)$, ὅπου $x_i = x_i(q)$,

$i = 1,2,3$, αἱ καρτεσιαναί συντεταγμέναι. Εἰς γενικούς χώρους τά x_i θά εἶναι ἐν γένει τοπικαί ψευδοευκλείδειαι συντεταγμέναι, ὡς ἀνεφέρθη εἰς τήν §2.1.

Ἐκ τοῦ

$$ds^2 = d\vec{r}\cdot d\vec{r} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_j}\,dq_i dq_j = g^{ij}dq_i dq_j$$

ἕπεται ὅτι

$$g^{ij} = \vec{\varepsilon}^i\cdot\vec{\varepsilon}^j\,. \tag{16}$$

Τῇ βοηθείᾳ τοῦ μετρικοῦ τανυστοῦ τό στοιχεῖον ὄγκου δίδεται ἐκ τῆς σχέσεως

$$dV = \sqrt{g}\,dq_1 dq_2 dq_3\quad , \tag{17}$$

ὅπου $g = \det g^{ij}$, ἡ ὁρίζουσα τοῦ πίνακος τοῦ μετρικοῦ τανυστοῦ.

Τό διάνυσμα τό κάθετον εἰς στοιχεῖον ἐπιφανείας δίδεται ἐκ τῆς σχέσεως:

$$d\vec{S} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_j}\,dq_i dq_j = (\vec{\varepsilon}^i\times\vec{\varepsilon}^j)dq_i dq_j\quad , \tag{18}$$

ὅπου $\vec{\varepsilon}^i\times\vec{\varepsilon}^j$ τό ἐξωτερικόν γινόμενον τῶν ἀνυσμάτων $\vec{\varepsilon}^i$ καί $\vec{\varepsilon}^j$.

Ὡς πρός τήν βάσιν αὐτήν τό ἀνυσματικόν πεδίον $\vec{A}(q)$ δύναται νά ἐκφρασθῇ διά τῶν συντεταγμένων $A_k(q)$, $k = 1,2,3$ ἤτοι:

$$\vec{A} = A_k\vec{\varepsilon}^k \tag{19}$$

Τά μέτρα τῶν $\vec{\varepsilon}^k$ εἶναι ἐν γένει διάφορα τῆς μονάδος· δυνάμεθα δέ νά χρησιμοποιῶμεν ἀντ' αὐτῶν τά μοναδιαῖα ἀνύσματα $\hat{i}^k$ ὅπου

$$\hat{i}^k = \frac{\vec{\varepsilon}^k}{\sqrt{(\vec{\varepsilon}^k \cdot \vec{\varepsilon}^k)}} \quad . \tag{20}$$

Ἐάν ἔχωμεν $g^{ik} = 0$ διά $i \neq k$, τότε $\vec{\varepsilon}^i \cdot \vec{\varepsilon}^k = 0$ καί τά διανύσματα τῆς βάσεως εἶναι ὀρθογώνια. Εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν ἔχομεν:

$$A_k = (\vec{A}.\vec{\varepsilon}^k)/(\vec{\varepsilon}^k.\vec{\varepsilon}^k) \quad .$$

Ἐκ τῶν $\vec{\varepsilon}^k$, $k = 1,2,3$ κατασκευάζεται τό κάτωθι σύστημα ἐκ τριῶν ἀνυσμάτων

$$\vec{\varepsilon}_i = \frac{\epsilon_{ijk}\vec{\varepsilon}^j \times \vec{\varepsilon}^k}{2\vec{\varepsilon}^1.(\vec{\varepsilon}^2 \times \vec{\varepsilon}^3)} \quad , \tag{21}$$

ὅπου ϵ_{ijk} τό πλῆρες ἀντισυμμετρικόν σύμβολον, τό ὁποῖον ὁρί- ζεται ὡς ἑξῆς:

$\epsilon_{123} = \epsilon_{312} = \epsilon_{231} = 1$, $\epsilon_{213} = \epsilon_{132} = \epsilon_{321} = -1$

καί αἱ ἄλλαι συνιστῶσαι του εἶναι μηδέν. $\vec{\varepsilon}^j \times \vec{\varepsilon}^i$ εἶναι τό ἐξωτερικόν γινόμενον καί $\vec{\varepsilon}^1.(\vec{\varepsilon}^2 \times \vec{\varepsilon}^3)$ τό σύνηθες τριπλοῦν γινόμενον, ἴσον πρός τόν ὄγκον τοῦ παραλληλεπιπέδου μέ ἀκμάς $\vec{\varepsilon}^1$, $\vec{\varepsilon}^2$, $\vec{\varepsilon}^3$.

Μέ βάσεις τά $\vec{\varepsilon}^k$ καί $\vec{\varepsilon}_k$ αἱ συναλλοίωτοι καί ἀνταλλοίωτοι συνιστῶσαι ἑνός ἀνύσματος $\vec{A}$ ἐκφράζονται ὡς ἀκολούθως:

$A^k = (\vec{A} \cdot \vec{\varepsilon}^k)$ καί $A_k = (\vec{A} \cdot \vec{\varepsilon}_k)$. Ἐπομένως ἄν $\vec{A} = A_k\vec{\varepsilon}^k$

καί $\vec{B} = B^k\vec{\varepsilon}_k$, τότε $(\vec{A}.\vec{B}) = A_k\vec{\varepsilon}^k.B^\ell\vec{\varepsilon}_\ell = A_k B^\ell(\vec{\varepsilon}^k.\vec{\varepsilon}_\ell) = A_k B^\ell \delta^k_\ell =$ $= A_\ell B^\ell$.

4.2. Τό ἀνάδελτα $\vec{\nabla}$ ἤ grad.

Ἔστω $f(q)$ ἕν βαθμωτόν πεδίον· τό ἀνάδελτα τοῦ $f(q)$ συμβολίζεται διά τοῦ $\vec{\nabla}f$ καί ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

$$df = \vec{\nabla}f.d\vec{r} \tag{22}$$

Γεωμετρικῶς παριστᾶ τήν διεύθυνσιν καί τήν ἀριθμητικήν τιμήν τῆς μεγίστης βαθμίδος μεταβολῆς τῆς f. Τό ἀνάδελτα ἀναλυτικῶς εἰς καμπυλογράμμους συντεταγμένας ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

Ἐξ ὁρισμοῦ ἔχομεν $df = \vec{\nabla}f.d\vec{r} = \vec{\nabla}f.\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_k}dq_k$, $k = 1,2,3$, ὁπότε

$$df = \vec{\nabla}f.\vec{\varepsilon}^k dq_k = \frac{\partial f}{\partial q_k}dq_k \quad .$$

$$\text{Ἄρα} \quad (\vec{\nabla}f)^k = \vec{\nabla}f.\vec{\varepsilon}^k = \frac{\partial f}{\partial q_k} \quad . \tag{23}$$

Ὥστε τελικῶς

$$\vec{\nabla}f = \sum_{k=1}^{3}(\vec{\nabla}f.\vec{\varepsilon}^k)\vec{\varepsilon}_k = \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial f}{\partial q_k}\vec{\varepsilon}_k = \sum_{k=1}^{3}\sqrt{g_{kk}}\,\frac{\partial f}{\partial q_k}\,\hat{i}_k \quad . \tag{24}$$

Παρατηρήσατε ὅτι τό ἀνάδελτα ἑνός βαθμωτοῦ πεδίου εἶναι ἀνυσματικόν πεδίον ἐν γένει, ἀνεξαρτήτως τοῦ ἄν ὁ χῶρος εἶναι Εὐκλείδειος ἤ μή!

Ἄσκησις: Νά χρησιμοποιηθῇ ὁ ὁρισμός (22) διά τόν ὑπολογισμόν τοῦ ὁλοκληρώματος $\frac{1}{4\pi}\int_0^\infty \frac{\vec{r}}{r^3}\cdot d\vec{r}$ κατά μῆκος τυχούσης καμπύλης ἥτις ἀρχίζει ἀπό τό σημεῖον (0,0,0) καί καταλήγει εἰς τό ἄπειρον . Ἀνωτέρω $\vec{r} = \vec{x} - \vec{x}_o$, ὅπου $\vec{x}_o$ σταθερόν ἄνυσμα, καί $r = \sqrt{\vec{r}^2}$.

4.3. Ἡ ἀπόκλισις – divergence – div ἤ $\vec{\nabla}\cdot$.

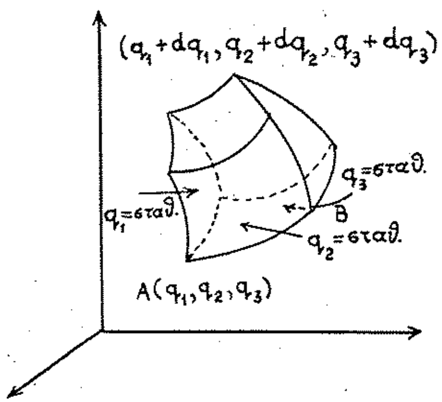
Ἔστω $\vec{A}(q)$ ἕν ἀνυσματικόν πεδίον. Ἡ ἀπόκλισις τοῦ $\vec{A}(q)$ συμβολίζεται διά τοῦ $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$ καί ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \lim_{V(S)\to 0} \frac{\int_S \vec{A}\cdot d\vec{S}}{\int_{V(S)} dV} \, , \tag{25}$$

ὅπου $\int_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$ ἡ ροή διά τῆς κλειστῆς ἐπιφανείας S, ἡ ὁποία περικλείει τόν ὄγκον V(S). Δηλ. ἡ ἀπόκλισις παριστᾶ τήν ροήν ἀνά μονάδα ὄγκου, εἰς ἕκαστον σημεῖον τοῦ χώρου.

Θά ὑπολογίσωμεν ἀναλυτικῶς τό $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$ εἰς ἕν σύστημα καμπυλογράμμων συντεταγμένων $q = (q_1, q_2, q_3)$.

Θεωροῦμεν στοιχεῖον ὄγκου ὡς τό σχῆμα 2, τό ὁποῖον κατά προσέγγισιν εἶναι ἕν παραλληλεπίπεδον, προσανατολισμένον παραλλήλως πρός τούς τοπικούς ἄξονας συντεταγμένων.



Σχῆμα 2.

Ἡ ροή διά τῶν δύο ἑδρῶν τοῦ σχ. 2, q_3 = σταθ. καί τῆς ἕδρας τῆς

εὑρισκομένης ἀπέναντι αὐτῆς εἶναι

$$[\ \vec{A}(q_1,q_2,q_3+dq_3).(\vec{\varepsilon}^1\times\vec{\varepsilon}^2)-\vec{A}(q_1,q_2,q_3).(\vec{\varepsilon}^1\times\vec{\varepsilon}^2)\ ]\ dq_1dq_2 =$$

$$= [\ A_3(q_1,q_2,q_3+dq_3)\sqrt{g(q_1,q_2,q_3+dq_3)} - A_3(q_1,q_2,q_3)$$

$$\cdot \sqrt{g(q_1,q_2,q_3)}\ ]\ dq_1dq_2 = \frac{\partial}{\partial q_3}(A_3\sqrt{g}\,)\,dq_1dq_2dq_3 \ ,$$

ὅπου συμφώνως πρός τόν τύπον (18), ἐχρησιμοποιήσαμεν διά τό στοιχεῖον ἐπιφανείας τήν ἔκφρασιν:

$$d\vec{S} = (\vec{\varepsilon}^1 \times \vec{\varepsilon}^2)\,dq_1dq_2 = \vec{\varepsilon}_3\sqrt{g}\,dq_1dq_2 \ .$$

Ἐπαναλαμβάνοντες τά ἀνωτέρω διά τά ἕτερα δύο ζεύγη ἑδρῶν εὑρίσκομεν τελικῶς, ὅτι ἡ ὁλική ροή διά τοῦ στοιχειώδους ὄγκου dV δίδεται διά τῆς σχέσεως:

$$\frac{\partial}{\partial q_i}(A_i\sqrt{g}\,)\,dq_1dq_2dq_3 = \frac{\partial}{\partial q_i}(A_i\sqrt{g}\,)\,\frac{1}{\sqrt{g}}\,dV$$

καί διαιροῦντες διά τοῦ στοιχειώδους ὄγκου ἔχομεν

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{\sqrt{g}}\,\frac{\partial}{\partial q_i}(A_i\sqrt{g}\,) \ . \tag{26}$$

Ἐάν χρησιμοποιηθοῦν αἱ συνιστῶσαι A_i τοῦ ἀνυσματικοῦ πεδίου ὡς πρός τά μοναδιαῖα ἀνύσματα $\hat{i}^k$, ὁ ἀνωτέρω τύπος λαμβάνει τήν μορφήν:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(A_i \sqrt{\frac{g}{g^{ii}}} \right) . \tag{27}$$

4.4. Ἡ Λαπλασιανή – Laplacian – ἤ $\vec{\nabla}^2$.

Ἔστω ἕν βαθμωτόν πεδίον f(q). Ὁρίζομεν τήν Laplacian τοῦ f(q), ἥτις συμβολίζεται $\vec{\nabla}^2 f$, ὡς ἑξῆς:

$$\vec{\nabla}^2 f = \text{div.}(\text{grad } f) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f) . \tag{28}$$

Συμφώνως πρός τούς τύπους (24) καί (27) ἔχομεν:

$$\vec{\nabla}^2 f = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\sqrt{g}\, (\vec{\nabla} f)_k \right) = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\sqrt{g}\, g_{k\ell} \frac{\partial f}{\partial q_\ell} \right)$$

ἤ συμβολικῶς

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q_k} \sqrt{g}\, g_{k\ell} \frac{\partial}{\partial q_\ell} .$$

4.5. Στροβιλισμός, rot ἤ $\vec{\nabla}\times$.

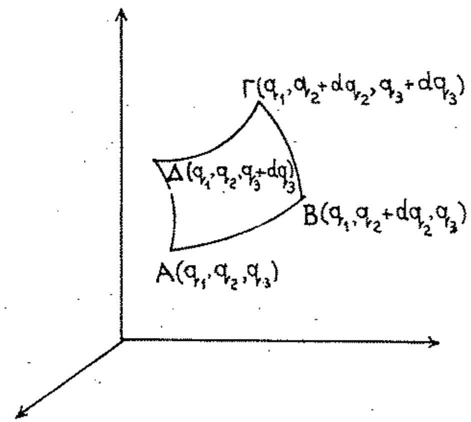
Ὁρίζομεν τόν στροβιλισμόν $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ ἑνός ἀνυσματικοῦ πεδίου $\vec{A}(q)$ βάσει τοῦ τύπου.

$$\int_{S(\ell)} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} \equiv \oint_{\ell} \vec{A} \cdot d\vec{\ell} . \tag{29}$$

Συμφώνως πρός τήν ἐξίσωσιν αὐτήν, ὁ στροβιλισμός συνιστᾶ ἀνυσματικόν πεδίον, τοῦ ὁποίου ἡ προβολή $(\vec{\nabla} \times \vec{A}).\vec{n}$ κατά μίαν δοθεῖσαν διεύθυνσιν $\vec{n}$ εἰς ἕν σημεῖον τοῦ χώρου q, δίδεται ἐκ τῆς σχέσεως:

$$(\vec{\nabla} \times \vec{A}).\vec{n} \equiv \lim_{\overrightarrow{\Delta S} \to 0} \frac{\oint_{\ell} \vec{A} \cdot d\vec{\ell}}{\Delta S} \tag{29'}$$

ὅπου $\overrightarrow{\Delta S}$ μία στοιχειώδης ἐπιφάνεια μέ περίμετρον ℓ, εἰς τήν περιοχήν τοῦ σημείου q, κάθετος ἐπί τό $\vec{n}$. Ἐκκινοῦντες ἐκ τοῦ (29') ὡς ὁρισμοῦ τοῦ $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ ὁ τύπος (29) ἀποδεικνύεται εὐκόλως(ἄσκ.14) καί ἀποτελεῖ τό θεώρημα Stokes.



Σχῆμα 3.

Θεωρήσωμεν τό στοιχεῖον ἐπιφανείας ΑΒΓΔ ὡς εἰς τό σχῆμα 3. Ἐπιθυμοῦμεν τό ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα.

$$\oint_{\ell=\mathrm{AB\Gamma\Delta}} \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\mathrm{AB}} \vec{A} \cdot d\vec{\ell} + \int_{\mathrm{B\Gamma}} \vec{A} \cdot d\vec{\ell} + \int_{\Gamma\Delta} \vec{A} \cdot d\vec{\ell} + \int_{\Delta \mathrm{A}} \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$$

Ἔχομεν:

$$\int_{\mathrm{AB}} \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \vec{A}(q_1,q_2,q_3) \cdot \vec{\varepsilon}^{\,2}\, dq_2 = A^2(q_1,q_2,q_3)\, dq_2 ,$$

$$\int_{B\Gamma} \vec{A}\cdot d\vec{\ell} = \vec{A}(q_1,q_2+dq_2,q_3)\vec{\varepsilon}^3 dq_3 = A^3(q_1,q_2+dq_2,q_3)\, dq_3 ,$$

$$\int_{\Gamma\Delta} \vec{A}\cdot d\vec{\ell} = -\vec{A}(q_1,q_2,q_3+dq_3)\vec{\varepsilon}^2 dq_2 = -A^2(q_1,q_2,q_3+dq_3)dq_2 ,$$

$$\int_{\Delta A} \vec{A}\cdot d\vec{\ell} = -\vec{A}(q_1,q_2,q_3)\vec{\varepsilon}^3 dq_3 = -A^3(q_1,q_2,q_3)dq_3 .$$

Ὁπότε $\oint_{AB\Gamma\Delta} \vec{A}\cdot d\vec{\ell} = [A^3(q_1,q_2+dq_2,q_3)-A^3(q_1,q_2,q_3)]dq_3 -$

$$- [A^2(q_1,q_2,q_3+dq_3)-A^2(q_1,q_2,q_3)]dq_2 = \left(\frac{\partial A^3}{\partial q_2} - \frac{\partial A^2}{\partial q_3}\right) dq_2 dq_3 .$$

Ἐξ ἄλλου ἡ στοιχειώδης ἐπιφάνεια $\overrightarrow{dS}$ τοῦ χωρίου ABΓΔ εἶναι

$$\overrightarrow{dS} = (\vec{\varepsilon}^2\times\vec{\varepsilon}^3)\, dq_2 dq_3 = \vec{\varepsilon}_1\sqrt{g}\, dq_2 dq_3 .$$

Ὥστε τελικῶς:

$$(\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot\vec{\varepsilon}_1 = \frac{\oint_\ell \vec{A}\cdot d\vec{\ell}}{dS} = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial A^3}{\partial q_2} - \frac{\partial A^2}{\partial q_3}\right) .$$

Ἐπαναλαμβάνοντες τήν ἀνωτέρω ἐργασίαν διά στοιχειώδεις ἐπιφανείας q_2 = σταθ. ἤ q_3 = σταθ. ἔχομεν τελικῶς:

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\left(\frac{\partial A^3}{\partial q_2} - \frac{\partial A^2}{\partial q_3}\right)\vec{\varepsilon}^1 + \left(\frac{\partial A^1}{\partial q_3} - \frac{\partial A^3}{\partial q_1}\right)\vec{\varepsilon}^2 + \left(\frac{\partial A^2}{\partial q_1} - \frac{\partial A^1}{\partial q_2}\right)\vec{\varepsilon}^3\right] . \quad (30)$$

Παρατήρησις: Ἄν καί ὁ στροβιλισμός περιέχει παραγώγισιν ἀνυσματικοῦ πεδίου ὡς πρός μετάθεσιν, ἀποτελεῖ ἀνυσματικό πεδίον καί ὅταν ὁ χῶρος δέν εἶναι Εὐκλείδειος.

4.6. Συνοπτικοί πίνακες ἐκφράσεως διαφορικῶν τελεστῶν, ὡς πρός μοναδιαῖα ἀνύσματα βάσεως ὀρθογωνίων καμπυλογράμμων συντεταγμένων.

1. Καρτεσιαναί συντεταγμέναι.

$$(ds)^2 = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2 ,$$

$$g^{ik} = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k \end{cases} , \quad g = \det g^{ik} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 .$$

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\hat{x}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\hat{x}_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}\hat{x}_3 ,$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} ,$$

$$\vec{\nabla}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \quad , \quad \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{x}_1 & \hat{x}_2 & \hat{x}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} .$$

$$dV = dx_1 dx_2 dx_3 .$$

2. Κυλινδρικαί συντεταγμέναι.

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \rho\cos\varphi \\ x_2 = \rho\sin\varphi \\ x_3 = z \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} (ds)^2 = (dz)^2 + (d\rho)^2 + \rho^2(d\varphi)^2 , \\ g^{11} = g^{22} = 1,\ g^{33} = \rho^2 ,\ g^{ik} = 0, \ \text{διά}\ i \neq k, \end{array}$$

$$g = \det g^{ik} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2 \end{vmatrix} = \rho^2 .$$

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z} + \frac{\partial f}{\partial \rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{\varphi} ,$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} ,$$

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} ,$$

$$\text{τό} \quad \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{z} & \hat{\rho} & \rho\hat{\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ A_z & A_\rho & \rho A_\varphi \end{vmatrix} ,$$

$$dV = \frac{1}{2}\rho\, dz d\rho d\varphi$$

Νά ὑπολογισθῇ τό $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ ὅπου $\vec{A} = \varphi\hat{z}$

3. Πολικαί ἤ σφαιρικαί συντεταγμέναι.

$$\left.\begin{array}{l} x_3 = r\cos\vartheta \\ x_2 = r\sin\vartheta\sin\varphi \\ x_1 = r\sin\vartheta\cos\varphi \end{array}\right\} , \ (ds)^2 = (dr)^2 + r^2(d\vartheta)^2 + r^2\sin^2\vartheta(d\varphi)^2 ,$$

$$g^{11} = 1$$

$$g^{22} = r^2 \qquad g^{ik} = 0 , \ \text{διά}\ i \neq k$$

$$g^{33} = r^2\sin^2\vartheta,$$

$$g = \det g^{ik} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\vartheta \end{vmatrix} = r^4\sin^2\vartheta .$$

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \vartheta}\hat{\vartheta} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{\varphi} ,$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}(\sin\vartheta A_\vartheta) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} ,$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial f}{\partial \vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} ,$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{r \sin\vartheta} [\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta A_\varphi) - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial\varphi}] \hat{r} +$$

$$+ \frac{1}{r} [\frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(r A_\varphi)] \hat{\vartheta} +$$

$$+ \frac{1}{r} [\frac{\partial}{\partial r}(r A_\vartheta) - \frac{\partial A_r}{\partial\vartheta}] \hat{\varphi} .$$

$$dV = r^2 \sin\vartheta \, dr d\vartheta d\varphi \quad .$$

4. 7. Ὀλίγα περί τανυστικῆς ἀναλύσεως εἰς χώρους Riemann.

Ὡς ἀνεφέρθη εἰς τούς χώρους Riemann ἐν γένει, ἡ συνήθης παραγώγισις ἑνός τανυστικοῦ πεδίου (τάξεως ἀνωτέρας τῆς μηδενικῆς) δέν δίδει συναλλοίωτον μέγεθος. Αἰτία τούτου εἶναι τό ὅτι εἰς τήν παραγώγισιν ὑπεισέρχονται δύο τανυσταί διαφορετικοῦ σημείου ἐφαρμογῆς· ἕκαστος τανυστής ἔχει ἴδιον (τοπικόν) νόμον μετασχηματισμοῦ, ὥστε ἡ διαφορά των δέν μετασχηματίζεται ὡς συναλλοίωτον μέγεθος. Διά τόν ὁρισμόν τῆς συναλλοιώτου παραγωγίσεως ἀπαιτεῖται οὐσιαστικῶς κατάλληλος ὁρισμός τῆς " παραλλήλου " μεταθέσεως ἀνυσμάτων,

$$A_{\mu;\nu} \, dx^\nu = 0 \ . \tag{31}$$

Προκειμένου περί συναλλοιώτου παραγωγίσεως $T^{\alpha\beta}_{\gamma;\mu}$ ἑνός τανυστοῦ

$T^{\alpha,\beta}_{\lambda}$ δέν ἀρκεῖ ἡ συνήθης παραγώγισις $T^{\alpha,\beta}_{\lambda,\mu}$ ἀλλ' ἀπαιτοῦνται πρόσθετοι ὅροι. Οὗτοι ἐκφράζονται διά τοῦ συμβόλου "Christoffel" $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$:

$$T^{\alpha\beta}_{\gamma;\mu} = \frac{\partial T^{\alpha\beta}_{\gamma}}{\partial x^\mu} + \ldots + \Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda} T^{\lambda\beta}_{\gamma} + \Gamma^{\beta}_{\mu\lambda} T^{\alpha\lambda}_{\gamma} - \ldots - \Gamma^{\lambda}_{\mu\gamma} T^{\alpha\beta}_{\lambda} \ . \tag{32}$$

Εἰς (μετρικούς) χώρους τοῦ Riemann τό σύμβολον Γ συνδέεται μετά τοῦ μετρικοῦ τανυστοῦ

$$\Gamma_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2} \{ \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \} ^{*} \tag{33}$$

Ἄν τό $T^{\alpha,\ldots,\beta}_{\ldots\gamma}$ εἶναι τανυστής n – τάξεως, τό $T^{\alpha,\ldots,\beta}_{\ldots\gamma;\mu}$ εἶναι τανυστής (n+1) τάξεως.

Τό μέγεθος Γ δέν εἶναι συναλλοίωτον μέγεθος.

Ὡς πίναξ, εἶναι συμμετρικόν ὡς πρός ἐναλλαγήν τῶν κάτω δεικτῶν $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}$.

Διά νά λάβωμεν μίαν γεωμετρικήν ἐποπτείαν τῆς συναλλοιώτου παραλλήλου μεταθέσεως, ἄς θεωρήσωμεν τόν δοθέντα χῶρον Riemann ὡς μίαν ὑπερεπιφάνειαν ἑνός Εὐκλειδείου χώρου n+1 διαστάσεων.

---

* Τό σύμβολον Γ ὁρίζεται καί εἰς γενικωτέρους χώρους, χωρίς μετρικήν.

Ἡ συναλλοίωτος παράλληλος μετάθεσις εἰς χῶρον τοῦ Riemann τῶν n δμαστάσεων, δύναται τώρα νά θεωρηθῆ ὡς συνήθης μετάθεσις τῆς ἐφαπτομενικῆς συνιστώσης ἐπί τῆς ἐπιφανείας τῶν n διαστάσεων ἑνός ἀνύσματος τοῦ Εὐκλειδείου χώρου τῶν n + 1 διαστάσεων.

Τανυστής καμπυλότητος.

Κατά τά ἀνωτέρω, ἡ παράλληλος μετάθεσις ἑνός ἀνύσματος κατά μῆκος μιᾶς κλειστῆς γραμμῆς ἑνός χώρου τοῦ Riemann, δέν μᾶς ὁδηγεῖ ἐν γένει εἰς τό ἀρχικόν ἄνυσμα.

Ἡ μεταβολή δA_μ τοῦ ἀνύσματος A_μ κατά τήν παράλληλον μεταφοράν του κατά μῆκος ἑνός περιγράμματος C μιᾶς στοιχειώδους ἐπιφανείας δE εἶναι:

$$\delta A_\mu = \frac{1}{2} R^\lambda_{\mu\nu\rho} \delta E^{\nu\rho} A_\lambda \quad . \tag{34}$$

Ὁ $R^\lambda_{\mu\nu\rho}$ καλεῖται τανυστής καμπυλότητος τοῦ Riemann καί δίδεται ἐκ τῆς σχέσεως:

$$R^\lambda_{\mu\nu\rho} = \frac{\partial\Gamma^\lambda_{\mu\rho}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial\Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} + \Gamma^\lambda_{\varkappa\nu}\,\Gamma^\varkappa_{\mu\rho} - \Gamma^\lambda_{\varkappa\rho}\,\Gamma^\varkappa_{\mu\nu} \quad . \tag{35}$$

Οὗτος εἶναι ἀντισυμμετρικός ὡς πρός μ, ν καί συμμετρικός ὡς [πρός μ, ρ .

Ἡ συνηρημένη ἔκφρασις

$$R_{\mu\nu} = R^\xi_{\mu\xi\nu} \quad , \tag{36}$$

καλεῖται τανυστής καμπυλότητος τοῦ Ricci καί ἡ $R = R^\mu_\mu$ βαθμωτή καμπυλότης.

Ὁ μηδενισμός τοῦ τανυστοῦ καμπυλότητος Riemann, ἀποτελεῖ ἀναγκαίαν καί ἱκανήν συνθήκην ἵνα εἷς χῶρος εἶναι τοπικῶς ἐπίπεδος. Ὁ μηδενισμός μόνον τῆς βαθμωτῆς καμπυλότητος ἤ καί τοῦ τανυστοῦ Ricci δέν ἀρκοῦν [π.χ. ἀσκήσεις] .

Κατευθυνομένη παράγωγος. Γεωδαισιακαί γραμμαί.

Μέ τήν βοήθειαν τῆς συναλλοιώτου παραγωγίσεως, ἡ κατευθυνομένη παράγωγος ἑνός τανυστικοῦ πεδίου εἶναι:

$$\frac{DT^{\cdot}}{D\vec{s}} = T^{\cdot}{}_{;\mu} \frac{dx^\mu}{ds} \quad , \tag{37}$$

ὅπου τό ἄνυσμα $U^\mu = \dfrac{dx^\mu}{ds}$, (38) εἶναι τό μοναδιαῖο ἐφαπτομενικό ἄνυσμα τῆς κατευθύνσεως $\vec{s}$,

$$U^\mu U_\mu = 1 \; .$$

Αἱ γεωδαισιακαί γραμμαί $x^\mu(s)$ ὁρίζονται ὡς γραμμαί κατά μῆκος τῶν ὁποίων ἡ κατευθυνομένη παράγωγος τῶν ἐφαπτομενικῶν των κατευθύνσεων U^μ μηδενίζεται,

$\dfrac{DU^\mu}{D\vec{s}} = 0$. Συμφώνως πρός τάς (32), (37), (38) αἱ Γεωδαισιακαί γραμμαί ἱκανοποιοῦν τήν διαφορικήν ἐξίσωσιν

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\rho}{ds} = 0 . \tag{39}$$

Δι' ἕτερον ὁρισμόν τῶν Γεωδαισιακῶν γραμμῶν βλέπε ἄσκησιν (13).

4.8. Τά πεδία συναρτήσει πηγῶν καί δυναμικῶν.

"Εστω ἕν ἀνυσματικόν πεδίον $\vec{V} = \vec{V}(\vec{x})$. Αἱ πηγαί τοῦ πεδίου ὁρίζονται ὡς ἑξῆς:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V}(\vec{x}) = \rho(\vec{x}) \qquad\qquad (40)$$
$$\text{καί}\quad \vec{\nabla}\times\vec{V}(\vec{x}) = \vec{g}(\vec{x}).$$

'Επειδή ἡ ἀνυσματική πηγή $\vec{g}(\vec{x})$ τοῦ $\vec{V}$ ἰσοῦται ἐν προκειμένῳ πρός τόν στροβιλισμόν $\vec{\nabla}\times\vec{V}$ αὕτη δέν εἶναι αὐθαίρετος ἀλλά ὑπόκειται εἰς τόν περιορισμόν $\vec{\nabla}\cdot\vec{g}(\vec{x})=0$ ἄλλως τό σύστημα(40) δέν ἔχει λύσιν. Παρουσίᾳ πηγῶν τό ἀνυσματικόν πεδίον εἶναι πάντοτε διάφορον τοῦ μηδενός, τουλάχιστον εἰς τήν περιοχήν τῶν πηγῶν. Τό ἀντίστροφον φυσικά δέν εἶναι ὑποχρεωτικόν. δηλ. μηδενισμός τῶν πηγῶν δέν συνεπάγεται μηδενισμόν τῶν πεδίων, ἀλλα εἶναι δυνατόν νά ἔχωμεν πεδίον διάφορον τοῦ μηδενός ἀπουσίᾳ πηγῶν (δημιουργηθέν πρίν αἱ πηγαί στερέφουν!).

Παραδείγματα.

1. $\vec{V} = \vec{E}$, ἡ ἔντασις τοῦ ἠλεκτροστατικοῦ πεδίου, ἔχει πηγήν τήν πυκνότητα $\rho(\vec{x})$ τοῦ ἠλεκτρικοῦ φορτίου καί $\vec{g}(\vec{x}) = 0$.

2. 'Εάν $\vec{V} = \vec{B}$ ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητοστατικοῦ πεδίου, τότε $\rho(\vec{x}) = 0$ καί $\vec{g}(\vec{x}) = \vec{j}(\vec{x}) + \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ εἶναι ἡ πυκνότης ἐντάσεως τοῦ ἠλεκτρικοῦ ρεύματος

"Εστω ὅτι γνωρίζομεν τάς πηγάς $\rho(\vec{x})$ καί $\vec{g}(\vec{x})$, καθώς καί καταλλήλους συνοριακάς συνθήκας ἑνός ἀνυσματικοῦ πεδίου $\vec{V}(\vec{x})$. Ζητοῦμεν νά εὕρωμεν τό πεδίον $\vec{V}(\vec{x})$.

Πρός τοῦτο εἶναι πρόσφορος ὁ ὁρισμός δύο βοηθητικῶν δυναμικῶν, ἑνός βαθμωτοῦ δυναμικοῦ $\Phi(\vec{x})$ καί ἑνός ἀνυσματικοῦ δυναμικοῦ $\vec{A}(\vec{x})$ βάσει τῆς σχέσεως:

$$\vec{V}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{x}) + \vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{x}) . \qquad (41)$$

Τό πρόβλημα τῆς εὑρέσεως τοῦ πεδίου ἀνάγεται οὕτω εἰς τήν εὕρεσιν τῶν δυναμικῶν.

Κατ' ἀναλογίαν πρός τούς νόμους Coulomb καί Biot-Savart εἰς τήν 'Ηλεκτροστατικήν καί Μαγνητοστατικήν ὁρίζομεν:

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\int\frac{\rho(\vec{x}\,')}{r(\vec{x},\vec{x}\,')}\,d^3x' ,$$
$$\qquad\qquad (42)$$
$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\int\frac{\vec{g}(\vec{x}\,')}{r(\vec{x},\vec{x}\,')}\,d^3x' ,$$

ὅπου $r(\vec{x},\vec{x}\,') = \sqrt{(\vec{x}-\vec{x}\,')^2}$, ἡ ἀπόστασις μεταξύ τῶν σημείων $\vec{x}$ καί $\vec{x}\,'$.

Θά ἀποδείξωμεν ὅτι τό πεδίον, τό ὁριζόμενον ἐκ τῆς (41) ἱκανοποιεῖ τάς (40).

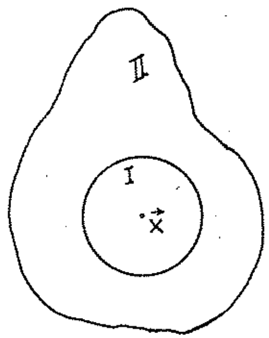
Πράγματι:

α) 'Επειδή $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = 0$, ἔχομεν $\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = -\vec{\nabla}^2\Phi$.

"Ωστε:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = -\vec{\nabla}^2\Phi(\vec{x}) = -\vec{\nabla}^2_{\vec{x}}\frac{1}{4\pi}\int\frac{\rho(\vec{x}\,')}{r(\vec{x},\vec{x}\,')}\,d^3x' =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int\vec{\nabla}^2_{\vec{x}}\left(\frac{1}{r(\vec{x},\vec{x}\,')}\right)\rho(\vec{x}\,')d^3x' .$$



Σχῆμα 4.

Διά τόν ὑπολογισμόν τοῦ ἀνωτέρω ὁλοκληρώματος, διαχωρίζομεν τόν χῶρον ὁλοκληρώσεως εἰς δύο περιοχάς, τήν I καί II, ὅπου I εἶναι μικρά σφαῖρα ἔχουσα ὡς κέντρον τό σημεῖον $\vec{x}$.

Εἰς τήν περιοχήν II ἔχομεν:

$r(\vec{x},\vec{x}\,') \neq 0$ καί $\vec{\nabla}^2_{\vec{x}} \frac{1}{r} = 0$,

ὁπότε τό ὁλοκλήρωμα λαμβάνει τήν μορφήν:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = -\frac{1}{4\pi}\int_{I} \vec{\nabla}^2_{\vec{x}}\left(\frac{1}{r}\right)\rho(\vec{x}\,')d^3x' - \frac{1}{4\pi}\int_{II} \vec{\nabla}^2_{\vec{x}}\left(\frac{1}{r}\right)\rho(\vec{x}\,')d^3x'$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_{I} \vec{\nabla}^2_{\vec{x}}\left(\frac{1}{r(\vec{x},\vec{x}\,')}\right)\rho(\vec{x}\,')d^3x' . \qquad (43)$$

Ἐξ ἄλλου, ἐπειδή $\vec{\nabla}^2_{\vec{x}}\frac{1}{r(\vec{x},\vec{x}\,')} = \vec{\nabla}^2_{\vec{x}\,'}\frac{1}{r(\vec{x},\vec{x}\,')}$, ἡ (43) δύναται νά γραφῇ ὑπό τήν μορφήν

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = -\frac{1}{4\pi}\int_{I}\rho(\vec{x}\,')\,\vec{\nabla}^2_{\vec{x}\,'}\frac{1}{r}\,d^3x' .$$

Εἰς τόν χῶρον I ἡ $\rho(\vec{x}\,')$ εἶναι περίπου ἴση πρός $\rho(\vec{x})$, ὁπότε παραλείποντες ἀπειροστά ἀνωτέρας τάξεως λαμβάνομεν:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = -\frac{1}{4\pi}\rho(\vec{x})\int_{I}\vec{\nabla}_{\vec{x}\,'}\cdot\left(\vec{\nabla}_{\vec{x}\,'}\frac{1}{r}\right)d^3x' = -\frac{1}{4\pi}\rho(\vec{x})\int_{S}\vec{\nabla}_{\vec{x}\,'}\left(\frac{1}{r}\right)d\vec{S} ,$$

ὅπου ἐγένετο χρῆσις τοῦ θεωρήματος τοῦ Gauss διά τήν μικράν σφαῖραν I, ἐπιφανείας S. Τελικῶς ἐπειδή

$$\int_{S}\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)d\vec{S} = -\int_{S}\frac{\vec{r}.d\vec{S}}{r^3} = -4\pi ,$$

ἔχομεν $\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = \rho(\vec{x})$. Οὕτω ἐδείχθη ὅτι τό διά τῶν (41)καί (42) ὁριζόμενον πεδίον,ἱκανοποιεῖ τήν πρώτην τῶν ἐξισώσεων (40),τήν ἐξίσωσιν βαθμωτῆς πηγῆς $\vec{\nabla}\cdot\vec{V}(\vec{x}) = \rho(\vec{x})$.

Ἀνωτέρω ἀπεδείξαμεν ταυτοχρόνως καί τήν χρησιμοτάτην ταυτότητα :

$$\vec{\nabla}^2\frac{1}{r(\vec{x},\vec{x}\,')} \equiv -4\pi\,\delta(\vec{x}-\vec{x}\,') , \qquad (44)$$

ἔνθα $\delta(\vec{x}-\vec{x}\,')$ ἡ συνάρτησις τοῦ Dirac, ἡ ὁποία ἔχει τάς ἑξῆς ἰδιότητας: $\delta(\vec{x}-\vec{x}\,') = 0$ διά $\vec{x}\neq\vec{x}\,'$ καί

$$\int f(\vec{x}\,')\,\delta(\vec{x}-\vec{x}\,')\,d^3x' = f(\vec{x}) \qquad (45)$$

ΥΣ. Αὐστηρότερον διά τήν ἐφαρμογήν τοῦ θεωρήματος Gauss, ἀντί τῆς συναρτήσεως 1/r τῆς ὁποίας τό $\vec{\nabla}(1/r)$ παρουσιάζει ἀνωμαλίαν εἰς τό σημεῖον r=0 δυνάμεθα νά χρησιμοποιήσωμεν τήν συνάρτησιν $\frac{1-e^{-r/\alpha}}{r}$ ὅπου α μικρός θετικός ἀριθμός,λαμβανόμενος εἰς τό ὅριον ἴσος πρός τό μηδέν.

β) Ἀπομένει τώρα νά ἀσχοληθῶμεν μέ τήν δευτέραν τῶν ἐξισώσεων (40), ἤτοι τήν ἐξίσωσιν ἀνυσματικῆς πηγῆς:

$$\vec{\nabla} \times \vec{V}(\vec{x}) = \vec{g}(\vec{x}) \ .$$

Ἐπειδή $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\Phi = 0$, βάσει τοῦ ὁρισμοῦ (42) ἔχομεν:

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla} \times [\ \vec{\nabla} \times \int \frac{\vec{g}(\vec{x}')}{r(\vec{x},\vec{x}')} d^3x'\ ] \ ,$$

ἤ τῇ βοηθείᾳ τῆς ταυτότητος

$$\vec{\nabla}_{\vec{x}} \times [\ \vec{\nabla}_{\vec{x}} \times \vec{g}(\vec{x}')\frac{1}{r(\vec{x},\vec{x}')}\ ] = \vec{\nabla}_{\vec{x}}(\vec{g}(\vec{x}')\cdot\vec{\nabla}_{\vec{x}}\frac{1}{r(\vec{x},\vec{x}')}) - \vec{g}(\vec{x}')\vec{\nabla}^2\frac{1}{r(\vec{x},\vec{x}')} \ ,$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}_{\vec{x}}\left\{\int \vec{g}(\vec{x}').\vec{\nabla}_{\vec{x}}(\frac{1}{r})d^3x'\right\} - \frac{1}{4\pi}\int\vec{g}(\vec{x}')[-4\pi\delta(\vec{x}-\vec{x}')]d^3x'$$

$$= \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}_{\vec{x}}\left\{\int \vec{g}(\vec{x}').\vec{\nabla}_{\vec{x}}(\ \frac{1}{r}\ )d^3x'\right\} + \vec{g}(\vec{x})$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}_{\vec{x}}\left\{\int \vec{g}(\vec{x}')\cdot\vec{\nabla}_{\vec{x}'}\frac{1}{r(\vec{x},\vec{x}')}d^3x'\right\} + \vec{g}(\vec{x}) \ .$$

Ἐπειδή $\vec{\nabla}\cdot\vec{g} = 0$, τό ἀνωτέρω ὁλοκλήρωμα δύναται νά μετασχηματισθῇ εἰς μίαν ἀπόκλισιν:

$$\int \vec{g}(\vec{x}')\cdot(\vec{\nabla}_{\vec{x}'}\frac{1}{r(\vec{x},\vec{x}')})d^3x' = \int \vec{\nabla}_{\vec{x}'}\cdot(\frac{\vec{g}(\vec{x}')}{r(\vec{x},\vec{x}')})d^3x' -$$

$$-\int\frac{\vec{\nabla}_{\vec{x}'}.\vec{g}(\vec{x}')d^3x'}{r(\vec{x},\vec{x}')} = \int \vec{\nabla}_{\vec{x}'}\cdot(\frac{\vec{g}(\vec{x}')}{r(\vec{x},\vec{x}')})\ d^3x' \ .$$

Ἄν τώρα ἐφαρμόσωμεν τό θεώρημα τοῦ Gauss εἰς " ὁλόκληρον τόν χῶρον" καί ὑποθέσωμεν, ὅτι εἰς τήν μεγάλην ἐξωτερικήν ἐπιφάνειαν S, π.χ. μεγάλην σφαῖραν ἀκτῖνος R, τό $\vec{g}$ εἶναι μηδέν (ἤ μηδενίζεται ταχύτερον τοῦ $1/R$ ὅταν $R \to \infty$), θά παρατηρήσωμεν ὅτι τό ὁλοκλήρωμα τοῦτο εἶναι μηδέν.

Ὥστε τελικῶς: $\vec{\nabla} \times \vec{V} = \vec{g}(\vec{x})$.

Ἤτοι ἐδείχθη ὅτι οἱ τύποι (41) καί (42) ὁρίζουν ἕν πεδίον, τό ὁποῖον ἱκανοποιεῖ καί τήν ἐξίσωσιν ἀνυσματικῆς πηγῆς. Ἀπομένει νά διερευνηθῇ τό μοναδικόν τῆς λύσεως.

Ἔστω V_1 καί V_2 δύο λύσεις τῶν ἐξισώσεων (40). Τότε ἡ διαφορά των $V = V_1 - V_2$ ἱκανοποιεῖ τάς σχέσεις

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = 0 \quad \text{καί} \quad \vec{\nabla} \times \vec{V} = 0 \ . \qquad (46)$$

Ἐκ τῆς δευτέρας τῶν ἐξισώσεων (46) καί συμφώνως πρός γνωστόν θεώρημα περί ἀστροβίλων πεδίων ἕπεται ὅτι $\vec{V} = -\vec{\nabla}\psi$, ἤτοι ὅτι τό $\vec{V}$ ἀπορρέει ἀπό κάποιαν βαθμωτήν συνάρτησιν ψ. Ἡ ψ συμφώνως μέ τήν πρώτην τῶν (46), ἱκανοποιεῖ τήν ἐξίσωσιν τοῦ Laplace: $\nabla^2\psi = 0$.

Ἄν τώρα θεωρήσωμεν μίαν μεγάλην περιοχήν ὄγκου V, (π.χ. μεγάλην σφαῖραν ἀκτῖνος R), περικλειομένην ὑπό τῆς ἐπιφανείας

S θά έχωμεν:

$$\int_S (\psi\vec{\nabla}\psi)\cdot d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla}\cdot(\psi\vec{\nabla}\psi)d^3x = \int_V (\vec{\nabla}\psi)^2 d^3x + \int_V \psi\nabla^2\psi d^3x$$

καί έπειδή $\nabla^2\psi = 0$,

$$\int_S (\psi\vec{\nabla}\psi)\cdot d\vec{S} = \int_V (\vec{\nabla}\psi)^2 d^3x \quad . \tag{47}$$

Ἄν $(\psi\vec{\nabla}\psi)R^2 \to 0$ διά $R \to \infty$, τότε τό πρῶτον μέλος τῆς (47) μηδενίζεται. Ἄρα

$$\int_V (\vec{\nabla}\psi)^2\, d^3x = 0 \quad \text{καί} \quad (\vec{\nabla}\psi) = 0. \quad \text{Ἤτοι} \quad \vec{V} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2 = -\vec{\nabla}\psi = 0 \ .$$

Ὥστε ὅταν δίδεται ἡ ἀσυμπτωτική συμπεριφορά τοῦ πεδίου μέ ἀκρίβειαν τουλάχιστον $\frac{1}{r^2}$, διά $r \to \infty$, ἡ λύσις (42) εἶναι ἡ μοναδική.

Ἀσκήσεις.

1. Νά ἐκφρασθῇ ἡ στοιχειώδης ἀπόστασις ds καί νά εὑρεθῇ ὁ μετρικός τανυστής g^{ik} α) διά τήν ἐπιφάνειαν κυκλικοῦ κυλίνδρου ἀκτῖνος R καί β) διά τήν ἐπιφάνειαν σφαίρας ἀκτῖνος R.

2. Δείξατε ὅτι ὁ μετρικός πίναξ g^{ik} εἶναι συμμετρικός τανυστής δευτέρας τάξεως.

3. Δείξατε ὅτι εἰς τόν χῶρον τῶν τριῶν διαστάσεων, τυχών ἀντισυμμετρικός τανυστής δευτέρας τάξεως μετασχηματίζεται ὡς ἄνυσμα.

4. Δείξατε ὅτι τό $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$ εἶναι ψευδοβαθμωτόν μέγεθος.

5. Δείξατε ὅτι $\vec{\nabla}(\vec{\alpha}\cdot\vec{r}) = \vec{\alpha}$, ὅπου $\vec{\alpha}$ σταθερόν ἄνυσμα καί $\vec{r}$ τό ἄνυσμα θέσεως.

6. Δείξατε ὅτι $\vec{\nabla}\cdot\vec{r} = 3$ καί βάσει αὐτοῦ ὑπολογίσατε τό $\vec{\nabla}\cdot\vec{f}$, ἐάν $\vec{f} = \frac{\vec{r}}{r^3}$.

7. Ὑπολογίσατε τά $\vec{\nabla}^2 r$, $\vec{\nabla}^2 r^2$ καί $\vec{\nabla}^2(\frac{1}{r^2})$, ὅπου r τό μέτρον τοῦ ἀνύσματος θέσεως.

8. Δείξατε ὅτι ὁ τελεστής τοῦ Laplace μέ δύο μεταβλητάς (εἰς τό ἐπίπεδον xy), $\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, εἶναι ἀναλλοίωτος (invariant) διά τυχοῦσαν στροφήν εἰς τό ἐπίπεδον.

9. Ἔστω $u = u(x,y,z)$, $\upsilon = \upsilon(x,y,z)$. Ὑποθέσατε ὅτι τά u καί υ ἱκανοποιοῦν μίαν ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς $f(u,\upsilon) = 0$ καί δείξατε ὅτι $\vec{\nabla}u \times \vec{\nabla}\upsilon = 0$.

10. Νά εὑρεθοῦν τά σύμβολα "Christoffel" διά σύστημα σφαιρικῶν συντεταγμένων.

11. Δείξατε ὅτι ὁ συνήθης στροβιλισμός $A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}$ ἀνυσματικοῦ πεδίου A_μ ἐντός χώρου τοῦ Riemann, εἶναι ἀντισυμμετρικός τανυστής δευτέρας τάξεως.

12. Δείξατε ὅτι ὁ τανυστής τοῦ Riemann ἱκανοποιεῖ τάς ταυτό-

τητας (ταυτότητες Bianchi),

$$R_{\varkappa\lambda\mu;\rho}{}^{\nu} + R_{\lambda\rho\mu;\varkappa}{}^{\nu} + R_{\rho\varkappa\mu;\lambda}{}^{\nu} \equiv 0 .$$

13. Αἱ Γεωδαισιακαί γραμμαί ὁρίζονται καί ὡς γραμμαί τοπικῶς ἐλαχίστου μήκους, ἤτοι καθιστοῦν τό ὁλοκλήρωμα

$\int \sqrt{g_{\mu\nu}(x)\, u^{\mu}u^{\nu}}\, dS$ ἐλάχιστον. Χρησιμοποιήσατε τόν ὁρισμόν αὐτόν καί δείξατε ὅτι αἱ Γεωδαισιακαί γραμμαί ἱκανοποιοῦν τήν διαφορικήν ἐξίσωσιν (39).

14. Ἀποδείξατε τό θεώρημα τοῦ Stokes, τύπος (29), βάσει τοῦ ὁρισμοῦ (29').

15. Ἡ συνάρτησις δέλτα τοῦ Dirac ($\delta(x)$) ὁρίζεται ὡς ἑξῆς: διά κάθε συνάρτησιν $f(x)$, ἡ ὁποία εἶναι συνεχής εἰς τό $x = 0$ ἰσχύει $\int_{\alpha}^{b} f(x)\,\delta(x)\,dx = f(0)$, ὅπου τό $x = 0$ περιλαμβάνεται εἰς τό διάστημα ὁλοκληρώσεως (α, b). Μέ βάσιν τόν ὡς ἄνω ὁρισμόν ἀποδείξατε τάς σχέσεις:

$$\delta(x) = \delta(-x),\quad x\delta(x) = 0,\quad \delta(\alpha x) = \alpha^{-1}\delta(x),\quad \delta'(x) = -\delta'(-x).$$

$$\delta(x^2-\alpha^2) = \frac{1}{2\alpha}[\delta(x-\alpha) + \delta(x+\alpha)]$$

$$\delta(f(x)) = \sum_n \frac{\delta(x-x_n)}{|f'(x_n)|},$$ ὅπου x_n ῥίζαι τῆς $f(x)=0$.

16. Νά εὑρεθοῦν τά πεδία συναρτήσει τῶν πηγῶν, εἰς Εὐκλείδειον χῶρον τῶν δύο διαστάσεων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ II.

ΗΛΕΚΤΡΟΣΤΑΤΙΚΗ.

1. Αἱ ἐξισώσεις τῆς Ἠλεκτροστατικῆς.

1.1. Γενικά.

Ὡς γνωστόν τό ἠλεκτρομαγνητικόν πεδίον $\vec{E}, \vec{B}$ ἐν κενῷ, ὑπακούει εἰς τό κάτωθι σύστημα διαφορικῶν ἐξισώσεων τοῦ Maxwell:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho \quad (\alpha) \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \quad (\gamma)$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad (\beta) \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \vec{J} \quad (\delta), \qquad (1)$$

ὅπου

$\vec{E} = \vec{E}(\vec{x},t)$ ἡ ἔντασις τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου,

$\vec{B} = \vec{B}(\vec{x},t)$ ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου,

$\rho = \rho(\vec{x},t)$ ἡ πυκνότης τοῦ ἠλεκτρικοῦ φορτίου,

$\vec{J} = \vec{J}(x,t)$ ἡ πυκνότης ἐντάσεως τοῦ ἠλεκτρικοῦ ρεύματος.

Τά μεγέθη αὐτά εἶναι ἐν γένει συναρτήσεις τῆς θέσεως $\vec{x}$ καί τοῦ χρόνου t.

Ἡ πυκνότης ἠλεκτρικοῦ φορτίου ρ καί ἡ πυκνότης ἐντάσεως ἠλεκτρικοῦ ρεύματος $\vec{J}$, ἀποτελοῦν τάς πηγάς τοῦ ἠλεκτρομαγνητικοῦ πεδίου. Διά τό μαγνητικόν πεδίον δέν εὑρέθησαν βαθμωταί πηγαί· πιθανώτατα δέν ὑπάρχουν μαγνητικά φορτία (μαγνητικά μονόπολα) εἰς τήν φύσιν,(βλ. ἄσκ. 16, κεφ III).

Τά $-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ καί $\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$, συμφώνως πρός τάς ἐξισώσεις (1.β) καί (1.δ) τῆς μαγνητικῆς καί ἠλεκτρικῆς ἐπαγωγῆς, συνιστοῦν τήν ἀλληλοσύνδεσιν τοῦ ἠλεκτρικοῦ καί μαγνητικοῦ πεδίου καί κατά τόν ὁρισμόν προηγουμένης παραγράφου δύνανται ἐπίσης νά θεωρηθοῦν ὡς ἀνυσματικαί πηγαί τοῦ ἠλεκτρικοῦ καί μαγνητικοῦ πεδίου ἀντιστοίχως. Ἡ πυκνότης τοῦ ἠλεκτρικοῦ φορτίου θεωρεῖται βαθμωτόν μέγεθος, ἡ πυκνότης ἐντάσεως τοῦ ἠλεκτρικοῦ ῥεύματος ἀνυσματικόν, ἡ ἔντασις τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου ἀνυσματικόν καί ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου ψευδοανυσματικόν, ὥστε αἱ ἐξισώσεις τοῦ Maxwell εἶναι κατοπτρικῶς συμμετρικαί.

Εἰς τήν εἰδικήν "στατικήν" περίπτωσιν κατά τήν ὁποίαν τά πεδία καί αἱ πηγαί εἶναι ἀνεξάρτητοι τοῦ χρόνου, αἱ ἐξισώσεις (1) λαμβάνουν τήν μορφήν:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} &= \rho & \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} &= 0 & \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} &= \vec{J} \end{aligned} \tag{2}$$

ὅπου $\vec{E} = \vec{E}(\vec{x})$, $\vec{B} = \vec{B}(\vec{x})$, $\rho = \rho(\vec{x})$, $\vec{J} = \vec{J}(\vec{x})$.

Ὥστε εἰς τήν στατικήν περίπτωσιν, τό ἠλεκτρικόν καί μαγνητικόν πεδίον διαχωρίζονται - δέν συνδέονται πλέον μέ τάς ἐξισώσεις τῆς ἠλεκτρικῆς καί μαγνητικῆς ἐπαγωγῆς - δυνάμενα οὕτω νά μελετηθοῦν ἀνεξαρτήτως. Οὕτω ἔχομεν τήν Ἠλεκτροστατικήν, ἡ ὁποία μελετᾶ τό ἠλεκτροστατικόν πεδίον $\vec{E}(\vec{x})$ καί τήν Μαγνητοστατικήν, ἡ ὁποία μελετᾶ τό $\vec{B}(\vec{x})$.

Τό ἠλεκτροστατικόν πεδίον $\vec{E} = \vec{E}(\vec{x})$ ἱκανοποιεῖ τάς κάτωθι δύο ἐξισώσεις:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} &= \rho \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} &= 0 \; , \end{aligned} \tag{3}$$

ἤτοι εἶναι ἀστρόβιλον καί ἔχει βαθμωτήν πηγήν τά ἠλεκτρικά φορτία.

Παρατήρησις: Ὁ διαχωρισμός τοῦ ἠλεκτρικοῦ καί μαγνητικοῦ πεδίου ἀναφέρεται εἰς ἕν συγκεκριμένον ἀδρανειακόν σύστημα ἀναφορᾶς. Ἐάν μεταβῶμεν ἐξ ἑνός ἀδρανειακοῦ συστήματος εἰς ἕτερον τοιοῦτον θά ἔχωμεν:

$$(\vec{x},t) \longrightarrow (\vec{x}',t')$$

$$\vec{E} \longrightarrow \vec{E}'(\vec{E},\vec{B})$$

$$\vec{B} \longrightarrow \vec{B}'(\vec{E},\vec{B}) \; .$$

Οὕτω, π.χ. ὅταν εἰς ἕν σύστημα εἶναι ὅλα τά ἠλεκτρικά φορτία ἀκίνητα, τότε ἔχομεν $\vec{J} = 0$ καί $\vec{B} = 0$ ὡς πρός τό σύστημα αὐτό, καί δι' ἕν σύστημα κινούμενον ὡς πρός τό πρῶτον τό $\vec{B}'$ θά εἶναι ἐν γένει διάφορον τοῦ μηδενός. Τά ὑπάρχοντα ἠλεκτρικά φορτία θά εὑρίσκωνται εἰς κίνησιν ὡς πρός τό νέον σύστημα καί θά συνιστοῦν ἠλεκτρικόν ῥεῦμα, ἤτοι πηγήν τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου $\vec{B}'$.
Βεβαίως καί εἰς τό νέον ἀδρανειακόν σύστημα ἀναφορᾶς τό πεδίον

$\vec{E}'$ διαχωρίζεται τοῦ $\vec{B}'$, ἐπειδή καί τά νέα πεδία εἶναι στατικά.

1.2. Δύναμις Coulomb - Ἀλληλεπίδρασις ἐξ ἀποστάσεως.

Ὁ βασικός νόμος, ὁ ὁποῖος διέπει τήν Ἠλεκτροστατικήν εἶναι ὁ γνωστός νόμος τοῦ Coulomb (1736-1806):

Τά ἠλεκτρικά φορτία ἀλληλεπιδροῦν ἐξ ἀποστάσεως. Ἡ δύναμις, τήν ὁποίαν ἀσκεῖ ἀκίνητον σημειακόν φορτίον q_k, εὑρισκόμενον εἰς τήν θέσιν $\vec{r}_k$ ἐπί ἀκινήτου σημειακοῦ φορτίου q_i εἰς τήν θέσιν $\vec{r}_i$, δίδεται ὑπό τοῦ τύπου:

$$\vec{F}_{ik} = \frac{1}{4\pi} q_i q_k \cdot \frac{\hat{r}_{ik}}{\vec{r}^{\,2}_{ik}} , \tag{4}$$

ὅπου $r^2_{ik} = (\vec{r}_k - \vec{r}_i)^2 = \vec{r}^{\,2}_{ik}$, τό τετράγωνον τῆς ἀποστάσεως $\vec{r}_{ik}$ μεταξύ τῶν δύο φορτίων καί $\hat{r}_{ik} = \dfrac{\vec{r}_{ik}}{|\vec{r}_{ik}|}$, τό μοναδιαῖον ἄνυσμα τῆς διευθύνσεως τῆς δυνάμεως. Ὁ τύπος (4) δίδει καί τόν ὁρισμ. τοῦ φορτίου. Ὅταν ὑπάρχουν περισσότερα τῶν δύο φορτίων ἡ ὁλική δύναμις, ἡ ἀσκουμένη ἐπί ἑνός φορτίου q_i ὑπό φορτίων q_k, εἶναι τό ἀνυσματικόν ἄθροισμα δυνάμεων τῆς μορφῆς (4) ἤτοι:

$$\vec{F}_i = \frac{1}{4\pi} q_i \sum_{k \neq i} q_k \frac{\hat{r}_{ik}}{\vec{r}^{\,2}_{ik}}$$

(Ἀρχή τῆς ἐπαλληλίας).

Πολλάκις χρειαζόμεθα νά περιγράψωμεν τήν δύναμιν Coulomb, τήν ὀφειλομένην εἰς συνεχῆ κατανομήν φορτίου. Πρός τοῦτο εἰσάγομεν τήν ἔννοιαν τῆς πυκνότητος φορτίου $\rho(\vec{x}) = \lim\limits_{\Delta\upsilon \to 0} \dfrac{\Delta q}{\Delta \upsilon}$, ὅπου Δq τό φορτίον ἐντός ἑνός στοιχειώδους ὄγκου $\Delta\upsilon$ εἰς τήν περιοχήν τοῦ $\vec{x}$. Ἀναλόγως δυνάμεθα νά ὁρίσωμεν πυκνότητα μιᾶς ἐπιφανειακῆς ἤ γραμμικῆς κατανομῆς φορτίων.

Τῇ βοηθείᾳ τῆς συναρτήσεως δ τοῦ Dirac δυνάμεθα νά γενικεύσωμεν τόν ὁρισμόν τῆς πυκνότητος διά τήν περιγραφήν καί σημειακῶν φορτίων. Οὕτω, ἐάν σημειακόν φορτίον q εὑρίσκεται εἰς τήν θέσιν $\vec{x}_1$, τότε ἡ πυκνότης φορτίου δίδεται ὡς ἑξῆς:

$$\rho(\vec{x}) = q\delta(\vec{x} - \vec{x}_1).$$

Προφανῶς οἱ ὁρισμοί αὐτοί τῆς πυκνότητος φορτίων εἶναι ἁπλοῖ πρακτικοί μακροσκοπικοί ὁρισμοί. Μικροσκοπικῶς τά φορτία φέρονται ὑπό στοιχειωδῶν σωματίων, π.χ. τῶν ἠλεκτρονίων, καί ἡ πυκνότης $\rho(\vec{x})$ εἶναι ἀσυνεχής.

Οὕτω εἰς μίαν συνεχῆ κατανομήν πυκνότητος φορτίων $\rho(\vec{x})$ εἰς τόν χῶρον, ἄν εἰς τήν θέσιν $\vec{r}$ φέρωμεν σημειακόν ἠλεκτρικόν φορτίον q, θά ἀσκηθῇ ἐπ' αὐτοῦ συνολική δύναμις

$$\vec{F}_q = \frac{q}{4\pi} \int \hat{r}(\vec{x},\vec{x}') \frac{\rho(\vec{x}')}{\vec{r}^{\,2}(\vec{x},\vec{x}')} d^3x'$$

$$= -\frac{q}{4\pi} \vec{\nabla} \int \frac{\rho(\vec{x}')}{r(\vec{x},\vec{x}')} d^3x' .$$

1.3. Τό ἠλεκτρικόν πεδίον· Ἀλληλεπίδρασις μέσῳ τοῦ πεδίου.

Ἡ ἔννοια τῆς ἀκαριαίας ἀλληλεπιδράσεως τῶν φορτίων ἐξ ἀποστάσεως (νόμος τοῦ Coulomb) δέν εἶναι ἱκανοποιητική. Γνωρίζομεν ἄλλωστε ἐκ τῆς θεωρίας τῆς Σχετικότητος, ὅτι ἡ ταχύτης διαδόσεως τῶν φυσικῶν ἀλληλεπιδράσεων δέν δύναται νά ὑπερβῇ τήν ταχύτητα τοῦ φωτός. Οὕτω εἰσάγεται ἡ ἔννοια τοῦ πεδίου. Ἀντί τῆς ἀλληλεπιδράσεως ἐξ ἀποστάσεως θά ἔχωμεν τώρα τήν εἰκόνα τῆς ἀλληλεπιδράσεως μέσῳ τοῦ πεδίου. Τά φορτία δημιουργοῦν εἰς τόν χῶρον τό ἠλεκτρικόν πεδίον $\vec{E}(\vec{x})$, μέσῳ τοῦ ὁποίου μεταβιβάζονται αἱ δυνάμεις. Τό $\vec{E}(\vec{x})$ καλεῖται ἔντασις τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου καί ὁρίζεται διά τοῦ τύπου :

$$\vec{F}_q = q\,\vec{E}(\vec{x}) \,, \tag{5}$$

ὁ ὁποῖος ἐκφράζει τήν δύναμιν $\vec{F}_q$ τήν ἀσκουμένην εἰς φορτίον q, εὑρισκόμενον εἰς τήν θέσιν $\vec{x}$.

Διά νά μετρήσωμεν τήν ἔντασιν τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου εἰς ἕν σημεῖον ὅπου δέν ὑπάρχει φορτίον, φέρομεν εἰς τό σημεῖον τοῦτο διάφορα μικρά ἠλεκτρικά φορτία καί λαμβάνομεν τό ὅριον

$$\vec{E}(\vec{x}) = \lim_{q\to 0} \frac{\vec{F}_q}{q} \tag{6}$$

τῆς δυνάμεως, ἡ ὁποία ἀσκεῖται εἰς τό φορτίον q τοποθετούμενον εἰς τήν θέσιν $\vec{x}$ διά τοῦ φορτίου q. Θεωροῦμεν τόν ἀνωτέρω λόγον εἰς τό ὅριον $q \to 0$, ὥστε τό πρός μέτρησιν ἠλεκτρικόν πεδίον νά μή διαταραχθῇ ἐκ τοῦ προσαγομένου φορτίου μετρήσεως q .

Ὅπως διά τά ἀνύσματα τῆς δυνάμεως οὕτω καί διά τό $\vec{E}$ ἰσχύει ἡ ἀρχή τῆς ἐπαλληλίας. Οὕτω τό ἠλεκτροστατικόν πεδίον, τό ὀφειλόμενον εἰς συνεχῆ κατανομήν φορτίου δίδεται ἐκ τοῦ τύπου:

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}_{\vec{x}} \int \frac{\rho(\vec{x}')\,d^3x'}{r(\vec{x},\vec{x}')} = -\vec{\nabla}\,\Phi(\vec{x}) \,,$$

ὅπου

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\rho(\vec{x}')}{r(\vec{x},\vec{x}')}\,d^3x' \,. \tag{7}$$

Ἐκ τοῦ (7) συνάγομεν ὅτι

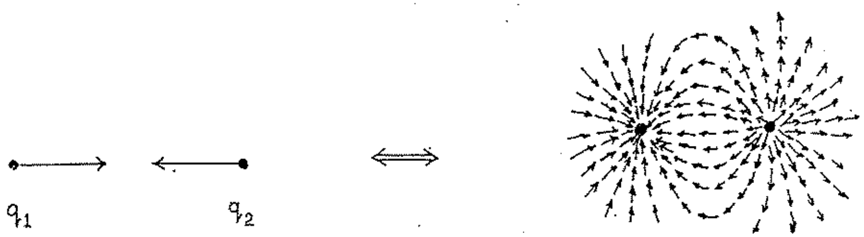
$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0 \,, \tag{8}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho \,. \tag{9}$$

Ἡ ἐξίσωσις (9) εἶναι ἡ πεδιακή ἔκφρασις τοῦ νόμου τοῦ Coulomb, ἡ δέ (8) δηλοῖ ἁπλῶς τήν διατήρησιν τῆς ἐνεργείας εἰς τήν Ἠλεκτροστατικήν.
Ἤτοι ἐκκινοῦντες ἐκ τοῦ νόμου τοῦ Coulomb, εὑρίσκομεν τάς πεδιακάς ἐξισώσεις τοῦ Maxwell διά τήν Ἠλεκτροστατικήν.
Ὥστε ὁ νόμος τοῦ Coulomb καί αἱ ἐξισώσεις τοῦ Maxwell, εἶναι ἐκ ταυτότητος ἰσοδύναμοι εἰς τήν περίπτωσιν τῆς Ἠλεκτροστατικῆς.
Εἰς τήν Ἠλεκτροδυναμικήν ὅμως ἐν γένει ἡ ἔννοια τῆς ἀκαριαίας ἀλληλεπιδράσεως ἐξ ἀποστάσεως ἐγκαταλείπεται, ὡς μή σύμφωνος

πρός τήν είδικήν θεωρίαν τῆς Σχετικότητος. Είς τήν περίπτωσιν αὐτήν ἡ ἔννοια τοῦ πεδίου ἀποκτᾶ οὐσιώδη σημασίαν.

Εἰς τήν νέαν πεδιακήν εἰκόνα, τά φορτία παρουσιάζονται ὡς ἀνωμαλίαι τοῦ πεδίου, ἤτοι ὡς πηγαί ἤ καταβόθραι δυναμικῶν γραμμῶν, (Σχ.5).



Σχῆμα 5

Νόμος Coulomb - ἀλληλεπίδρασις δύο φορτίων ἐξ ἀποστάσεως.

Πεδίον δυνάμεων δύο φορτίων. Τά φορτία ἀποτελοῦν " ἀνωμαλίας τοῦ πεδίου " .

1.4. Τό ἠλεκτροστατικόν πεδίον συναρτήσει τοῦ δυναμικοῦ.

Ἐπειδή κατά τήν (8) τό πεδίον $\vec{E}$ εἶναι ἀστρόβιλον ἕπεται κατά τά γνωστά, ὅτι τό $\vec{E}$ ἀπορρέει ἐκ δυναμικοῦ δηλ.

$\vec{E} = -\vec{\nabla}\,\Phi(\vec{x})$, ὡς ἄλλωστε παρατηροῦμεν εἰς τόν τύπον (7).

Τό δυναμικόν Φ ἔχει ἁπλῆν φυσικήν ἑρμηνείαν. Πρός τοῦτο ἄς θεωρήσωμεν τό ἐπικαμπύλιον ὁλοκλήρωμα τοῦ ἔργου τῶν δυνάμεων, τῶν ἀσκουμένων ἐπί φορτίου q κατά μῆκος μιᾶς τροχιᾶς ἀπό μίαν θέσιν $\vec{x}$ ἕως τό ἄπειρον· τότε:

$$\int_{\vec{x}}^{\infty} \vec{F}\cdot d\vec{s} = q\int_{\vec{x}}^{\infty} \vec{E}\cdot d\vec{s} = -q\int_{\vec{x}}^{\infty} (\vec{\nabla}\Phi)\cdot d\vec{s} = q(\Phi(\vec{x})-\Phi(\infty)). \quad (10)$$

Συνήθως λαμβάνομεν συμβατικῶς $\Phi(\infty) = 0$, ὁπότε τό $\Phi(\vec{x})$ ἐκφράζει τήν δυναμικήν ἐνέργειαν τῆς μονάδος τοῦ ἠλεκτρικοῦ φορτίου εἰς τήν θέσιν $\vec{x}$.

Συναρτήσει τοῦ δυναμικοῦ $\Phi(\vec{x})$ αἱ δύο ἐξισώσεις τῆς Ἠλεκτροστατικῆς συμπτύσσονται εἰς μίαν ἐξίσωσιν, τήν ἐξίσωσιν τοῦ Poisson

$$-\vec{\nabla}^2\,\Phi(\vec{x}) = \rho(\vec{x}) \; . \quad (11)$$

Ἡ ἐξίσωσις (11) εἶναι ἰσοδύναμος μέ τάς (8) καί (9), διότι προφανῶς ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ $\vec{E} = -\vec{\nabla}\,\Phi$ ἔχομεν:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \vec{\nabla}(-\vec{\nabla}\Phi) = \rho \; ,$$

καί

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \vec{\nabla}\times(-\vec{\nabla}\Phi) = 0 \; .$$

1.5. Δίπολα, τετράπολα, πλειονόπολα.

Ἐκτός τῆς εἰσαγωγῆς τῆς ἐννοίας τοῦ σημειακοῦ φορτίου εἶναι πολλάκις χρήσιμος ἡ εἰσαγωγή πολυπλοκωτέρων κατανομῶν φορτίου. Οὕτω εἰσήχθησαν δίπολα, τετράπολα ἤ πλειονόπολα ἐν γένει.

Ἠλεκτρικόν δίπολον καλοῦμεν τό σύστημα δύο ἀντιθέτων σημειακῶν ἠλεκτρικῶν φορτίων $+q$ καί $-q$, εὑρισκομένων εἰς ἀπόστασιν $\vec{s} = \vec{r}_+ - \vec{r}_-$, ὅπου $\vec{r}_+$ ἡ θέσις τοῦ θετικοῦ φορτίου καί $\vec{r}_-$ ἡ θέσις τοῦ ἀρνητικοῦ φορτίου. Τό ἄνυσμα

$$\vec{\ell} = q\,\vec{s} \tag{12}$$

καλεῖται διπολική ροπή τοῦ διπόλου.

Στοιχειῶδες ἠλεκτρικόν δίπολον, καλεῖται τό ὅριον (ὅταν ὑπάρχῃ) ἑνός πεπερασμένου διπόλου, τοῦ ὁποίου τά φορτία τῶν πόλων τείνουν πρός τό ἄπειρον, ἐνῷ ἡ μεταξύ των ἀπόστασις τείνει εἰς τό μηδέν κατά τρόπον ὥστε νά ὑπάρχῃ τό ὅριον $\vec{\ell} = \lim\limits_{\substack{q\to\infty \\ s\to 0}} q\,\vec{s}$.

Τό ὅριον τοῦτο καλεῖται ἠλεκτρική διπολική ροπή τοῦ στοιχειώδους διπόλου. Ἡ διπολική ροπή συνεχοῦς κατανομῆς φορτίου ὁρίζεται ὡς ἑξῆς: $\vec{L} = \int \vec{x}\,\rho(\vec{x})\,d^3x$.

Τό στοιχειῶδες δίπολον εἶναι μία χρήσιμος μακροσκοπική ἔννοια. Τά πραγματικά στοιχειώδη δίπολα συνήθως ἀτομικῶν διαστάσεων, εἶναι πολύ καλή μακροσκοπική προσέγγισις τοῦ ἀνωτέρω μαθηματικοῦ ὁρισμοῦ.

Ὡστόσον ἡ ἔννοια τῆς διπολικῆς ροπῆς συναντᾶται καί εἰς τό βαθύτερον φυσικόν ἐπίπεδον τοῦ μικροκόσμου, δηλ. εἰς τά στοιχειώδη ὑποπυρηνικά σωμάτια. Π.χ. εἶναι βασικόν ἐρώτημα ἐάν τό νετρόνιον ἔχῃ ἠλεκτρικήν διπολικήν ροπήν διάφορον τοῦ μηδενός καί πόσην. Ἐάν ὅλαι αἱ φυσικαί δυνάμεις ἔχουν κατοπτρικήν συμμετρίαν, ἡ ἠλεκτρική διπολική ροπή τοῦ νετρονίου πρέπει νά εἶναι μηδέν. Ὥστε μετρῶντες τήν διπολικήν ροπήν τοῦ νετρονίου ἐλέγχομεν τήν διατήρησιν μιᾶς βασικῆς συμμετρίας.

Ἄν ἕν στοιχειῶδες ἠλεκτρικόν δίπολον εὑρίσκεται ἐντός ἐξωτερικοῦ πεδίου $\vec{E}$, ἔχει δυναμικήν ἐνέργειαν U διδομένην ἐκ τοῦ τύπου:

$$U = q(\Phi(\vec{r}_+) - \Phi(\vec{r}_-)) = qd\Phi = qd\vec{r}\cdot\vec{\nabla}\Phi = \vec{\ell}\cdot\vec{\nabla}\Phi = -\vec{\ell}\cdot\vec{E} \quad . \tag{13}$$

Θά χρησιμοποιήσωμεν τόν τύπον (13) διά νά εὕρωμεν τό πεδίον, τό ὁποῖον δημιουργεῖ τό στοιχειῶδες ἠλεκτρικόν δίπολον εἰς τόν πέριξ χῶρον $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$, ὅπου $\Phi(\vec{r})$ ἡ δυναμική ἐνέργεια τῆς μονάδος φορτίου εἰς τήν θέσιν $\vec{r}$, ἡ ὁποία εἶναι ἴση πρός τήν δυναμικήν ἐνέργειαν τοῦ διπόλου, τοῦ εὑρισκομένου ἐντός τοῦ πεδίου τῆς μονάδος τοῦ ἠλεκτρικοῦ φορτίου:

$$\Phi(\vec{r}) = -\vec{\ell}\cdot\vec{E} = -\vec{\ell}\cdot\frac{(\vec{r}_\delta - \vec{r}_{q=1})}{4\pi r^3} = \frac{\vec{\ell}\cdot\vec{r}}{4\pi r^3} = \frac{-1}{4\pi}\,\vec{\ell}\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) \tag{14}$$

καί $\quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\,\Phi = \dfrac{1}{4\pi}\left[-\dfrac{\vec{\ell}}{r^3} + 3(\vec{\ell}\cdot\vec{r})\,\dfrac{\vec{r}}{r^5}\right]$.

Ὅπως κατεσκευάσαμεν τό δίπολον ἀπό δύο μετατοπισμένα ἀντίθετα φορτία, κατασκευάζομεν τό τετράπολον ἐκ δύο μετατοπισμένων ἀντιθέτων διπόλων. Ἄν λάβωμεν τό ὅριον πάλιν, θά ἔχωμεν τό στοιχειῶδες τετράπολον.

Ἡ τετραπολική ῥοπή Q^{ij}, $i, j = 1, 2,3$, συνεχοῦς κατανομῆς φορτίου ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

$$Q^{ij} = \int_V (3x^i x^j - \delta^{ij}|\vec{x}|^2)\rho(\vec{x})\, d^3x \quad .$$

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἐκ δύο μετατοπισμένων $2^{\nu-1}$ - πόλων, κατασκευάζομεν τό 2^{ν} - πολον. Τό σημειακόν φορτίον δύναται νά θεωρηθῆ ὡς μονόπολον.

2. Συνοριακά προβλήματα τῆς ἠλεκτροστατικῆς καί ἁπλαῖ μέθοδοι ἐπιλύσεως. (Boundary value problems).

2.1. Λύσις τῶν ἐξισώσεων τῆς ἠλεκτροστατικῆς.

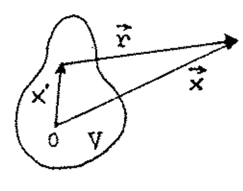
Ἡ ὁλοκλήρωσις τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων (8) καί (9) δίδεται ἐκ τοῦ τύπου (7). Ἡ λύσις αὕτη ὡς ἐδείχθη εἰς τό πρῶτον κεφάλαιον εἶναι μοναδική, ἐφ' ὅσον τό πεδίον $\vec{E}$ μηδενίζεται εἰς τό ἄπειρον ταχύτερον τοῦ $1/r^2$, ἤ φυσικῶς, ὅταν δέν ὑπάρχουν φορτία εἰς τό ἄπειρον. Ὥστε ὁ τύπος (7) θά ἠδύνατο νά συνοψίσῃ θεωρητικῶς τήν λύσιν τοῦ ὅλου προβλήματος τῆς Ἡλεκτροστατικῆς ἐν κενῷ. Δυστυχῶς, μία τοιαύτη λύσις ἀναφερομένη εἰς ἕν " ἠλεκτροστατικόν σύμπαν " ἐντός τοῦ ὁποίου θά πρέπῃ

νά γνωρίζωμεν λεπτομερῶς ὅλην τήν κατανομήν φορτίου, ἔχει προφανῶς ὀλίγην πρακτικήν ἀξίαν. Τό πρακτικόν πρόβλημα τῆς Ἡλεκτροστατικῆς ἔγκειται εἰς τήν λύσιν τῆς ἐξισώσεως (11) τοῦ Poisson, εἰς μίαν περιοχήν ὄγκου V μέ δεδομένην κατανομήν φορτίου ρ ἐντός αὐτοῦ.

Διά νά εὕρωμεν τήν λύσιν θά πρέπῃ, ὡς θά ἴδωμεν, ἐπιπροσθέτως τῆς κατανομῆς ρ ἐντός τοῦ V νά εἶναι γνωσταί καί ἄλλαι πληροφορίαι διά τό δυναμικόν ἐπί τῆς ἐπιφανείας S, ἤτοι τοῦ συνόρου, τό ὁποῖον περικλείει τόν ὄγκον V. Αἱ πληροφορίαι αὐταί συνιστοῦν τάς συνοριακάς συνθήκας τοῦ προβλήματος.

2.2. Ἀσυμπτωτικά ἠλεκτροστατικά δυναμικά πεπερασμένων κατανομῶν φορτίου -Πλειονοπολική ἀνάπτυξις.

Πρίν εἰσέλθομεν εἰς τά κυρίως προβλήματα συνοριακῶν τιμῶν, θά ἐξετάσωμεν εἰς τήν παροῦσαν παράγραφον τήν πρακτικοῦ ἐνδιαφέροντος περίπτωσιν ἀσυμπτωτικοῦ ἠλεκτροστατικοῦ δυναμικοῦ, ὀφειλομένου εἰς πεπερασμένην κατανομήν φορτίου. Συγκεκριμένα, θεωροῦμεν τήν κατανομήν φορτίου $\rho(\vec{x})$ ἐντός χώρου V, ὡς δείκνυται εἰς τό σχῆμα 6 καί ζητοῦμεν τήν ἔκφρασιν τοῦ δυναμικοῦ $\Phi(\vec{x})$ εἰς μεγάλας ἀποστάσεις.



Σχῆμα 6

Κατά τόν τύπον (7) ἔχομεν:

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\rho(\vec{x}')}{r(\vec{x},\vec{x}')}\, d^3x'.$$

Εἰς τήν προκειμένην περίπτωσιν ἔχομεν $|\vec{x}'| < |\vec{x}|$ καί δυνάμεθα νά ἀναπτύξωμεν τό $\frac{1}{r(\vec{x},\vec{x}')}$ εἰς σειράν Taylor ὡς πρός $\vec{x}'$ ὡς ἑξῆς:

$$\frac{1}{r(\vec{x},\vec{x}')} = e^{\vec{x}'\cdot\vec{\nabla}_{\vec{\beta}}} \left.\frac{1}{r(\vec{x},\vec{\beta})}\right|_{\vec{\beta}=\vec{0}} = \frac{1}{r(\vec{x},\vec{0})} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{3} x_i' \frac{\partial}{\partial\beta_i} \left.\frac{1}{r(\vec{x},\vec{\beta})}\right|_{\vec{\beta}=\vec{0}} +$$

$$+ \frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{3} x_i' x_j' \frac{\partial}{\partial\beta_i}\frac{\partial}{\partial\beta_j} \left.\frac{1}{r(\vec{x},\vec{\beta})}\right|_{\vec{\beta}=\vec{0}} + \cdots\cdots$$

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\rho(\vec{x}')}{r(\vec{x},\vec{x}')}\, d^3x' = \frac{Q}{4\pi r(\vec{x},\vec{0})} + \frac{\vec{x}\cdot\vec{\ell}}{4\pi r^3(\vec{x},\vec{0})} +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{x_i x_k Q^{ik}}{2r^5} + \cdots\cdots, \qquad (15)$$

ὅπου $Q = \int_V \rho(\vec{x})\, d^3x$ τό ὁλικόν φορτίον,

$\vec{\ell} = \int_V \vec{x}\, \rho(\vec{x}) d^3x$ ἡ διπολική ροπή τῆς κατανομῆς τοῦ φορτίου,

$Q^{ij} = \int_V (3x^i x^j - \delta^{ij}|\vec{x}|^2)\, \rho(\vec{x})\, d^3x$ ἡ τετραπολική ῥοπή τῆς κατανομῆς κ.ο.κ.

Τό ἴχνος (Trace) τῆς τετραπολικῆς ῥοπῆς εἶναι μηδέν. Τοῦτο συνεπάγεται, ὅτι ἡ τετραπολική ῥοπή δέν συνεισφέρει εἰς τό σφαιρικῶς συμμετρικόν μέρος τοῦ δυναμικοῦ, τό ὁποῖον συνεπῶς ἔχει καθαρῶς τήν μορφήν Coulomb. (Ὁ ὅρος $\frac{1}{3r^3}$ (Trace Q^{ij}) = 0).

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συμπεραίνομεν, ὅτι ὅταν εὑρισκώμεθα μακράν τοῦ στατικοῦ φορτίου τυχοῦσα κατανομή εἶναι ἰσοδύναμος μέ μίαν ἐπαλληλίαν πλειονοπόλων, εὑρισκομένων εἰς τό κέντρον τῆς κατανομῆς.

Τά πλειονόπολα δύνανται νά ὁρισθοῦν καί ὁμαδοθεωρητικῶς ὡς πηγαί τοῦ ἠλεκτροστατικοῦ πεδίου ἀνάγωγοι ὡς πρός τάς στροφάς, δηλ. πηγαί ὡρισμένου σπίν (βλ. σελ. 17).

Τό μονόπολον ἔχει σπίν μηδέν, τό δίπολον ἕνα, τό τετράπολον δύο κ.ο.κ. (βλ. ἐρώτησ. 1). Οὕτω τά πλειονόπολα ὡς σημειακαί πηγαί πεδίου τίθενται ἐπί ἴσης βάσεως μέ τά σημειακά φορτία.

Τά στοιχειώδη πλειονόπολα ἐξαντλοῦν ὅλας τάς δυνατάς σημειακάς πηγάς τοῦ ἠλεκτροστατικοῦ πεδίου (ἀσκ.18).

Παράγραφος

Ἡ ἀντιστοίχως πλειονοπολική ἀνάπτυξις γίνεται βάσει τῆς ταυτότητος:

$$\frac{1}{r(\vec{x},\vec{x}')} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{|\vec{x}'|^{l}}{|\vec{x}|^{l+1}} \; Y_l^m(\theta,\Phi) Y_l^{*m}(\theta',\Phi')$$

ὅπου $\vec{x} = (|\vec{x}|,\theta,\Phi)$, $\vec{x}' = (|\vec{x}'|,\theta',\Phi')$

καί $Y_l^m(\theta,\Phi)$ αἱ σφαιρικαί ἁρμονικαί

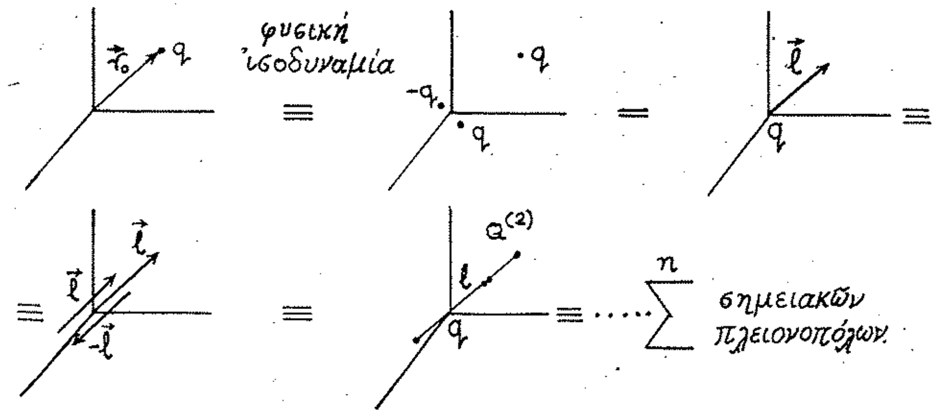
Ἡ (15) λαμβάνει τήν μορφήν

$$\Phi(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{1}{(2l+1)} \frac{q_l^m}{r^{l+1}(\vec{x},0)} \; Y_l^m(\theta,\Phi), \quad (15')$$

ὅπου συντελεσταί $q_l^m = \int |\vec{x}|^l \rho \, Y_l^{*m} d^3x$ αἱ πλειονοπολικαί ροπαί.

Γεωμετρική κατασκευή τῆς πλειονοπολικῆς ἀναπτύξεως.

Ἡ πλειονοπολική ἀνάπτυξις δύναται νά περιγραφῇ καί διά τῆς ἀκολούθου Φυσικῆς Γεωμετρικῆς κατασκευῆς τοῦ σχ. (7).



Σχῆμα 7.

Τό φορτίον q εἰς θέσιν $\vec{r}_o$ εἶναι ἰσοδύναμον πρός ἕν μονόπολον (ἴσον φορτίον q) εἰς τήν ἀρχήν τῶν ἀξόνων σύν ἕν πεπερασμένον δίπολον (συνιστάμενον ἐκ τοῦ ἀρχικοῦ q καί τοῦ − q εἰς τήν ἀρχήν τῶν ἀξόνων). Τό πεπερασμένον δίπολον ἀναλύεται ἀκολούθως εἰς ἕν σημειακόν δίπολον εἰς τήν ἀρχήν τῶν ἀξόνων καί ἕν πεπερασμένον τετράπολον. Οὕτω διαδοχικῶς τό σημειακόν φορτίον εἰς θέσιν $\vec{r}_o$ ἀναλύεται εἰς ἄθροισμα σημειακῶν πλειονοπόλων μέχρι καί 2^{ν}-πολον, εὑρισκομένων εἰς τήν ἀρχήν τῶν ἀξόνων σύν ἕν πεπερασμένον $2^{(\nu+1)}$-πολον. Ἡ συνεισφορά τοῦ πεπερασμένου πλειονοπόλου διά $r > |\vec{r}_o|$ τείνει εἰς τό μηδέν καθώς τό ν τείνει εἰς τό ἄπειρον ὡς $\left(\frac{r_o}{r}\right)^{\nu+2}$.

Παρατηρήσεις.

1. Διά μεγάλας ἀποστάσεις παρατηροῦμεν, ὅτι εἰς τό ἀνάπτυγμα (15) ἕκαστος ὅρος ἐξασθενεῖ ταχύτερον ἀπό τόν προηγούμενόν του καί ἀργότερον ἀπό τόν ἑπόμενόν του. Ἕκαστος ὅρος τοῦ ἀθροίσματος εἶναι χαρακτηριστικός τοῦ δυναμικοῦ ἐξ ἑνός πλειονοπόλου. Ἡ ἀκτίς δράσεως (ἐμβέλεια) ἑκάστου πλειονοπόλου εἶναι χαρακτηριστική τῆς τάξεώς του. Ὥστε διά μεγάλας ἀποστάσεις ἐπικρατεῖ τό δυναμικόν τοῦ πρώτου μή μηδενιζομένου πλειονοπόλου. Π.χ. εἰς τόν νόμον τοῦ Coulomb ἐπικρατεῖ ἡ ἕλξις δύο μακροσκοπικῶν σημειακῶν φορτίων.

2. Διά πολύ μικράς ἀποστάσεις ἔχομεν τό ἀντίστροφον. Βεβαίως διά μικράς ἀποστάσεις τό ἀνάπτυγμα (15), προκειμένου περί συνεχοῦς κατανομῆς φορτίου $|\vec{x}| < |\vec{x}\,'|$ δέν ἰσχύει, παρά μόνον εἰς τήν περίπτωσιν πραγματικῶν σημειακῶν πλειονοπόλων ($\max|\vec{x}\,'|=0$).

Ἐρώτησις.

1. Πόσας ἀνεξαρτήτους συνιστώσας δύναται νά ἔχῃ ἕν 2^{ν}-πολον;

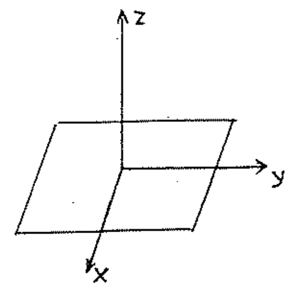
3. Μονοδιάστατα προβλήματα συνοριακῶν τιμῶν.

Ὁ τίτλος τῆς παρούσης παραγράφου " μονοδιάστατα προβλήματα " δέν σημαίνει ἀπαραιτήτως ὅτι εὑρισκόμεθα εἰς χῶρον μιᾶς διαστάσεως, ἀλλά μᾶλλον, ὅτι λόγῳ συμμετρίας ἡ ἐξίσωσις τοῦ Poisson $-\vec{\nabla}^2\phi = \rho$, ἡ ὁποία εἶναι διαφορική ἐξίσωσις μέ μερικάς παραγώγους ὡς πρός τρεῖς μεταβλητάς, ἀντικαθίσταται ἀπό ἰσοδύναμον συνήθη διαφορικήν ἐξίσωσιν ὡς πρός μίαν μεταβλητήν. Τοῦτο

θά γίνῃ σαφέστερον ἐκ τῶν κάτωθι παραδειγμάτων.

Παραδείγματα.

1. Θεωρήσωμεν ἀπέραντον ἐπίπεδον ἐπιφάνειαν ὁμοιομόρφως φορτισμένην μέ πυκνότητα φορτίου σ (ἀνά μονάδα ἐπιφανείας), ὡς φαίνεται εἰς τό σχῆμα 8. Ὁ λοιπός χῶρος εἶναι κενός φορτίου καί ζητεῖται ἡ ἔντασις τοῦ πεδίου.



Σχῆμα 8.

Ἡ γεωμετρία τοῦ προβλήματος ἔχει τάς ἑξῆς συμμετρίας:

i) Συμμετρίαν ὡς πρός τάς Εὐκλειδείους κινήσεις ἐπί τοῦ ἐπιπέδου (xy), λόγῳ ὁμοιομόρφου κατανομῆς.

ii) Συμμετρίαν κατοπτρισμοῦ ὡς πρός τυχόν ἐπίπεδον κάθετον ἐπί τό ἐπίπεδον (xy), διότι τό φορτίον εἶναι βαθμωτόν μέγεθος.

iii) Συμμετρίαν κατοπτρισμοῦ ὡς πρός τό ἐπίπεδον (xy).

Ὑποθέτομεν ἀνωτέρω, ὅτι καί αἱ συνοριακαί συνθῆκαι τοῦ πεδίου εἰς τό ἄπειρον δέν παραβιάζουν τάς ὡς ἄνω συμμετρίας, (φυσικῶς ὑποθέτομεν, ὅτι δέν ἔχομεν ἀσύμμετρον κατανομήν φορτίου εἰς τό ἄπειρον).

Ἐκ τῆς i) ἕπεται ὅτι $\vec{E}(x,y,z) = \vec{E}(0,0,z)$, ἤτοι $\vec{E} = \vec{E}(z)$. Ἐκ τῆς ii) καί γνωστοῦ ὄντος πλέον ὅτι τό $\vec{E}$ εἶναι πολικόν διάνυσμα, τό δέ ἠλεκτρικόν φορτίον βαθμωτόν, ἕπεται ὅτι $E_x(z) = -E_x(z)$ ἐκ τοῦ ὁποίου καί προκύπτει $E_x(z) = 0$.

Ὁμοίως καί $E_y(z) = 0$. Τέλος λόγῳ τῆς iii) ἕπεται ὅτι:

$$E_z(z) = - E_z(-z). \tag{16}$$

Τότε ἡ ἐξίσωσις τοῦ Poisson ἁπλουστεύεται εἰς τήν

$$\frac{d^2\Phi}{dz^2} = 0 \qquad z \neq 0 \quad . \tag{17}$$

Ἐκ τῆς (17) προκύπτει:

$$\Phi = A_+ z + B_+ \qquad z > 0 \quad , \tag{18}$$

$$\Phi = A_- z + B_- \qquad z < 0 \quad , \tag{19}$$

ὅπου $B_+ = B_- = B$, τό αὐθαίρετον δυναμικόν τῆς ἐπιφανείας.

Ἡ ἔντασις $\vec{E}$ τοῦ πεδίου θά εἶναι τότε:

$$\vec{E} = E_+ \hat{z} \qquad z > 0 \quad , \tag{20}$$

$$\vec{E} = E_- \hat{z} = - E_+ \hat{z} \qquad z < 0 \quad . \tag{21}$$

Τό δεύτερον μέλος τῆς (21) προκύπτει βάσει τῆς (16). Ἐξ ἄλλου ὁλοκληρώνοντες τήν ἐξίσωσιν Poisson εἰς τήν περιοχήν τοῦ $z = 0$ εὑρίσκομεν:

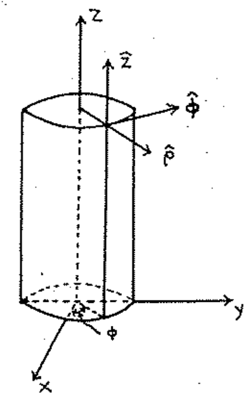
$$2E_+ = \sigma \tag{22}$$

ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει καί βάσει τῶν (20) καί (21)

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2}\hat{z} \qquad z > 0 \quad ,$$

$$\vec{E} = -\frac{\sigma}{2}\hat{z} \qquad z < 0 \quad .$$

2. Δίδεται εὐθεῖα ὁμοιομόρφως φορτισμένη μέ πυκνότητα φορτίου ℓ ἀνά μονάδα μήκους, σχῆμα 9. Ζητεῖται ἡ ἔντασις τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου καί τό δυναμικόν. Ἡ γεωμετρία τοῦ προβλήματος ἔχει τάς κάτωθι συμμετρίας:



Σχῆμα 9.

i) Συμμετρία μεταθέσεως κατά μῆκος τοῦ z.

ii) Συμμετρία περιστροφῆς περί τόν ἄξονα z.

iii) Συμμετρία κατοπτρισμοῦ ὡς πρός τυχόν ἐπίπεδον διερχόμενον διά τοῦ ἄξονος z.

iv) Συμμετρία κατοπτρισμοῦ ὡς πρός τυχόν ἐπίπεδον κάθετον ἐπί τόν ἄξονα z.

Εἰσάγομεν κυλινδρικάς συντεταγμένας (z,ρ,φ).
Ἐκ τῶν i) καί ii) ἕπεται ὅτι: $\vec{E}(z,\rho,\varphi) = \vec{E}(0,\rho,0)$, ἤτοι $\vec{E} = \vec{E}(\rho)$
Ἐκ τῆς iii) ἕπεται ὅτι

$$E_\varphi(\rho) = 0$$

καί βάσει τῆς iv) ἕπεται ὅτι:

$E_z(\rho) = 0$,

ἤτοι $\vec{E}(z,\rho,\varphi) = E(\rho)\hat{\rho}$, (23)

ὅπου $\hat{\rho}$ τό μοναδιαῖον διάνυσμα τῆς κυλινδρικῆς ἀκτῖνος ὡς εἰς τό σχῆμα 9. Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ θεωρήματος Gauss δι' ἕνα κύλινδρον μέ ὕψος h καί ἀκτῖνα βάσεως ρ, προκύπτει:

$$2\pi\ \rho\ h\ E(\rho) = \ell\ h$$

ἤ

$$E(\rho) = \frac{\ell}{2\pi\rho}$$

καί βάσει τῆς (23):

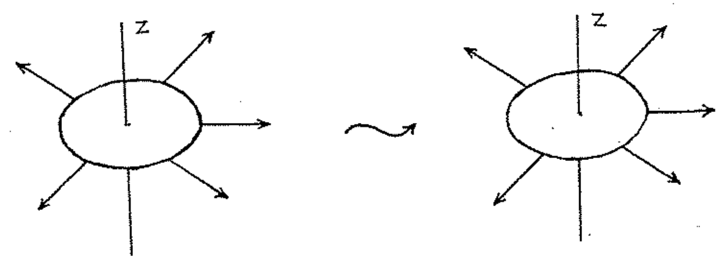
$$\vec{E} = \frac{\ell}{2\pi\rho}\hat{\rho}, \qquad \rho \neq 0 \ . \qquad (24)$$

Τό δυναμικόν σχετίζεται μέ τήν (24) βάσει τῆς σχέσεως

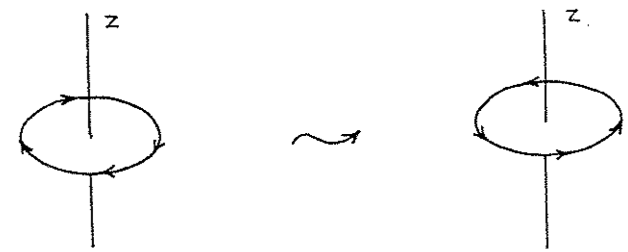
$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi = -\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\hat{\rho}$, ἐξ ἧς καί προκύπτει:

$$E = -\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} = \frac{\ell}{2\pi\rho} \quad \leadsto \quad \Phi = -\int\frac{\ell d\rho}{2\pi\rho} + C \qquad \rho \neq 0 \ .$$

Ἡ ἐξίσωσις (24) συμπίπτει μέ τήν μορφήν τῆς ἐντάσεως τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου, τοῦ ὀφειλομένου εἰς σημειακόν φορτίον εἰς ἕνα Εὐκλείδειον χῶρον 2-διαστάσεων.
Τό φυσικό περιεχόμενον τῆς συμμετρίας τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος, ἀποδίδεται ἁπλῶς διά τῶν ἑξῆς εἰκόνων (σχ. 10):



A. Ὀρθή Εἰκών (Διατήρησις συμμετρίας κατοπτρισμοῦ).



B. Λανθασμένη Εἰκών (παραβίασις συμμετρίας κατοπτρισμοῦ).

Σχῆμα 10. Κατοπτρισμός ὡς πρός τυχόν ἐπίπεδον διερχόμενον διά τοῦ ἄξονος τῶν z .

4. Συνοριακά προβλήματα εἰς δύο διαστάσεις.

Ὅταν ἡ φυσική γεωμετρία τοῦ προβλήματος ἔχῃ συμμετρίαν μεταθέσεως ὡς πρός μίαν διάστασιν, π.χ. ὡς πρός τόν ἄξονα z, $\rho(x,y,z) = \rho(x,y)$ καί $\Phi(x,y,z) = \Phi(x,y)$, ἡ ἐξίσωσις τοῦ Poisson λαμβάνει τήν μορφήν:

$$\frac{\partial^2\Phi(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi(x,y)}{\partial y^2} = -\rho(x,y) \ ,$$

ἤτοι προκύπτει ἡ ἐξίσωσις τοῦ Poisson εἰς δύο διαστάσεις. Αὕτη εἶναι μία μή ὁμογενής διαφορική ἐξίσωσις μέ μερικάς παραγώγους δευτέρας τάξεως (ἐλλειπτικοῦ τύπου) καί ἡ λύσις της ἐν γένει εἶναι ἀσυγκρίτως δυσκολωτέρα τῆς λύσεως τῶν συνήθων διαφορικῶν ἐξισώσεων μιᾶς μεταβλητῆς, αἱ ὁποῖαι ἀντιμετωπίζονται εἰς τά μονοδιάστατα προβλήματα τῆς προηγουμένης παραγράφου. Ἡ δυσκολία τῆς λύσεως τοῦ παρόντος προβλήματος, ἔγκειται κυρίως εἰς τήν εὕρεσιν καταλλήλου λύσεως τῆς ὁμογενοῦς ἐξισώσεως, ὥστε νά ἱκανοποιηθοῦν αἱ συνοριακαί συνθῆκαι. Ἕν μερικόν ὁλοκλήρωμα τῆς μή ὁμογενοῦς ἐξισώσεως προκύπτει πάντα ἐκ τοῦ νόμου τοῦ Coulomb. Ὁδηγούμεθα οὕτω εἰς τήν ἐξίσωσιν τοῦ Laplace εἰς δύο διαστάσεις:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Phi(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi(x,y) = 0 \ . \tag{25}$$

Ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως (25), ἡ ὁποία εἶναι ἐλλειπτική διευκολύνεται πολύ διά τῆς χρήσεως ἀναλυτικῶν μεθόδων. Πράγματι, θεωρήσωμεν τυχοῦσαν ἀναλυτικήν συνάρτησιν $f(z) = \Phi(x,y) + i\psi(x,y)$ μιᾶς μιγαδικῆς μεταβλητῆς $z = x + iy$. Τότε τό πραγματικόν μέρος $\Phi(x,y)$ καί τό φανταστικόν μέρος $\psi(x,y)$, ἱκανοποιοῦν τάς γνωστάς συνθήκας Riemann - Cauchy:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_x &= \psi_y \\ \Phi_y &= -\psi_x \end{aligned}\right\} \ . \tag{26}$$

Αἱ σχέσεις (26) φανερώνουν, ὅτι τά πεδία $\vec{F} = (\psi,\Phi)$ καί $\vec{G} = (\Phi,-\psi)$ εἶναι ἀστρόβιλα.

Ἤτοι $\oint \vec{F}.d\vec{s} = 0$ καί $\oint \vec{G}.d\vec{s} = 0$. Ὁμοίως καί τό πεδίον $\vec{F} + i\vec{G}$ εἶναι ἀστρόβιλον, διότι

$$\oint (\vec{F} + i\vec{G}).d\vec{s} = \oint f\,dz = \oint (\Phi + i\psi)(dx + idy) = \oint (\Phi dx - \psi dy)$$

$$+ i(\Phi dy + \psi dx) = \oint \vec{G}.d\vec{s} + i\oint \vec{F}.d\vec{s} = 0 \ .$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (26) ἕπεται:

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0 \ , \tag{27}$$

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} = 0 \ , \tag{28}$$

$$\Phi_x\psi_x + \Phi_y\psi_y = 0 \ . \tag{29}$$

Ὥστε τό πραγματικόν Φ (x,y) καί τό φανταστικόν Ψ(x ,y) μέρος μιᾶς συναρτήσεως $f = \Phi + i\Psi$ ἀναλυτικῶς ἐντός μιᾶς περιοχῆς D , ἱκανοποιεῖ τήν ἐξίσωσιν τοῦ Laplace (27), (28) ἤτοι αἱ Φ καί Ψ εἶναι ἁρμονικαί συναρτήσεις. Ἀντιστρόφως δοθείσης μιᾶς συναρτήσεως $\Phi(x,y)$(ἤ $\Psi(x,y)$), ἡ ὁποία ἱκανοποιεῖ τήν ἐξίσωσιν τοῦ Laplace ἐντός μιᾶς περιοχῆς D, τότε δυνάμεθα νά ὁρίσωμεν μίαν συνάρτησιν f ἀναλυτικήν ἐντός τῆς αὐτῆς περιοχῆς καί ἔχουσαν τήν Φ ἤ τήν Ψ ὡς πραγματικόν (ἤ φανταστικόν) μέρος αὐτῆς.(βλέπε π.χ Δ. Κάππος "Θεωρία Μιγαδικῶν Συναρτήσεων" σελ. 189 (1963). Τοῦτο ἀποτελεῖ τήν βάσιν μιᾶς ἀντιστοιχίας μεταξύ ἀναλυτικῶν συναρτήσεων καί συναρτήσεων ἠλεκτροστατικοῦ δυναμικοῦ εἰς δύο διαστάσεις. Πράγματι, αἱ σχέσεις (27),(28) καί 29) δύνανται νά ἔχουν ἄμεσον φυσικήν ἑρμηνείαν. Τό πραγματικόν μέρος Φ, ἀποτελεῖ λύσιν τῆς ἐξισώσεως τοῦ Laplace καί δύναται νά ἑρμηνευθῆ ὡς τό δυναμικόν διά κάποιο πρόβλημα Ἠλεκτροστατικῆς.Ἡ οἰκογένεια $\Phi(x,y)=C$, ἀποτελεῖ τάς ἰσοδυναμικάς γραμμάς καί ἡ οἰκογένεια $\Psi(x,y)=C'$ τάς γραμμάς ροῆς.Ἡ (29) ἐκφράζει ὅτι αἱ ἰσοδυναμικαί γραμμαί τέμνονται καθέτως μέ τάς γραμμάς ροῆς. Δύο γραμμαί ροῆς ὁρίζουν ἕνα σωλῆνα ροῆς. Τό πλῆθος τῶν γραμμῶν ροῆς ἐντός ἑνός σωλῆνος ροῆς εἶναι σταθερόν.

Παρουσία πηγῶν (φορτίου), $-\nabla^2\phi=\rho(x,y)$ τό πεδίον $\vec{H} = -\vec{\nabla}\Psi$ τῶν γραμμῶν ροῆς $\Psi(x,y) = C$ καθίσταται στροβιλόν,

$$q = \int \rho(x,y)\, dx\, dy = -\int \vec{\nabla}\Phi . d\vec{S} = -\int \vec{\nabla}\Psi . d\vec{z} = \oint \vec{H} . d\vec{z} = \Psi_- - \Psi_+ \qquad (29_A)$$

ἤ $\vec{\nabla} \times \vec{H}(x,y)=\vec{j}(x,y) = \rho(x,y)\hat{n}$

ὅπου $d\vec{S}$ τοῦ τύπου (29_A) (ὅπου γίνεται χρῆσις τοῦ θεωρήματος τοῦ Gauss εἰς δύο διαστάσεις) εἶναι τό ἄνυσμα(dy,-dx) κάθετον ἐπί τοῦ $d\vec{z} \equiv (dx,dy)$ καί $\hat{n}$ τό μοναδιαῖον ἄνυσματό ὁποῖον ὁρίζει τό ἐπίπεδον (x,y).

Τό $\vec{H}$ δύναται νά ἑρμηνευθῆ ὡς μαγνητικόν πεδίον εἰς τόν χῶρον τῶν δύο διαστάσεων. Ὁ τύπος (29_A),ὡς θά ἴδωμεν ἀργότερον συνδέει τήν Ἠλεκτροστατικήν τῶν δύο διαστάσεων μέ τήν Μαγνητοστατικήν τῶν δύο διαστάσεων. Ἐπειδή αἱ Φ καί Ψ εἶναι ταυτοχρόνως λύσεις τῆς ἐξισώσεως Laplace,βάσει τοῦ τύπου (28),ἡ φυσική ἑρμηνεία των εἶναι ἐναλλακτική, ὥστε καί ἡ $\Psi(x,y)=C'$ νά δύναται νά θεωρηθῆ ὅτι δίδη τάς ἰσοδυναμικάς γραμμάς ὁπότε ἡ $\phi(x,y)=C$ θά δίδη τάς γραμμάς ροῆς.

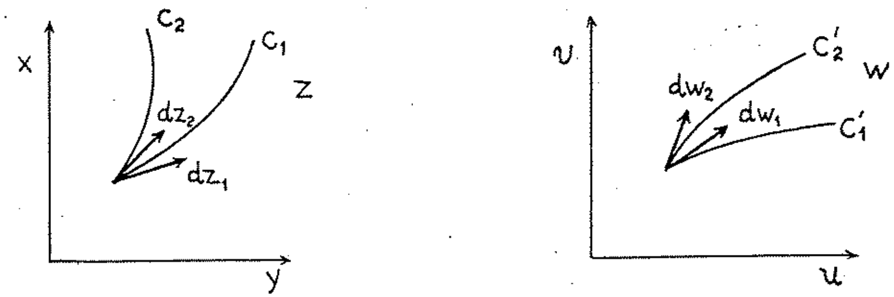
4.1. Ἀναλυτικοί μετασχηματισμοί (Σύμμορφος ἀπεικόνισις).

Ἡ ἀντιστοιχία μεταξύ ἠλεκτροστατικῶν συναρτήσεων δυναμικοῦ εἰς δύο διαστάσεις καί ἀναλυτικῶν συναρτήσεων , τήν ὁποίαν εἴδομεν εἰς τήν προηγουμένην παράγραφον, μᾶς προσφέρει τήν δυνατότητα χρησιμοποιήσεως ἀναλυτικῶν μεθόδων , ὡς ἰσχυρότατον ἐργαλεῖον διά τήν ἐπίλυσιν πρακτικῶν προβλημάτων τῆς Ἠλεκτροστατικῆς καί ἀντιστρόφως.

Οὕτω π.χ. ἐπειδή ἡ ἀναλυτική συνάρτησις ἀναλυτικῆς συναρτήσεως, εἶναι ἀναλυτική συνάρτησις, δηλαδή ἡ $\phi(z(z'))$ εἶναι ἀναλυτική συνάρτησις τοῦ z', ὅταν ἡ $\phi(z)$ εἶναι ἀναλυτική συνάρτησις τοῦ z καί ἡ $z(z')$ εἶναι ἀναλυτική συνάρτησις τοῦ z', δυνάμεθα διά καταλλήλου μετασχηματισμοῦ $z = z(z')$ νά ἀπεικονίσωμεν μίαν δοθεῖσαν γεωμετρίαν εἰς ἄλλην ἁπλουστέραν, οὕτως ὥστε νά εὕρωμεν τήν λύσιν τοῦ συνοριακοῦ προβλήματος εἰς τό ἐπίπεδον z' καί κατόπιν νά μεταφερθῶμεν εἰς τό ἀρχικόν πρόβλημα.

Ἡ ἀπεικόνισις αὕτη διατηρεῖ τάς γωνίας κατά μέγεθος καί ὀνομάζεται σύμμορφος ἀπεικόνισις (conformal mapping).

Ἡ διατήρησις τῶν γωνιῶν ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς: Ἡ γωνία τομῆς δύο καμπύλων C_1 καί C_2 δίδεται ἐκ τοῦ ὁρίσματος τοῦ γινομένου $\overline{dz_1}dz_2$ δύο στοιχειωδῶν ἀνυσμάτων dz_1, dz_2, ἐφαπτομένων τῶν δύο θεωρουμένων καμπύλων εἰς τό σημεῖον τομῆς των.(βλ.σχ.11)



Σχῆμα 11.

Κατά μίαν ἀναλυτικήν ἀπεικόνισιν $z \longrightarrow W(z)$ ἔχομεν προφανῶς

$$\overline{dz_1}dz_2 = |dz_1||dz_2|e^{i\vartheta_{12}} = \left(\frac{\overline{dz_1}}{dw_1}\right)\left(\frac{dz_2}{dw_2}\right)\overline{dw_1}\,dw_2 = \left|\frac{dz}{dw}\right|^2 \overline{dw_1}\,dw_2 =$$

$$= \left|\frac{dz}{dw}\right|^2|dw_1||dw_2|e^{i\varphi_{12}}$$, ὅπου ϑ_{12} ἡ γωνία μεταξύ τῶν dz_1, dz_2 καί φ_{12} ἡ γωνία μεταξύ τῶν εἰκόνων των dw_1 καί dw_2 ἀντιστοίχως. Εἰς τόν ἀνωτέρω τύπον ἐγένετο χρῆσις τῆς ἰσότητος $\frac{dz_1}{dw_1} = \frac{dz_2}{dw_2} = \frac{dz}{dw}$, ἐξ ὁρισμοῦ τῆς ἀναλυτικῆς συναρτήσεως z(w). Οἱ δεῖκται1,2 ἀναφέρονται εἰς τάς τροχιάς C_1 καί C_2 ἤ C_1' , C_2' ἀντιστοίχως. Ὥστε αἱ καμπύλαι C_1, C_2 καί αἱ εἰκόνες των τέμνονται ὑπό τήν αὐτήν γωνίαν.

Εἰς τήν σύμμορφον ἀπεικόνισιν δυνάμεθα νά περιλάβωμεν καί τόν μετασχηματισμόν $f(z) \longrightarrow F(z) = \bar{f}(\bar{z})$."Αν ἡ f(z) εἶναι ἀνα-

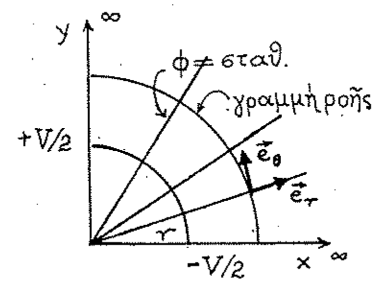
λυτική, τότε καί ἡ F(z) εἶναι ἀναλυτική (ἄσκ. 8) .

Ἡ ἀπεικόνισις αὕτη διατηρεῖ τό μέγεθος τῶν γωνιῶν καί ἀντιστρέφει τήν φοράν των.

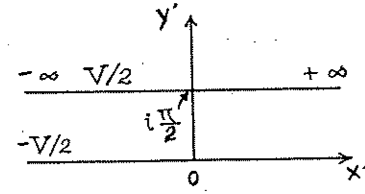
Κατά τήν σύμμορφον ἀπεικόνισιν τό φορτίον διατηρεῖται, ἡ δέ πυκνότης μετασχηματίζεται ὡς ἀκολούθως: $\rho' = \frac{\rho}{|f'(z)|^2}$. (Βλ.ἄσκ.19

Τήν χρῆσιν τῆς συμμόρφου ἀπεικονίσεως θά ἴδωμεν εἰς χαρακτηριστικόν παράδειγμα.

4.2. Παράδειγμα ἐφαρμογῆς συμμόρφου ἀπεικονίσεως.



Σχῆμα 12α.



Σχῆμα 12β.

Δίδονται δύο ἰσοδυναμικαί ἐπιφάνειαι ἀπείρων διαστάσεων κάθετοι ἐπ' ἀλλήλας, ὡς εἰς τό σχῆμα12α καί ζητεῖται ἡ ἔντασις τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου.

Τό πρόβλημα εἶναι προφανῶς διδιάστατον. Διά τοῦ μετασχηματισμοῦ

$$z' = \ln z = \ln r + i\theta,$$

ἡ γεωμετρία τοῦ σχήματος 12α ἀπεικονίζεται εἰς τήν τοῦ σχήματος

12β . Ἐκ τούτου ἔχομεν διά τό δυναμικόν $\Phi(x', y')$,

$$\Phi(x', y') = \alpha y' + \beta$$

καί λόγῳ τῶν ὁριακῶν συνθηκῶν:

$$\Phi(x', y') = \frac{2V}{\pi} y' - \frac{V}{2} \quad .$$

Ἀναζητοῦμεν συνάρτησιν τώρα $\psi(x',y')$ τοιαύτην, ὥστε ἡ

$f(z') = \Phi(x', y') + i\psi(x',y')$ νά εἶναι ἀναλυτική. Ἐκ τῶν συνθηκῶν Cauchy - Riemann, ἐπιβεβαιοῦμεν,
ὅτι ἡ $\psi(x',y') = -\frac{2V}{\pi} x'$, ὁπότε:

$$f(z') = -i\frac{2V}{\pi}(x'+iy') - \frac{V}{2} = -i\frac{2V}{\pi}z' - \frac{V}{2}$$

καί ἑπομένως: $\quad f(z'(z)) = -i\frac{2V}{\pi}\ln z - \frac{V}{2} =$

$$= -i\frac{2V}{\pi}(\ln r + i\vartheta) - \frac{V}{2} = \left(\frac{2V}{\pi}\vartheta - \frac{V}{2}\right) - i\frac{2V}{\pi}\ln r \quad .$$

Ὥστε τό ζητούμενον δυναμικόν εἶναι:

$$\Phi(r,\vartheta) = \frac{2V}{\pi}\vartheta - \frac{V}{2}$$

καί ἡ ἔντασις τοῦ πεδίου $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi = -\frac{2V}{\pi r}\vec{e}_\vartheta$,

ὅπου $\vec{\nabla} = \frac{\vec{r}}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\vec{e}_\vartheta}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta}$, τό ἀνάδελτα εἰς πολικάς συντεταγμένας.

Ἡ οἰκογένεια τῶν ἰσοδυναμικῶν ἐπιφανειῶν εἶναι ἐπίπεδα διερχόμενα διά τοῦ ἄξονος τῶν z καί σχηματίζοντα μετά τοῦ x γωνίας ϑ,

$$\frac{2V}{\pi}\vartheta - \frac{V}{2} = \sigma\tau\alpha\vartheta.$$

Ἡ οἰκογένεια τῶν σωλήνων ῥοῆς συνίσταται ἐξ ὁμοαξονικῶν κυλίνδρων,

$$-\frac{2r}{\pi}\ln r = \sigma\tau\alpha\vartheta. \qquad \text{ἤ} \qquad r = \sigma\tau\alpha\vartheta.$$

Ὡς ἤδη ἀνεφέρθη εἰς τήν §4 εἶναι δυνατόν νά ἀναζητήσωμεν πρόβλημα, ὅπου ἡ οἰκογένεια τῶν ἐπιφανειῶν ϑ = σταθ. θά ἀντιπροσωπεύῃ τούς σωλῆνας ροῆς καί ἡ οἰκογένεια τῶν ἐπιφανειῶν r = σταθ. θά ἀντιπροσωπεύῃ τάς ἰσοδυναμικάς ἐπιφανείας, ἐναλλάσσοντας οὕτω τήν φυσικήν ἑρμηνείαν τῶν Φ καί ψ. Πράγματι ἐάν θεωρήσωμεν τόν ἄξονα z φορτισμένον μέ σταθεράν πυκνότητα φορτίου ἀνά μονάδα μήκους, τότε ἡ r = σταθ. θά ἀντιπροσωπεύῃ τάς ἰσοδυναμικάς ἐπιφανείας καί ϑ = σταθ. θά δίδῃ τούς σωλῆνας ροῆς. Παρατηροῦμεν, ὅτι ἐπί τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος ἐπανευρίσκομεν τό δυναμικόν Coulomb εἰς 2 διαστάσεις.

4.3. Μετασχηματισμός Schwartz - Christoffel.

Κλείνοντες τήν §4 ἀναφέρομεν τούς γενικούς μετασχηματισμούς Schwartz - Christoffel, διά τῶν ὁποίων ἀπεικονίζομεν κλειστά πολύγωνα τοῦ ἐπιπέδου w, εἰς τό ἄνω ἥμισυ ἐπίπεδον τοῦ z, οὕτως ὥστε τό σύνορον τοῦ πολυγώνου νά ἀπεικονίζεται ἐπί τοῦ πραγματικοῦ ἄξονος x καί τό τυχόν ἐσωτερικόν σημεῖον w_o τοῦ πολυγώνου (ἐπί τοῦ ἐπιπέδου w) εἰς τό z_o , εὑρισκομένου εἰς τό ἄνω ἥμισυ ἐπίπεδον τοῦ z.

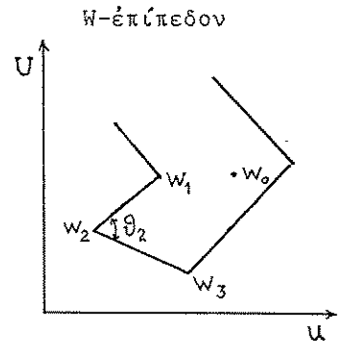
Ὁ μετασχηματισμός δίδεται ὑπό τῆς σχέσεως $w = f(z)$,

ὅπου $$\frac{df}{dz} = A(z-x_1)^{-k_1}(z-x_2)^{-k_2}\ldots\ldots(z-x_n)^{-k_n} \quad .$$

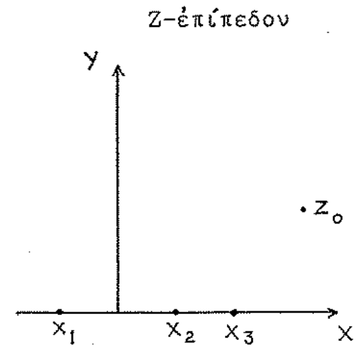
Αἱ k_j, $j = 1,2,..,n$ εἶναι σταθεραί καί σχετίζονται μέ τάς ἐσωτερικάς γωνίας ϑ_j τοῦ πολυγώνου τοῦ σχήματος 13 διά τῆς σχέσεως: $k_j = 1 - \frac{\vartheta_j}{\pi}$. Τά x_j , $j = 1,2,\ldots n$, εἶναι αἱ εἰκόνες τῶν κορυφῶν w_j ἐπί τοῦ πραγματικοῦ ἄξονος, ὡς φαίνεται εἰς τό σχῆμα 14, ἐκ τῶν ὁποίων τρία δύνανται νά ἐκλεγοῦν αὐθαιρέτως. Ὁ συντελεστής A εἶναι ἁπλῶς ἕνας συντελεστής διαστολῆς τοῦ πολυγώνου κατά $|A|$ καί στροφῆς κατά μίαν ἐπιθυμητήν γωνίαν ἴσην μέ τό ὅρισμα (argument) τοῦ A.

Ἡ συνάρτησις $f(z)$ δέν εἶναι ἀναλυτική εἰς τά σημεῖα $z = x_j$, ὅπου ἀκριβῶς καί ἡ ἀπεικόνισις παύει νά εἶναι σύμμορφος. Εἰς τά σημεῖα αὐτά αἱ γωνίαι διαστέλλονται ἀπό ϑ_i εἰς π . Τέλος ἀναφέρομεν, ὅτι ἡ σύμμορφος ἀπεικόνισις εἶναι πολλάκις λίαν χρήσιμος καί εἰς γνησίως τριδιάστατα προβλήματα τῆς Ἠλεκτροστατικῆς. Ἕν ἀπό τά συνηθέστερα τεχνάσματα πρός τοῦτο εἶναι γένεσις τρισορθογωνίων συστημάτων ἀναφορᾶς διά περιστροφῆς τοῦ ἐπιπέδου xy περί τυχόντα ἄξονα τοῦ ἐπιπέδου, ὅτε τά περιστρε-

φόμενα ἐπίπεδα ὁμοῦ μετά τῶν ἐπιφανειῶν ἐκ περιστροφῆς, αἱ ὁποῖαι διαγράφονται ἀπό τάς ἀρχικῶς ἐπιπέδους ἰσοδυναμικάς γραμμάς καί γραμμάς ροῆς, ὁρίζουν ἕν τρισορθογώνιον σύστημα συντεταγμένων εἰς τόν χῶρον. Κατ' αὐτόν τόν τρόπον ὁρίζονται διάφορα συστήματα ὀρθογωνίων καμπυλογράμμων συντεταγμένων, μέ τά ὁποῖα ἀναλόγως καί τῆς γεωμετρίας τοῦ προβλήματος εἶναι δυνατός πολλάκις ὁ διαχωρισμός τῶν μεταβλητῶν τῆς ἐξισώσεως τοῦ Poisson.



Σχῆμα 13.



Σχῆμα 14.

5. Λύσις συνοριακῶν προβλημάτων διά τῶν μεθόδων ἀντιστροφῆς καί κατοπτρισμοῦ.

Ὁ μετασχηματισμός τῆς ἀντιστροφῆς εἶναι γνωστός ἐκ τῆς στοιχειώδους γεωμετρίας.

Ἀντιστροφήν ὡς πρός μίαν σφαῖραν ἀκτῖνος R , (θεωρουμένου τοῦ κέντρου της εἰς τήν ἀρχήν τῶν ἀξόνων), καλοῦμεν τήν ἀπεικόνισιν ἑκάστου σημείου $\vec{r}(r,\vartheta,\varphi)$ τοῦ χώρου, εἰς τό σημεῖον $\vec{r}'(r',\vartheta,\varphi)$ διά τοῦ μετασχηματισμοῦ:

$$\vec{r}' = R^2 \frac{\vec{r}}{r^2} \quad \text{ἤ} \quad r' = \frac{R^2}{r}, \quad \vartheta = \vartheta' \quad \varphi = \varphi' , \tag{30}$$

ὅπου (r,ϑ,φ) αἱ σφαιρικαί συντεταγμέναι τοῦ σημείου $\vec{r}$ καί (r',ϑ,φ) αἱ σφαιρικαί συντεταγμέναι τοῦ $\vec{r}'$, εἰδώλου τοῦ $\vec{r}$. Πρέπει νά σημειώσωμεν, ὅτι ἡ ἀντιστροφή μετασχηματίζει σφαί-ρας εἰς σφαίρας ἤ ἐπίπεδα καί ὡς ἐκ τούτου δι' ἐφαρμογῆς αὐτῆς, δυνάμεθα νά ἁπλουστεύσωμεν τήν γεωμετρίαν ἁπλῶν συνορι-ακῶν προβλημάτων. Ἡ χρῆσις τῆς μεθόδου τῆς ἀντιστροφῆς στηρί-ζεται ἐπί τῆς ἀκολούθου παρατηρήσεως:

Ἄν ἡ συνάρτησις $\Phi(r,\vartheta,\varphi)$ ἱκανοποιῇ τήν ἐξίσωσιν τοῦ Laplace, εἶναι δηλαδή λύσις ἑνός ὁμογενοῦς προβλήματος τῆς Ἠ-λεκτροστατικῆς, τό αὐτό θά ἰσχύῃ καί διά τήν συνάρτησιν

$$\Phi'(r',\vartheta,\varphi) = \frac{R}{r}\,\Phi\left(\frac{R^2}{r},\vartheta,\varphi\right).$$

Πράγματι ἐργαζόμενοι εἰς πολικάς συντεταγμένας ἀποδεικνύ-ομεν τήν πρότασιν.

Ἐκφράζοντες τήν Laplacian εἰς πολικάς συντεταγμένας ἔχο-μεν:

$$\vec{\nabla}^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{L^2(\vartheta,\varphi)}{r^2} \right) ,$$

ὅπου $L^2(\vartheta,\varphi) = - \left[\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \right]$.

Ἐκτελοῦντες τάς πράξεις εὑρίσκομεν λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν τοῦ μετασχηματισμοῦ (30),

$$\vec{\nabla}^2\left[\frac{R}{r}\,\Phi\left(\frac{R^2}{r},\vartheta,\varphi\right) \right] = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{L^2(\vartheta,\varphi)}{r^2} \right) \frac{R}{r}\,\Phi\left(\frac{R^2}{r},\vartheta,\varphi\right) =$$

$$= R^{-5} r'^5 \left(\frac{\partial^2}{\partial r'^2} + \frac{2}{r'}\frac{\partial}{\partial r'} - \frac{L^2(\vartheta,\varphi)}{r'^2} \right) \Phi(r',\vartheta,\varphi) =$$

$$= R^{-5} r'^5\, \vec{\nabla}'^2\, \Phi(r',\vartheta,\varphi) = 0,$$

ὅπου $\vec{\nabla}'^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial r'^2} + \frac{2}{r'}\frac{\partial}{\partial r'} - \frac{L^2(\vartheta,\varphi)}{r'^2} \right)$,

διότι ὑπετέθη $\vec{\nabla}^2\,\Phi(r,\vartheta,\varphi) = 0$, ὅ.ἔ.δ.

5.1. Ἀντιστροφή σημειακοῦ φορτίου.

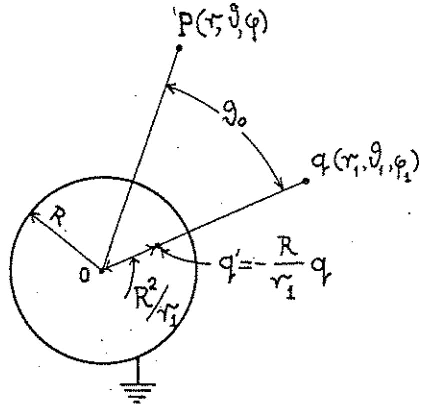
Ὁρίζομεν ὡς εἴδωλον ἀντιστροφῆς ἑνός φορτίου q, ἕν φορ-τίον q', τό ὁποῖον εὑρίσκεται εἰς τήν θέσιν εἰδώλου ἀντιστρο-φῆς τοῦ φορτίου q, οὕτως ὥστε ἡ σφαῖρα ἀντιστροφῆς νά καθίστα-ται μηδενική ἰσοδυναμική ἐπιφάνεια.

Τοιουτοτρόπως εὑρίσκομεν ὅτι τό φορτίον $q' = -\frac{R}{r}\,q$,

ὅπου R εἶναι ἡ ἀκτίς τῆς σφαίρας ἀντιστροφῆς καί r ἡ ἀκτινική συντεταγμένη τῆς θέσεως τοῦ φορτίου q.

Ἄν ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας εἶναι ἰσοδυναμική ἐπιφάνεια δυναμικοῦ C, τότε προσθέτομεν εἰς τό κέντρον τῆς σφαίρας ἕν εἴδωλον φορτίου $q = 4\pi RC$ καί ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἀντι - στροφῆς ἀποκτᾶ τό οἱονδήποτε σταθερόν δυναμικόν C .

Παράδειγμα.



Σχῆμα 15.

Ἔστω ἀγωγός σφαῖρα ἀκτῖνος R προσγειωμένη καί φορτίον q ἐκτός αὐτῆς, (σχῆμα 15) . Ζητεῖται τό δυναμικόν.

Τό δυναμικόν εἰς ἀπόστασιν $r > R$ ἀπό τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, δίδεται ὡς ἐπαλληλία τῶν δυναμικῶν Coulomb, τά ὁποῖα δημιουργοῦνται ἀπό τά φορτία q καί q' .

Δίδομεν τό δυναμικόν εἰς τό τυχόν σημεῖον $p(r,\vartheta,\varphi)$, $r > R$.

$$\Phi(r,\vartheta,\varphi) = \frac{q}{\sqrt{(r^2 + r_1^{\,2} - 2rr_1\cos\vartheta_0)}} - \frac{\frac{R}{r_1}q}{\sqrt{(r^2 + \frac{R^4}{r_1^{\,2}} - 2r\frac{R^2}{r_1}\cos\vartheta_0)}} .$$

Προφανῶς $\Phi(R,\vartheta,\varphi) = 0$.

Ἐπίσης εἶναι καταφανές ὅτι διά $r < R$, τό δυναμικόν εἶναι $\Phi = 0$.

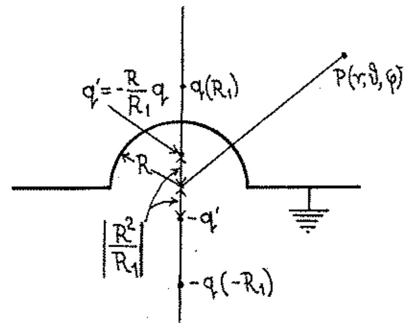
Κατοπτρισμός.

Ὁ κατοπτρισμός δύναται νά θεωρηθῇ ὡς εἰδική περίπτωσις τῆς ἀντιστροφῆς, ὅταν ἡ σφαῖρα ἀντιστροφῆς γίνεται ἕν ἐπίπεδον E (δηλαδή σφαῖρα μέ ἀκτῖνα $R = \infty$). Τότε τό εἴδωλον τοῦ φορτίου q εἶναι τό $-q$ εἰς τήν κατοπτρικήν θέσιν τοῦ q ὡς πρός τό ἐπίπεδον E .

Παράδειγμα.

Δίδεται ἄπειρος προσγειωμένη πλάξ ἀγωγός, μέ μίαν ἡμισφαιρικήν προεξοχήν ἀκτῖνος R, ὡς εἰς τό σχῆμα 16 καί ἠλεκτρικόν φορτίον q ἀκριβῶς ἄνωθεν τῆς προεξοχῆς εἰς ἀπόστασιν $R_1 > R$.

Ζητεῖται τό δυναμικόν.



Σχῆμα 16.

Τό ζητούμενον δυναμικόν δύναται νά εὑρεθῇ εὐκολώτατα διά τῆς χρήσεως τῆς μεθόδου ἀντιστροφῆς καί κατοπτρισμοῦ. Συμφώνως πρός τά ἀνωτέρω, τό δυναμικόν εἰς τυχόν σημεῖον $p(r,\vartheta,\varphi)$ εὑρίσκεται δι' ἐπαλληλίας τῶν δυναμικῶν Coulomb, τά ὁποῖα ὀφείλονται εἰς τά φορτία q, $-q$, q', $-q'$, τά ὁποῖα ἀντικαθιστοῦν ἀγώγιμον ἐπιφάνειαν.

Οὕτω:

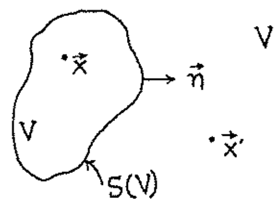
$$\Phi(r,\vartheta) = \frac{q}{\sqrt{(r^2+R_1^2-2R_1 r\cos\vartheta)}} - \frac{q}{\sqrt{(r^2+R_1^2+2R_1 r\cos\vartheta)}} -$$

$$- \frac{\frac{R}{R_1}q}{\sqrt{r^2+\frac{R^4}{R_1^2}-\frac{2R^2 r}{R_1}\cos\vartheta}} + \frac{\frac{R}{R_1}q}{\sqrt{r^2+\frac{R^4}{R_1^2}+\frac{2R^2 r}{R_1}\cos\vartheta}} .$$

Προκειμένου νά εὕρωμεν τήν κατανομήν φορτίου ἐπί τῆς ἡμισφαιρικῆς προεξοχῆς, χρησιμοποιοῦμεν τόν τύπον:

$$\sigma(\vartheta) = - \left.\frac{\partial\Phi(r,\vartheta)}{\partial r}\right|_{r=R}$$

6. Γενική λύσις συνοριακῶν προβλημάτων εἰς τόν χῶρον τῶν τριῶν διαστάσεων – Συνάρτησις Green.



Σχῆμα 17.

Θεωρήσωμεν μίαν πεπερασμένην περιοχήν ὄγκου V εἰς τήν ὁποίαν ζητοῦμεν νά ἐπιλύσωμεν τό πρόβλημα τῆς Ἠλεκτροστατικῆς, δοθείσης τῆς κατανομῆς φορτίου $\rho(\vec{x})$ ἐντός τοῦ χώρου V καί τῶν συνοριακῶν συνθηκῶν ἐπί τῆς ἐπιφανείας S(V), ὡς φαίνεται εἰς τό σχῆμα 17. (Ἡ S(V) ἀποτελεῖ τό σύνορον τοῦ ὄγκου V μετά τοῦ ὑπολοίπου χώρου V').

Κατά τά γνωστά τό δυναμικόν δίδεται ὑπό τῆς σχέσεως:

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\rho(\vec{x}')}{r(\vec{x},\vec{x}')}\,d^3x' + \frac{1}{4\pi}\int_{V'} \frac{\rho(\vec{x}')}{r(\vec{x},\vec{x}')}\,d^3x' ,$$

ἤ τῇ βοηθείᾳ τῆς ἐξισώσεως τοῦ Poisson – $\vec{\nabla}^2\Phi = \rho$, διά τό ὁλοκλήρωμα ὑπεράνω τοῦ V' :

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\rho(\vec{x}')}{r(\vec{x},\vec{x}')}\,d^3x' - \frac{1}{4\pi}\int_{V'} \frac{\vec{\nabla}'^2\Phi(\vec{x}')}{r(\vec{x},\vec{x}')}\,d^3x' .$$

Ἐπειδή αἱ πληροφορίαι μας ἐκ τοῦ ὄγκου V' περιορίζονται μόνον ἐπί τῆς συνοριακῆς ἐπιφανείας S(V), μετασχηματίζομεν τό δεύτερον ὁλοκλήρωμα, κάνοντες χρῆσιν τῆς ταυτότητος:

$$\vec{\nabla}\cdot(\Phi\vec{A}) = (\vec{\nabla}\Phi)\cdot\vec{A} + \Phi(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})$$

καί τοῦ θεωρήματος Gauss, εἰς ἐπιφανειακόν ὁλοκλήρωμα ὑπεράνω τοῦ συνόρου τοῦ V' , τό ὁποῖον ἀποτελοῦν αἱ ἐπιφάνειαι S(V) καί μία ἄλλη θεωρουμένη εἰς τό ἄπειρον. Ὑποθέτοντες μάλιστα ὅτι $\Phi(\vec{x}) = 0$, διά $r \to \infty$, ἀπομένει μόνον τό ἐπιφανειακόν ὁλοκλήρωμα ὑπεράνω τῆς S(V). Οὕτω ἔχομεν:

$$-\frac{1}{4\pi}\int_{V'} \frac{\vec{\nabla}'^2\Phi(\vec{x}')}{r(\vec{x},\vec{x}')}\,d^3x' = -\frac{1}{4\pi}\int_{V'} \Big[\, \vec{\nabla}'\cdot\Big(\frac{\vec{\nabla}'\Phi(\vec{x}')}{r(\vec{x},\vec{x}')}\Big) -$$

$$- \vec{\nabla}'\Phi(\vec{x}')\cdot\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{r(\vec{x},\vec{x}')} \right)]\, d^3x' =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_{V'} [(\vec{\nabla}'\cdot \left(\frac{\vec{\nabla}'\Phi(\vec{x}')}{r(\vec{x},\vec{x}')} \right)) - \vec{\nabla}'\cdot(\Phi(\vec{x}')\, \vec{\nabla}' \frac{1}{r(\vec{x},\vec{x}')}) +$$

$$+ \Phi(\vec{x}')\vec{\nabla}'^2 \frac{1}{r(\vec{x},\vec{x}')}]d^3x' = -\frac{1}{4\pi}\int_{S(V)} \frac{\vec{E}(\vec{x}')}{r(\vec{x},\vec{x}')}\cdot \vec{dS} -$$

$$- \frac{1}{4\pi}\int_{S(V)} \Phi(\vec{x}')\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{r(\vec{x},\vec{x}')} \right)\cdot\vec{dS} + \int_V \Phi(\vec{x}')\delta(\vec{x}-\vec{x}')d^3x'$$

Ὁ τελευταῖος ὅρος ὅμως εἶναι μηδέν, διότι τό $\vec{x}$ ὑποτίθεται ἐντός τοῦ χώρου V ἐπί τοῦ ὁποίου ἐνδιαφερόμεθα καί τό $\vec{x}'$ ἐντός τοῦ V' καί κατά τόν ὁρισμόν τῆς " δέλτα " συναρτήσεως τό ὁλοκλήρωμα εἶναι μηδέν.

Τέλικῶς ἔχομεν:

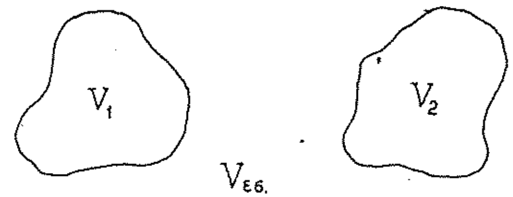
$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\rho(\vec{x}')}{r(\vec{x},\vec{x}')}d^3x' - \frac{1}{4\pi}\int_{S(V)} \frac{\vec{E}(\vec{x}')\cdot\vec{dS}}{r(\vec{x},\vec{x}')} -$$

$$- \frac{1}{4\pi}\int_{S(V)} \Phi(\vec{x}')\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{r(\vec{x},\vec{x}')} \right)\cdot \vec{dS} \; . \qquad (31)$$

Εἰς τά ἀνωτέρω ἐπιφανειακά ὁλοκληρώματα, θεωροῦμεν τό $\vec{dS}$

διευθυνόμενον πρός τό ἐξωτερικόν τοῦ χώρου V καί εἰς τοῦτο, ὀφείλεται τό ἀρνητικόν σημεῖον ἔμπροσθέν των.

Ἡ " κλειστή ἐπιφάνεια " εἰς τόν τύπον (31) θεωρεῖται ὑπό τήν γενικευμένην μορφήν. Π.χ. ὅταν $\Phi(\infty) = 0$, δυνάμεθα νά θεωρήσωμεν τό ἄπειρον ὡς ἐσωτερικόν σημεῖον καί τάς πεπερασμένας περιοχάς ὄγκου V_1, V_2 τοῦ σχ. 18 ὡς ἐξωτερικόν ὄγκον.



Σχῆμα 18.

Φυσικῶς ἡ ἐξίσωσις (31) δύναται νά περιγραφῇ ὡς ἑξῆς:

Τό δυναμικόν ἐντός μιᾶς περιοχῆς ὄγκου V, ἰσοῦται μέ τό δυναμικόν Coulomb ἐκ τῶν ἠλεκτρικῶν φορτίων ἐντός τῆς περιοχῆς V, σύν τό δυναμικόν ἐκ τῶν ἐξωτερικῶν φορτίων.

Τά ἐξωτερικά φορτία ἐπενεργοῦν ἐντός τῆς περιοχῆς V ὡς διπλῆ ἐπιφανειακή στρῶσις, φορτίου καί διπολικῆς ῥοπῆς, ἐπί τῆς S(V) πυκνοτήτων $-\vec{E}\cdot\vec{n}$ καί $-\Phi\,\vec{n}$ ἀντιστοίχως. Βλέπε καί τύπον (14) Κεφ. II ($\vec{n}$ εἶναι τό μοναδιαῖον ἄνυσμα, τό κάθετον ἐπί τῆς ἐπιφανείας S(V) καί διευθυνόμενον πρός τό ἐξωτερικόν τοῦ ὄγκου V (σχ.17)).

Προφανῶς ἀπουσίᾳ ἐξωτερικῶν φορτίων, τό ἄθροισμα τῶν ἐπιφανειακῶν ὁλοκληρωμάτων τοῦ τύπου (31) εἶναι μηδέν.

Οὕτω ἔχομεν φθάσει εἰς τήν λύσιν τοῦ προβλήματος, συναρτήσει

τῆς κατανομῆς φορτίου $\rho(\vec{x})$ εἰς τόν χῶρον V καί τῶν συνοριακῶν συνθηκῶν ἐπί τῆς ἐπιφανείας S(V).
Ἡ λύσις (31) παρά τήν γενικότητά της ὡς πρός τήν Γεωμετρίαν τοῦ προβλήματος, ἀπαιτεῖ γνῶσιν τόσον τῆς Φ ὅσον καί τῆς $(\vec{\nabla}\Phi)_n$ ἐπί τῆς S(V), δηλ. περισσοτέρας πληροφορίας ἀπ' ὅσας εἶναι ἀπαραίτητοι διά τήν λύσιν τοῦ προβλήματος. Πράγματι ὡς εἴδομεν καί προηγουμένως διά τήν λύσιν τῆς ἐξισώσεως $-\vec{\nabla}^2\Phi(\vec{x}) = \rho(\vec{x})$, ἀρκεῖ νά δοθῇ ἡ Φ ἤ τό $(\vec{\nabla}\Phi)_n$ ἐπί τῆς S(V).
Ἐάν $\Phi_1(\vec{x})$ καί $\Phi_2(\vec{x})$ δύο λύσεις, τότε $\vec{\nabla}^2\Phi_1 = -\rho$, $\vec{\nabla}^2\Phi_2 = -\rho$ καί $\vec{\nabla}^2\psi = 0$, ὅπου $\psi = \Phi_1 - \Phi_2$. Θεωροῦντες τήν ταυτότητα $\psi\vec{\nabla}^2\psi = \vec{\nabla}\cdot(\psi\vec{\nabla}\psi) - (\vec{\nabla}\psi)^2$ καί ὁλοκληρώνοντες ὑπεράνω τοῦ ὄγκου V προκύπτει:

$$\int_V \psi\vec{\nabla}^2\psi \, d^3x = \int_V \vec{\nabla}\cdot(\psi\vec{\nabla}\psi)d^3x - \int_V (\vec{\nabla}\psi)^2 \, d^3x = 0 \quad \text{καί}$$

$$\int_V (\vec{\nabla}\psi)^2 \, d^3x = \int_{S(V)} (\psi\vec{\nabla}\psi)\cdot\vec{dS} \quad . \tag{32}$$

Ὅθεν παρατηροῦμεν ὅτι ἐάν ἐπί τῆς S(V) $\Phi_1 = \Phi_2$ ἤτοι $\psi = 0$ ἤ ἐάν $\vec{\nabla}\Phi_1 = \vec{\nabla}\Phi_2$ ἤτοι $\vec{\nabla}\psi = 0$, τότε $(\vec{\nabla}\psi)^2 = 0$ ἤ $(\vec{\nabla}\psi) = 0$ καί $\psi = \Phi_1(\vec{x}) - \Phi_2(\vec{x}) =$ σταθ. δι' ὁλόκληρον τήν περιοχήν V.
Εἰς τήν περίπτωσιν κατά τήν ὁποίαν δίδεται ἡ $\Phi(\vec{x})$ ἐπί τῆς

S(V) ἔχομεν συνοριακόν πρόβλημα τύπου Dirichlet, ἐνῷ ὅταν δίδεται ἡ προβολή $(\vec{\nabla}\Phi(\vec{x}))_n$ ἐπί τῆς S(V) ἔχομεν συνοριακόν πρόβλημα τύπου Neumann. Ἀμφότερα τά προβλήματα ἔχουν μονοσήμαντον λύσιν, ὡς φαίνεται ἐκ τῆς (32). Τά προβλήματα τύπου Dirichlet καί Neumann ἀποτελοῦν μερικήν περίπτωσιν τοῦ γενικωτέρου προβλήματος ὁμογενῶν συνοριακῶν τιμῶν (ὁμογενῶν ὡς πρός Φ καί $(\vec{\nabla}\Phi)_n$ πρώτου βαθμοῦ), κατά τό ὁποῖον δίδονται ἐπί τοῦ συνόρου S(V) αἱ τιμαί ἑνός γραμμικοῦ συνδυασμοῦ $\alpha\Phi(\vec{x}) + \beta(\vec{\nabla}\Phi(\vec{x}))_n$.
Διά τήν λύσιν τοῦ προβλήματος αὐτοῦ ὁ τύπος (31) δέν ἐπαρκεῖ (βλ. 6.1).

Παρατήρησις.
Ἐκ πρώτης ὄψεως ἡ (31) φαίνεται ὡς μή ὁμογενής ὁλοκληρωτική ἐξίσωσις ὡς πρός Φ, διότι εἰς τά ἐπιφανειακά ὁλοκληρώματα παρουσιάζεται ἡ Φ καί τό $\vec{\nabla}\Phi$.
Τοῦτο δέν εἶναι ἀληθές. Εἰς τά ὁλοκληρώματα ἐπί τῆς S(V) συνεισφέρουν μόνον τά ἐξωτερικά φορτία,

$$\frac{1}{4\pi}\int_{S(V)} \frac{\vec{\nabla}\Phi_{\varepsilon\xi.}(\vec{x}')}{r(\vec{x},\vec{x}')}\cdot\vec{dS} - \frac{1}{4\pi}\int_{S(V)} \Phi_{\varepsilon\xi}(\vec{x}')\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{r(\vec{x},\vec{x}')}\right)\cdot\vec{dS} \quad ,$$

ὅπου $\Phi_{\varepsilon\xi}$ τό δυναμικόν τό ὀφειλόμενον εἰς τά ἐξωτερικά φορτία. Ὥστε αἱ συνοριακαί συνθῆκαι εἶναι ἀνεξάρτητοι τοῦ δυναμικοῦ τοῦ ὀφειλομένου εἰς τήν κατανομήν $\rho(\vec{x})$ ἐντός τοῦ ὄγκου V.

6.1. Συνάρτησις Green $G(\vec{x},\vec{x}')$.

Τά συνοριακά προβλήματα δυνάμεθα νά τά λύσωμεν τῇ βοηθείᾳ τῶν συναρτήσεων Green. Φυσικῶς μία τοιαύτη συνάρτησις δύναται νά θεωρηθῇ ὅτι παριστᾷ τό δυναμικόν εἰς τήν θέσιν $\vec{x}$, τό ὀφειλόμενον εἰς μονάδα φορτίου τοποθετημένη εἰς τήν θέσιν $\vec{x}'$!

Ὁρισμός. Καλοῦμεν συνάρτησιν Green, $G(\vec{x},\vec{x}')$, τήν λύσιν τοῦ συνοριακοῦ προβλήματος μέ πηγήν μίαν σημειακήν μονάδα φορτίου εἰς τήν θέσιν $\vec{x}'$. Ἡ συνάρτησις Green ἱκανοποιεῖ τήν διαφορικήν ἐξίσωσιν:

$$-\vec{\nabla}^2 G(\vec{x},\vec{x}') = \delta(\vec{x}-\vec{x}') , \qquad (33)$$

ὅπου $\delta(\vec{x}-\vec{x}')$ ἡ συνάρτησις Dirac.

Τῇ βοηθείᾳ τῆς συναρτήσεως Green ἡ γενική λύσις τῆς ἐξισώσεως Poisson δίδεται ἐκ τῆς σχέσεως:

$$\Phi(\vec{x}) = \int G(\vec{x},\vec{x}')\rho(\vec{x}')\, d^3x' .$$

Ἡ συνάρτησις Green, ὅπως καί τά δυναμικά, προσδιορίζεται βάσει τῆς (33) μόνον μέχρι μιᾶς αὐθαιρέτου προσθετικῆς λύσεως τῆς ὁμογενοῦς ἐξισώσεως, διότι ἄν ἡ $G(\vec{x},\vec{x}')$ εἶναι λύσις τῆς (33) καί ἡ $F(\vec{x},\vec{x}')$, λύσις τῆς ὁμογενοῦς ἐξισώσεως $\vec{\nabla}^2F(\vec{x},\vec{x}') = 0$, τότε καί ἡ $G(\vec{x},\vec{x}') + F(\vec{x},\vec{x}')$ εἶναι λύσις τῆς (33). Διά καταλλήλου ἐκλογῆς τῆς λύσεως τῆς ὁμογενοῦς, ἐπιτυγχάνομεν τήν ἱκανοποίησιν τῶν συνοριακῶν συνθηκῶν.

Τῇ βοηθείᾳ τῶν συναρτήσεων Green, ὁ τύπος (31) γίνεται:

$$\Phi(\vec{x})=\int_V \rho(\vec{x}')G(\vec{x},\vec{x}')d^3x' + \int_{S(V)} G(\vec{x},\vec{x}')\vec{\nabla}\Phi(\vec{x}').\vec{dS} - \int_{S(V)} \Phi(\vec{x}')\vec{\nabla}G(\vec{x},\vec{x}').\vec{dS} . \qquad (34)$$

Διά καταλλήλου ἐκλογῆς τῶν ὁριακῶν συνθηκῶν τῆς συναρτήσεως $G(\vec{x},\vec{x}')$, δυνάμεθα νά καταστήσωμεν τό δεύτερον ἤ τό τρίτον ὁλοκλήρωμα τοῦ δεξιοῦ μέλους τοῦ τύπου (34) ἴσον μέ μηδέν καί οὕτω νά λύσωμεν τό πρόβλημα τῆς εὑρέσεως τοῦ $\Phi(\vec{x})$, ὅταν δίδεται ἡ μία τῶν συνθηκῶν, ἤτοι ἤ τό $\Phi(\vec{x})$ ἐπί τῆς $S(V)$, δηλαδή τό πρόβλημα τοῦ Dirichlet, ἤ τό $\vec{\nabla}\Phi(\vec{x})$ ἐπί τῆς $S(V)$, δηλαδή τό πρόβλημα τοῦ Neumann.

Ἡ εὕρεσις τῆς συναρτήσεως Green, ἡ ὁποία πληροῖ δοθείσας συνοριακάς συνθήκας εἶναι ἐν γένει δύσκολον πρόβλημα. Ἀναφέρομεν ἁπλᾶς περιπτώσεις:

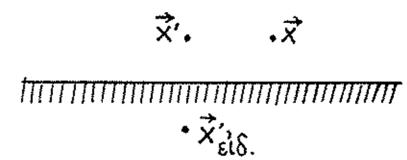
1. Ἡ ἁπλουστάτη συνάρτησις Green εἶναι τό δυναμικόν Coulomb:

$$G(\vec{x},\vec{x}') = \frac{1}{4\pi r(\vec{x},\vec{x}')} ,$$

αὕτη ἱκανοποιεῖ τήν ὁριακήν συνθήκη $\lim\limits_{r\to\infty} G(\vec{x},\vec{x}') = 0$.

2. Ἡ συνάρτησις Green μέ ὁριακήν συνθήκην νά μηδενίζεται ἐπί ἀπείρου ἐπιπέδου ἐπιφανείας, (βλ. σχ. 19) εἶναι προφανῶς τό δυναμικόν σημειακοῦ φορτίου πρό ἀγωγοῦ πλακός. Διά τῆς μεθόδου τῆς ἀντιστροφῆς εὑρίσκομεν:

Σχῆμα 19 :



$$G(\vec{x},\vec{x}') = \frac{1}{4\pi}\left\{ \frac{1}{r(\vec{x},\vec{x}')} - \frac{1}{r(\vec{x},\vec{x}'_{\varepsilon\iota\delta.})} \right\}$$

Ὁμοίως αἱ ἁπλαῖ περιπτώσεις τῶν δυναμικῶν σημειακοῦ φορτίου πρό ἀγωγοῦ σφαίρας κ.λ.π., τά ὁποῖα εὕρομεν δι' ἐφαρμογῆς τῆς μεθόδου τῆς ἀντιστροφῆς, ἀποτελοῦν συναρτήσεις Green μέ ἀντιστοίχους συνοριακάς συνθήκας.

7. Ἠλεκτροστατική ἐντός ὕλης.

Δεδομένου ὅτι μικροσκοπικῶς ἡ ὕλη ἀποτελεῖται ἀπό κινούμενα ἐν κενῷ σημειακά φορτία, ἀπό ἀπόψεως καθαρῶς θεωρητικῆς τό πρόβλημα τῆς Ἠλεκτροστατικῆς ἐντός ὕλης, ἀνάγεται εἰς τό πρόβλημα τῆς Ἠλεκτροστατικῆς τῶν σημειακῶν φορτίων* ἐν κενῷ.
Ὡστόσο διά τήν μακροσκοπικήν μελέτην εἶναι χρήσιμος ἡ εἰσαγωγή νέων φαινομενολογικῶν ἐννοιῶν.
Ὁρίζομεν ὡς ἠλεκτρικήν πόλωσιν ἤ ἁπλῶς πόλωσιν μέσου, τήν ἠλεκτρικήν διπολικήν ῥοπήν ἀνά μονάδα ὄγκου, ἤτοι:

$$\vec{p}(\vec{x}) = \lim_{\Delta V\to 0} \frac{\Delta\vec{P}(\vec{x})}{\Delta V},$$ ὅπου $\Delta\vec{P}(\vec{x})$ ἡ διπολική ῥοπή ἐντός τοῦ ὄγκου ΔV. Διά μικράς ἐντάσεις καί πολλά ὑλικά, τά ὁποῖα καλοῦνται " Γραμμικά διηλεκτρικά ", ἰσχύει $\vec{p}(\vec{x}) = \kappa\,\vec{E}(\vec{x})$,

---

* ('Εκ τῶν μέχρι τοῦδε ἐνδείξεων φαίνεται ὅτι δέν ὑπάρχουν σημειακά πλειονόπολα ἀνωτέρας τάξεως τῆς μηδενικῆς).

ὅπου κ σταθερά ἐξαρτωμένη ἐκ τοῦ ὑλικοῦ καί καλουμένη διηλεκτρική ἐπιδεκτικότης. Δι'ἀνισότροπα γραμμικά διηλεκτρικά, ἡ διηλεκτρική ἐπιδεκτικότης περιγράφεται δι'ἑνός συμμετρικοῦ τανυστοῦ k_{ij}, ἤτοι: $p_i = k_{ij}E_j$.
Τό $(1+\kappa)=\varepsilon$ καλεῖται διηλεκτρική σταθερά τοῦ μέσου.
Ἡ διηλεκτρική σταθερά τοῦ κενοῦ εἶναι $\varepsilon_0=1$, εἰς τάς μονάδας τάς ὁποίας χρησιμοποιοῦμεν.
Ἡ πόλωσις δύναται νά δημιουργεῖται ἀπό ἐξωτερικόν πεδίον ἤ καί νά ἀποτελῇ χαρακτηριστικήν ἰδιότητα τοῦ ὑλικοῦ ἀνεξαρτήτως πεδίου.

Θεωρήσωμε π.χ. ἄτομον, τό ὁποῖον εὑρισκόμενον ἐκτός ἠλεκτρικοῦ πεδίου δέν παρουσιάζει διπολικήν ῥοπήν,(π.χ. τό ἄτομον τοῦ ὑδρογόνου εἰς τήν βασικήν κατάστασιν). Ἐάν τό ἄτομον τοῦτο εὑρεθῇ ἐντός ἠλεκτροστατικοῦ πεδίου, θά ἐξασκηθοῦν δυνάμεις ἐπί τῶν θετικῶν καί ἀρνητικῶν του φορτίων, θά παραμορφωθῇ καί θά παρουσιάσῃ ἐν γένει διπολικήν ῥοπήν διάφορον τοῦ μηδενός.

Ὡς δεύτερον παράδειγμα ἀέριον ἐξ'ἀτόμων μέ ἰδίαν διπολικήν ῥοπήν. Ἡ ῥοπή αὕτη ἐκτός ἠλεκτρικοῦ πεδίου θά ἔχῃ λόγῳ τῆς θερμικῆς κινήσεως τυχοῦσαν διεύθυνσιν, ὥστε, μακροσκοπικῶς τό ἀέριον, ἕν στατιστικόν σύνολον ἀπό τοιαῦτα ἄτομα,θά συμπεριφέρεται ὡς σύνολον ἀτόμων ἄνευ διπολικῆς ῥοπῆς. Παρουσίᾳ βεβαίως ἠλεκτρικοῦ πεδίου τά στοιχειώδη δίπολα τείνουν νά προσανατολισθοῦν , ὁπότε ἡ διπολική ῥοπή παρουσιάζεται καί μακροσκοπικῶς.

Ὥστε γενικῶς, ὑπό τήν ἐπίδρασιν ἠλεκτρικοῦ πεδίου τά ὑλικά παρουσιάζουν μακροσκοπικῶς διηλεκτρικήν πόλωσιν.

7.1. Τό δυναμικόν ἐντός διηλεκτρικοῦ.

"Εστω διηλεκτρικόν εὑρισκόμενον ἐντός ἠλεκτροστατικοῦ πεδίου. Ὡς εἴδομεν εἰς τήν προηγουμένην παράγραφον, τό διηλεκτρικόν θά παρουσιάση ἐν γένει πόλωσιν. Ἡ πόλωσις αὕτη τοῦ ὑλικοῦ θά συνεισφέρη εἰς τό δυναμικόν, ὡς μία συνεχής κατανομή τῶν διπόλων τῆς πολώσεως $\vec{p}$, κατά τόν τύπον:

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\int_V \vec{p}(\vec{x}')\cdot\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{r(\vec{x},\vec{x}')}\right)d^3x' \quad . \tag{35}$$

Ἡ ἔκφρασις (35) δύναται νά ἀναχθῆ εὐκόλως καί εἰς μορφήν ἀνάλογον τῆς ἠλεκτροστατικῆς κατανομῆς φορτίων ἐν κενῷ. Πράγματι τῇ βοηθείᾳ τῆς ταυτότητος

$$\vec{p}.\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = \vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{p}}{r}\right) - \frac{1}{r}\,\vec{\nabla}.\vec{p} \; ,$$

τό ὁλοκλήρωμα (35) μετασχηματίζεται ὡς ἑξῆς:

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\int_V \vec{\nabla}'\cdot\left(\frac{\vec{p}(\vec{x}')}{r(\vec{x},\vec{x}')}\right) d^3x' - \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{1}{r(\vec{x},\vec{x}')}\,\vec{\nabla}'\cdot\vec{p}(\vec{x}')\, d^3x' \; .$$

Ἐξ ἄλλου δι' ἐφαρμογῆς τοῦ θεωρήματος Gauss εἰς μίαν μεγάλην ἐπιφάνειαν, ἡ ὁποία νά περιβάλη ὅλο τό διηλεκτρικόν, δηλαδή πέραν τῆς ὁποίας $\vec{p} = 0$, τό πρῶτον ὁλοκλήρωμα μηδενίζεται,

$$\frac{1}{4\pi}\int_V \vec{\nabla}'\cdot\left(\frac{\vec{p}(\vec{x}')}{r(\vec{x},\vec{x}')}\right) d^3x' = \frac{1}{4\pi}\int_{S(V)} \frac{\vec{p}(\vec{x}')\cdot\vec{dS}}{r(\vec{x},\vec{x}')} = 0 \; .$$

Οὕτω τελικῶς λαμβάνομεν:

$$\Phi(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\vec{\nabla}'\cdot\vec{p}(\vec{x}')}{r(\vec{x},\vec{x}')}\,d^3x' \; . \tag{36}$$

Κατά τόν τύπον (36) ἡ πόλωσις δημιουργεῖ ἕν δυναμικόν Coulomb, ὡς ἐάν ὑπῆρχε μία κατανομή φορτίων πυκνότητος $\rho_{\pi o\lambda.} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{p}$. Τά φορτία ταῦτα καλοῦνται φορτία πολώσεως "φαινομενικά", ἐν ἀντιθέσει πρός τά " ἀληθῆ " φορτία πυκνότητος ρ. Τό ὁλικόν δυναμικόν προερχόμενον ἐκ κατανομῆς τῶν ἀληθῶν φορτίων ρ καί ἐκ τῶν φαινομενικῶν φορτίων τῶν διπόλων λόγῳ πολώσεως, δίδεται ὑπό τοῦ τύπου:

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\rho(\vec{x}')}{r(\vec{x},\vec{x}')}\,d^3x' - \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\vec{\nabla}'\cdot\vec{p}(\vec{x}')}{r(\vec{x},\vec{x}')}\,d^3x' \quad ,$$

ἤ $$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\rho(\vec{x}') + \rho_{\pi o\lambda.}(\vec{x}')}{r(\vec{x},\vec{x}')}\,d^3x' \quad . \tag{37}$$

Ὥστε παρουσίᾳ διηλεκτρικοῦ ἡ ἐξίσωσις τοῦ Poisson λαμβάνει τήν μορφήν:

$$-\vec{\nabla}^2\phi = \rho + \rho_{\pi o\lambda.}\ ,$$

ἤ εἰσάγοντες τό ἠλεκτρικόν πεδίον,

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho - \vec{\nabla}\cdot\vec{p}\ ,$$

$$\text{ἤ}\qquad \vec{\nabla}\cdot(\vec{E}+\vec{p}) = \rho\ . \qquad (37\alpha)$$

Ἡ σχέσις (37α) ὑποδεικνύει τόν ὁρισμόν ἑνός νέου μεγέθους $\vec{D} = \vec{E} + \vec{p}$, τό ὁποῖον καλοῦμεν διηλεκτρικήν μετατόπισιν. Τό $\vec{D}$ ἔχει πηγήν τά ἀληθῆ φορτία ρ,

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho\ . \qquad (38)$$

Ἡ ἐξίσωσις (38) ἔχει τήν αὐτήν μορφήν μέ τήν ἐξίσωσιν τοῦ Poisson ἐν κενῷ. Τό $\vec{D}$ ὅμως δέν εἶναι μαθηματικόν ἀνάλογον τοῦ $\vec{E}$. Ἐν ἀντιθέσει πρός τό $\vec{E}$, τό $\vec{D}$ δέν εἶναι πάντοτε ἀστρόβιλον. Διά τήν εὕρεσιν τοῦ $\vec{D}$ ἀπαιτεῖται ἐν γένει πλήν τοῦ ρ καί ὁ στροβιλισμός του.

Ἐάν εὑρισκώμεθα ἐντός ὁμογενῶν καί ἰσοτρόπων γραμμικῶν ὑλικῶν ἔχομεν:

$$\vec{\nabla}\times\vec{D} = \vec{\nabla}\times(\kappa\vec{E}) = \kappa\vec{\nabla}\times\vec{E} + (\vec{\nabla}\kappa)\times\vec{E} = (\vec{\nabla}\kappa)\times\vec{E} = 0\ .$$

Ἐνταῦθα τό $\vec{D}$ εἶναι ἐντελῶς ἀνάλογον τοῦ $\vec{E}$ καί δυνάμεθα νά χρησιμοποιήσωμεν τάς γνωστάς μας μεθόδους τῆς Ἠλεκτροστατικῆς

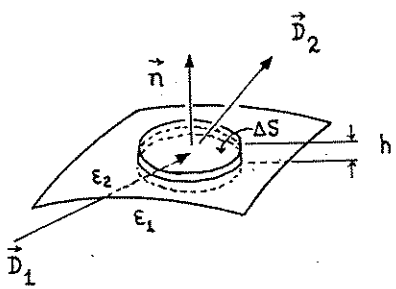
ἐν κενῷ, (περιγράφοντες π.χ. τό $\vec{D}$ δι' ἑνός βαθμωτοῦ δυναμικοῦ). Ἄν τό διηλεκτρικόν δέν εἶναι ὁμογενές, π.χ. εἰς τήν ἐπιφάνειαν ἐπαφῆς δύο ὑλικῶν, τότε:

$$\vec{\nabla}\times\vec{D} = (\vec{\nabla}\kappa)\times\vec{E} \neq 0$$

καί ἑπομένως διά τήν περιγραφήν τοῦ $\vec{D}$ ἀπαιτεῖται καί ἀνυσματικόν δυναμικόν! Ὡστόσο εἰς πλείστας πρακτικάς περιπτώσεις, ὁ χῶρος δύναται νά διαιρεθῇ εἰς διηλεκτρικῶς ὁμογενῆ τμήματα κατά τοιοῦτον τρόπον, ὥστε εἰς ἑκάστην περιοχήν νά δυνάμεθα νά χρησιμοποιήσωμεν τά γνωστά τῆς Ἠλεκτροστατικῆς ἐν κενῷ. Διά τήν εὕρεσιν τῆς συνολικῆς (global) λύσεως θά πρέπῃ φυσικά νά χρησιμοποιοῦνται καί αἱ ὁριακαί συνθῆκαι, αἱ συνδέουσαι τάς περιοχάς.

7.2. Ὁριακαί συνθῆκαι εἰς τήν ἐπαφήν διηλεκτρικῶν.

Ἔστω δύο διηλεκτρικά μέ διηλεκτρικάς σταθεράς ε_1 καί ε_2, ἐφαπτόμενα κατά τήν ἐπιφάνειαν S, ὡς φαίνεται εἰς τό σχῆμα 20. Ἐπί τῆς S δύναται νά ὑπάρχῃ καί ἐπιφανειακή κατανομή φορτίου πυκνότητος σ.



Σχῆμα 20.

Θά ὑπολογίσωμεν τήν ἀσυνέχειαν τοῦ πεδίου ἑκατέρωθεν τῆς ἐπιφανείας S.

Ἐκ τῆς σχέσεως $\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho$ δι' ἐφαρμογῆς τοῦ θεωρήματος Gauss διά τόν δεικνυόμενον εἰς τό σχ. 20 κυλινδρικόν ὄγκον, ἔχομεν:

$$\int_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{D})dV = \int_{S(V)} \vec{D}\cdot\vec{dS} = \int_V \rho dV = q \,. \qquad (39)$$

Εἰς τό ὅριον $h \to 0$, $q \to \sigma\Delta S$, ἡ πεδιακή ροή ἐκ τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου (καθέτου ἐπί τῆς ἐπιφανείας S) μηδενίζεται καί οὕτω ἡ ἐξίσωσις (39) γίνεται:

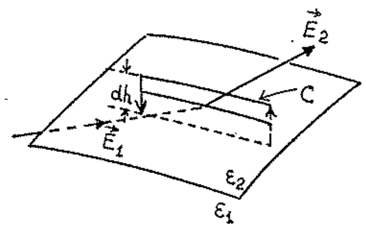
$$\Delta S(\vec{D}_2 - \vec{D}_1)\cdot\vec{n} = \sigma\Delta S \,,$$

ἤ
$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1)\cdot\vec{n} = \sigma \,. \qquad (40)$$

Ὥστε ἡ κάθετος ἐπί τήν ἐπιφάνειαν συνιστῶσα τοῦ $\vec{D}$ παρουσιάζει ἀσυνέχειαν, ἴσην μέ τήν ἐπιφανειακήν πυκνότητα φορτίου ἐπί S: $D_2^{\kappa\alpha\theta} - D_1^{\kappa\alpha\theta} = \sigma$.

Διά νά εὕρωμεν τάς ὁριακάς συνθήκας τῆς ἐφαπτομενικῆς συνιστώσης τοῦ πεδίου $\vec{D}$, χρησιμοποιοῦμεν τήν σχέσιν $\vec{\nabla}\times\vec{E}=0$.
Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ θεωρήματος Stokes ἐπί τῆς καμπύλης τῆς δεικνυομένης εἰς τό σχῆμα 21 ἔχομεν:

$$0 = \int_S (\vec{\nabla}\times\vec{E}).\vec{dS} = \int_C \vec{E}.\vec{d\ell} = \vec{E}_2.\vec{d\ell} - \vec{E}_1.\vec{d\ell} + (\text{ὅροι τάξεως } \vec{E}.\vec{dh}).$$



Σχῆμα 21.

Εἰς τό ὅριον $|\vec{dh}| \to 0$ λαμβάνομεν:

$$E_2^{\varepsilon\varphi} = E_1^{\varepsilon\varphi} \qquad (41)$$

Ἤτοι ἡ ἐφαπτομένη συνιστῶσα τοῦ πεδίου $\vec{E}$ εἶναι συνεχής. Ἡ σχέσις (41) συναρτήσει τοῦ $\vec{D}$ ἐκφράζεται ὡς

$$\frac{D_2^{\varepsilon\varphi}}{\varepsilon_2} = \frac{D_1^{\varepsilon\varphi}}{\varepsilon_1} \,. \qquad (41.\alpha)$$

7.3. Δυνάμεις Coulomb ἐντός διηλεκτρικοῦ.

Ἄς ζητήσωμεν τήν ἔκφρασιν τῆς δυνάμεως Coulomb, ἐντός ὁμογενοῦς ὑλικοῦ διηλεκτρικῆς σταθερᾶς ε. Θεωροῦμεν δύο ἀληθῆ φορτία $q_1(\vec{x}_1)$ καί $q_2(\vec{x}_2)$ ἐντός τοῦ διηλεκτρικοῦ. Βάσει τῆς ἐξισώσεως (38) καί τῇ βοηθείᾳ τοῦ θεωρήματος Gauss, εὑρίσκομεν τό πεδίον $\vec{D}$ εἰς τήν θέσιν $\vec{x}_2$, τό ὀφειλόμενον εἰς τό $q_1(\vec{x}_1)$.

Ἤτοι $\vec{D}(\vec{x}_2) = \dfrac{q_1}{4\pi r^2}\dfrac{\vec{r}}{r}$ καί ἐπειδή $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$, προκύπτει

$$\vec{E}(\vec{x}_2) = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon}\frac{\vec{r}}{r^3} \,, \text{ ὅπου } r = |\vec{x}_1 - \vec{x}_2| \,.$$

Χρησιμοποιοῦντες τήν ἐξίσωσιν (5) εὑρίσκομεν, ὅτι ἡ δύναμις

Coulomb μεταξύ τῶν q_1, q_2 δίδεται ἀπό τόν τύπον:

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon} \frac{\vec{r}}{r^3(\vec{x}_1,\vec{x}_2)} .$$

Λόγῳ τοῦ ὅτι $\varepsilon > 1$ αἱ δυνάμεις Coulomb εἶναι φαινομενικῶς μικρότεραι ἐντός τοῦ διηλεκτρικοῦ ὑλικοῦ. Τοῦτο εἶναι φυσικῶς ἀναμενόμενον, διότι τό πεδίον Coulomb τό προερχόμενον ἐκ τοῦ φορτίου q προκαλεῖ πόλωσιν τοῦ ὑλικοῦ, κατά τρόπον ὥστε τά στοιχειώδη δίπολα τοῦ περιβάλλοντος νά προασπίζουν τό q (ἀναιροῦν μέρος τοῦ φορτίου τοῦ q), τό ὁποῖον ἐξωτερικῶς φαίνεται μικρότερον.

Ἐάν ὁλόκληρος ὁ χῶρος ἦτο πλήρης ὑλικοῦ διηλεκτρικῆς σταθερᾶς ε, τότε δέν θά ἦτο δυνατόν νά διαχωρίσωμεν πειραματικῶς τά φορτία q ἐκ τῶν φορτίων πολώσεως $q_{\pi o\lambda}$ καί ὁ νόμος τοῦ Coulomb θά ἔπρεπε μᾶλλον νά ἐκφρασθῇ διά τῶν φυσικῶς παρατηρησίμων φορτίων $q_\varphi = \frac{q}{\sqrt{\varepsilon}}$, ὅτε: $\vec{F} = \frac{q_{\varphi_1} q_{\varphi_2}}{4\pi r^2} \frac{\vec{r}}{r}$.

Ὡς τοιοῦτον ὑλικόν δύναται νά θεωρηθῇ καί τό κενόν, ὅτε

$q_\varphi = \frac{q}{\sqrt{\varepsilon_o}}$, ὅπου ε_o ἡ διηλεκτρική σταθερά τοῦ κενοῦ.

Τά ἀνωτέρω ἐφαρμόζονται καί πρακτικῶς εἰς τήν κατασκευήν τῶν πυκνωτῶν. Διά τῆς χρησιμοποιήσεως μονωτικοῦ ὑλικοῦ διηλεκτρικῆς σταθερᾶς ε μεταξύ τῶν ὁπλισμῶν πυκνωτοῦ, ἡ χωρητικότης αὐτοῦ C γίνεται ὡς γνωστόν πολλαπλασία κατά ε τῆς χωρητικότητός του ἐν κενῷ:

$$C = \varepsilon C_o . \qquad (42)$$

Ὁ τύπος (42) εἶναι γενικός, δηλ. ἡ ἰσχύς του δέν περιορίζεται εἰς εἰδικῆς γεωμετρίας πυκνωτάς. Οὗτος εἶναι ἁπλῆ ἀπόρροια τῆς ἐξισώσεως (38) καί τῆς σχέσεως $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$, $\vec{\nabla}\varepsilon = 0$, ἡ ὁποία χαρακτηρίζει ἕν ὁμογενές καί ἰσότροπο διηλεκτρικό. Ἡ ἀπόδειξίς του δύναται νά γίνῃ μέ ἁπλῆν ἐφαρμογήν " Διαστασιακῆς Ἀναλύσεως." Ἡ χωρητικότης C ἑνός πυκνωτοῦ εἶναι ἐξ ὁρισμοῦ

$$C = \frac{Q}{V} ,$$

ὅπου Q τό ἠλεκτρικόν φορτίον καί V ἡ διαφορά δυναμικοῦ μεταξύ τῶν ὁπλισμῶν του. Τό φορτίον Q κατά τήν ἐξίσωσιν τοῦ Poisson εἶναι ἀνάλογον τοῦ D, ἤτοι $Q = \alpha D$, ὅπου τό α ἐξαρτᾶται μόνον ἀπό τήν Γεωμετρίαν τοῦ προβλήματος. Ἡ χωρητικότης αὐτοῦ διά χρησιμοποιήσεως ὑλικοῦ διηλεκτρικῆς σταθερᾶς ε καί ἐν κενῷ εἶναι $C_1 = \frac{Q_1}{V_1}$ καί $C_o = \frac{Q_o}{V_o}$ ἀντιστοίχως. Ἐάν θεωρήσωμεν τοιαύτην κατανομήν φορτίου ὥστε $V_1 = V_o$, τότε

$E_1 = E_o$ (διότι $\vec{E} = -\vec{\nabla}V(\vec{x})$) καί $\frac{D_1}{D_o} = \varepsilon$ (διότι $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$).

Ἄρα $$\frac{C_1}{C_o} = \frac{Q_1}{Q_o} = \frac{\alpha D_1}{\alpha D_o} = \varepsilon .$$

Ἄς ἐπιβεβαιώσωμεν τόν τύπον (42) εἰς τόν ἐπίπεδον πυκνωτήν ἐμβαδοῦ S καί ἀποστάσεως ὁπλισμῶν ℓ. Ἡ χωρητικότης αὐτοῦ, δηλ. τό φορτίον ἀνά μονάδα διαφορᾶς δυναμικοῦ V μεταξύ τῶν ὁπλισμῶν του εἶναι:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{E\,\ell} = \frac{S\,D}{E\,\ell} = \varepsilon\,\frac{S}{\ell} = \varepsilon C_o$$

7.4. Ἐνέργεια ἠλεκτροστατικοῦ πεδίου ἐντός διηλεκτρικῶν.

Ἡ ἐνέργεια τοῦ ἠλεκτροστατικοῦ πεδίου, βάσει τῆς φυσικῆς ἑρμηνείας τοῦ δυναμικοῦ καί συμφώνως πρός τόν τύπον (10) δίδεται ἐκ τοῦ τύπου:

$$W = \frac{1}{2}\int_V \rho(\vec{x})\;\Phi(\vec{x})\;d^3x\,. \tag{43}$$

Ὁ συντελεστής 1/2 ἔμπροσθεν τοῦ ὁλοκληρώματος (43) ὀφείλεται εἰς τό ὅτι τό φορτίον λαμβάνεται δύο φοράς, μίαν ὡς πηγή τοῦ δυναμικοῦ καί ἑτέραν ὡς ἀποδέκτης δυναμικοῦ.

Π.χ. διά δύο σημειακά φορτία q_1, q_2 ἔχομεν

$$W = \frac{q_1 q_2}{r} = \frac{1}{2}\,(q_1\Phi_2 + q_2\Phi_1) = \frac{1}{2}\,(q_1\Phi(\vec{x}_1) + q_2\Phi(\vec{x}_2)).$$

Ἡ ἐνέργεια W δύναται νά ἐκφρασθῇ συναρτήσει τῆς ἐντάσεως τοῦ πεδίου.

Διά τῆς χρήσεως τῆς σχέσεως $\rho(\vec{x}) = \vec{\nabla}\cdot\vec{D}(\vec{x})$ καί τῆς ταυτότητος

$(\vec{\nabla}\cdot\vec{D})\Phi = \vec{\nabla}\cdot(\Phi\vec{D}) - \vec{D}\cdot(\vec{\nabla}\Phi)$, ἔχομεν:

$$W = \frac{1}{2}\int_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{D})\Phi d^3x = \frac{1}{2}\int_V \vec{\nabla}\cdot(\Phi\vec{D})d^3x - \frac{1}{2}\int_V \vec{D}\cdot(\vec{\nabla}\Phi)d^3x =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{S(V)} (\Phi\vec{D}).\vec{dS} + \frac{1}{2}\int_V \vec{D}.\vec{E}\;d^3x\,,$$

ἤ ἄν $(\Phi\vec{D}).\vec{dS} \to 0$, ὅταν π.χ. ἡ ἐπιφάνεια ὁλοκληρώσεως τείνῃ εἰς τό ἄπειρον,

$$W = \frac{1}{2}\int_V \vec{D}\cdot\vec{E}\;d^3x\,. \tag{44}$$

Εἰς τήν εἰδικήν περίπτωσιν καθ' ἥν τό διηλεκτρικόν εἶναι γραμμικόν καί ἰσότροπον,

$$W = \frac{1}{2}\int \varepsilon\vec{E}^2\;d^3x\,.$$

Ἡ ποσότης $\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}$ δύναται νά θεωρηθῇ ὡς πυκνότης ἐνεργείας ἀνά μονάδα ὄγκου. Βεβαίως ὁ ὁρισμός της γίνεται μέ μίαν αὐθαίρετον προσθετικήν ἀπόκλισιν ἀνυσματικοῦ πεδίου (π.χ. $\vec{\nabla}\cdot(\Phi\vec{D})$).

Ἀσκήσεις.

1. Δι' ἐφαρμογῆς τοῦ νόμου τοῦ Gauss νά εὑρεθοῦν αἱ χωρητικότητες:

   α) ἐπιπέδου πυκνωτοῦ

   β) κυλινδρικοῦ πυκνωτοῦ

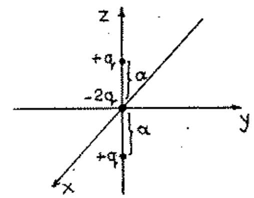
   γ) σφαιρικοῦ πυκνωτοῦ.

2. Δείξατε ὅτι ἡ μέση τιμή τοῦ δυναμικοῦ ὑπεράνω σφαιρικῆς ἐπιφανείας, ὑπό τήν προϋπόθεσιν ὅτι δέν ὑπάρχουν φορτία ἐντός αὐτῆς, δίδει τό δυναμικόν τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας.

3. Δίδεται δίπολον ροπῆς $\vec{\ell}$ κατά τήν διεύθυνσιν τοῦ ἄξονος x καί κείμενον εἰς τήν ἀρχήν τοῦ συστήματος συντεταγμένων. Εὕρατε τήν ἐξίσωσιν $f(x,y) = C$, ἥτις δίδει τάς δυναμικάς γραμμάς εἰς τό ἐπίπεδον $z = 0$.
(Αἱ διαφορικαί ἐξισώσεις τῶν δυναμικῶν γραμμῶν εἶναι
$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}$).

4. **Νά γίνη** πλειονοπολική ἀνάπτυξις συμπαγοῦς κατανομῆς φορτίου **εἰς χῶρον** μιᾶς, δύο καί τριῶν διαστάσεων.

5. Νά ὑπολογισθῇ ἡ τετραπολική ροπή τῆς κατανομῆς τοῦ σχήματος.



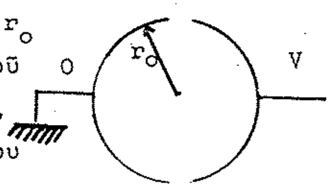
6. Ἔστω μία ἀναλυτική συνάρτησις $f(z) = \Phi(x,y) + i\Psi(x,y)$. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ καμπύλαι $\Phi = C$, $\Psi = C'$ (C,C' σταθ.) εἶναι κάθετοι μεταξύ των.

7. Ἐάν u, υ εἶναι συζυγεῖς ἁρμονικαί συναρτήσεις καί $u = 2y - y^3 + 3yx^2$ νά εὑρεθῇ ἡ υ .

8. Ἐάν ἡ $f(z) = \Phi(x,y) + i\Psi(x,y)$ εἶναι ἀναλυτική ἐντός μιᾶς περιοχῆς Π τοῦ ἐπιπέδου z , τότε καί ἡ $F(z) \equiv \overline{f(\bar{z})}$ εἶναι ἀναλυτική ἐντός τῆς συζυγοῦς περιοχῆς

$$\Pi^* = \{ (x,y) \mid (x,-y) \in \Pi \} .$$

9. Νά ἐφαρμοσθῇ ἡ μέθοδος τῆς συμμόρφου ἀπεικονίσεως, διά νά εὑρεθῇ τό δυναμικόν εἰς τό ἐσωτερικόν κύκλου ἀκτῖνος r_o τοῦ ὁποίου ἡ ἡμιπεριφέρεια τοῦ δεξιοῦ ἡμικυκλίου εὑρίσκεται, εἰς δυναμικόν V, τοῦ δέ ἑτέρου εἰς δυναμικόν 0.

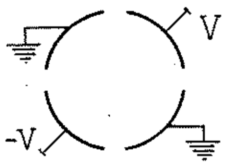


<u>Ὑπόδειξις</u>:

$$f(z) = V - i\,\frac{V}{\pi}\ln\left(\frac{2r_o}{z} + i\right) = \Phi + i\Psi,$$

$$\Phi = V + \frac{V}{\pi}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{r/2r_o - \sin\theta}{\cos\theta}\right).$$

10. Ἄπειρος κυκλική κυλινδρική ἐπιφάνεια ἀκτῖνος α διαιρεῖται εἰς τέσσαρα ἴσα τμήματα, ἅτινα εὑρίσκονται εἰς δυναμικά V, 0, -V, 0 ἀντιστοίχως, ὡς εἰς τό σχῆμα.

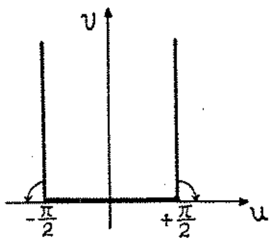


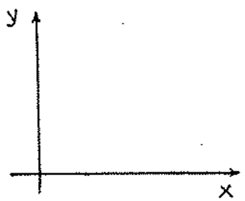
Δείξατε ὅτι τό δυναμικόν ἐντός τοῦ κυλίνδρου εἶναι

$$\Phi = \frac{V}{\pi}\left\{tan^{-1}\left(\frac{2\alpha y}{\alpha^2 - r^2}\right) + tan^{-1}\left(\frac{2\alpha x}{\alpha^2 - r^2}\right)\right\} .$$

Ποῖον εἶναι τό δυναμικόν ἐκτός;

11. Νά ἀπεικονισθῇ τό ἐσωτερικόν ἀνοικτῆς ὀρθογωνίου περιοχῆς τοῦ σχήματος $-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}$ $\upsilon \geq 0$, ἐπί τοῦ ἡμιεπιπέδου $y > 0$.





<u>Ὑπόδειξις</u>: $z = \sin(u + i\upsilon)$.

12. Εἰς τό πρόβλημα τῆς Ἠλεκτροστατικῆς πεπερασμένης περιοχῆς ὄγκου V ἡ ἐπίδρασις τῶν ἐξωτερικῶν φορτίων, ἀντικαθίσταται ὑπό ἰσοδυνάμου ἐπιφανειακῆς στρώσεως φορτίου καί διπολικῆς ροπῆς ἐπί τῆς ἐπιφανείας S(V), συνόρου τοῦ V . Διατί δέν παρουσιάζονται καί ἐπιφανειακαί στρώσεις πλειονοπόλων ἀνωτέρας τάξεως;

13. Νά εὑρεθῇ ἡ συνάρτησις Green διά τήν ἔξω τῆς σφαίρας περιοχήν, δοθέντος τοῦ δυναμικοῦ $V(\vartheta,\varphi)$ ἐπί τῆς σφαίρας. Ὁμοίως ἄν δίδεται τό $\frac{\partial V}{\partial n}$ ἐπί τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

14. Θεωρήσατε ἐπί ἐπιφανείας S στρῶσιν φορτίου πυκνότητος σ, καί διπολικῆς ροπῆς καθέτου ἐπί τῆς S πυκνότητος λ. Δείξατε ὅτι ἐπί τῶν δύο ὄψεων τῆς ἐπιφανείας ἔχομεν ἀσυνέχειαν δυναμικοῦ $\Phi_+ - \Phi_- = \lambda$ καί πεδίου $E_{n_+} - E_{n_-} = \sigma$.

15. Δίδεται διηλεκτρικόν σταθερᾶς πολώσεως $\vec{p}$ ἐντός τοῦ ὁποίου ὑπάρχει σφαιρική κοιλότης. Ζητεῖται ἡ ἔντασις τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου εἰς τό κέντρον τῆς κοιλότητος. <u>Ὑπόδειξις</u>: $\vec{E}_p = \frac{\vec{P}}{3}$

16. Δίδεται σφαῖρα ἀκτῖνος R διηλεκτρικῆς σταθερᾶς ε καί ἐκτός αὐτῆς φορτίον Q . Νά εὑρεθῇ τό δυναμικόν εἰς ὅλον τόν χῶρον καί ἡ ἐπιφανειακή πυκνότης λόγῳ πολώσεως.

17. Νά δειχθῇ ὅτι παρουσίᾳ διηλεκτρικοῦ μέ "n-πολικήν" πόλωσιν δημιουργοῦνται φαινομενικά φορτία $\rho_\varphi(x) = (-1)^n \vec{\nabla}^{(n)} \cdot Q^{(n)}$, ὅπου $\vec{\nabla}^{(n)} \cdot Q^{(n)}$ εἶναι γενικευμένη ἀπόκλισις τοῦ τανυστικοῦ n - πολικοῦ πεδίου

$$\vec{\nabla}^{(n)} \cdot Q^{(n)} = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_n}} Q^{(n)}_{i_1 i_2 \ldots i_n} .$$

18. Δείξατε ὅτι ἡ γενική λύσις $\Phi(r,\theta,\phi)$ τῆς ἐξισώσεως τοῦ Laplace $\nabla^2\Phi = 0$, $r \neq 0$ μέ μοναδικόν σημεῖον ἀνωμαλίας τήν ἀρχήν $r = 0$ (μηδενιζομένης εἰς τό ἄπειρον), ἔχει τήν μορφήν

$$\Phi(r,\theta,\phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{q_\ell^m \, Y_\ell^m(\theta,\phi)}{r^{\ell+1}}$$

ὅπου $Y_\ell^m(\theta,\phi)$ αἱ γνωσταί σφαιρικαί ἁρμονικαί. Ἕκαστος ὅρος δυναμικοῦ $\Phi_\ell^m = \dfrac{q_\ell^m}{r^{\ell+1}} Y_\ell^m(\theta,\phi)$ ἔχει πηγήν ἀντίστοιχον σημειακόν πλειονόπολον (2^ℓ-πολον). Παραλληλίζοντες τό δυναμικόν Φ πρός τήν κυματικήν συνάρτησιν τῆς ἐξισώσεως Schrödinger παρατηροῦμεν ὅτι ἕκαστον στοιχειῶδες πλειονόπολον χαρακτηρίζεται μονοσημάντως ἐκ τῆς στροφορμῆς (σπίν) αὐτοῦ ℓ, μέ τρίτην συνιστῶσαν m, καί τοῦ "φορτίου" τοῦ (ἰσχύς τῆς πηγῆς) q_ℓ^m. Τό σπίν ℓ χαρακτηρίζει καί τήν ἐμβέλειαν τοῦ δυναμικοῦ.

19. **Δείξατε ὅτι κατά τήν σύμμορφον ἀπεικόνισιν τό ἠλεκτρικόν φορτίον διατηρεῖται ἡ δέ πυκνότης φορτίου ρ μετασχηματίζεται ὡς** $\rho \longrightarrow \rho' = \dfrac{\rho}{|f'(z)|^2}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III.

ΜΑΓΝΗΤΟΣΤΑΤΙΚΗ.

1. Γενικαί Γνώσεις.

Τό μαγνητικόν πεδίον $\vec{B}$, τό ὁποῖον καλεῖται καί ἄνυσμα μαγνητικῆς ἐπαγωγῆς, πηγάζει ἐκ τοῦ ἠλεκτρικοῦ ρεύματος καί ἐκ τῆς χρονικῆς μεταβολῆς τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου, συμφώνως πρός τήν τετάρτην ἐξίσωσιν τοῦ Maxwell (βλ. Κεφ. II, §1 (1)),

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad . \tag{1}$$

Ἡ Μαγνητοστατική περιορίζεται εἰς χρονικῶς στασίμους καταστάσεις, ἤτοι $\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$, καί ἡ ἐξίσωσις (1) λαμβάνει τήν μορφήν:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{j} \; . \tag{2}$$

Ὥστε, τό μαγνητοστατικόν πεδίον ἔχει πηγήν τό ἠλεκτρικόν ρεῦμα. Μαγνητικά μονόπολα δέν ὑπάρχουν. Ἐπομένως τό μαγνητικόν πεδίον εἶναι σωληνοειδές πεδίον, ἤτοι ἱκανοποιεῖ τήν ἐξίσωσιν:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad . \tag{3}$$

Αἱ μαγνητικαί γραμμαί δέν ἔχουν ἀρχήν καί πέρας ὅπως αἱ γραμμαί τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου, ἀλλά ἀποτελοῦν κλειστούς βρόχους.

Τό ἠλεκτρικόν ρεῦμα ὀφείλεται εἰς κινούμενα φορτία. Ἡ ἔντασις τοῦ ἠλεκτρικοῦ ρεύματος I, τό ὁποῖον διέρχεται διά μιᾶς ἐπιφανείας S, εἶναι:

$$I = \frac{dq}{dt} = \int_S \vec{J}.d\vec{S}$$

ὅπου $\vec{J}$ ἡ πυκνότης ρεύματος.

$$\vec{J} = \rho\vec{\upsilon} \text{ ,}$$

ὅπου ρ ἡ πυκνότης φορτίου καί $\vec{\upsilon}$ ἡ ταχύτης ροῆς φορτίου.

Λαμβάνοντες ὑπ'ὄψιν τήν διατήρησιν τοῦ ἠλεκτρικοῦ φορτίου ἔχομεν:

$$\int_S \vec{J}\cdot\vec{dS} = -\frac{dq_V}{dt} \text{ ,} \tag{4}$$

ὅπου $q_V = \int \rho(\vec{x})d^3x$, τό ὁλικόν φορτίον εἰς τόν χῶρον V.

Ἐφαρμόζοντες τό θεώρημα Gauss διά τό ἀριστερόν μέλος τῆς (4) ἔχομεν:

$$\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{J}d^3x = -\frac{d}{dt}\int_V \rho(\vec{x},t)d^3x \text{ ,}$$

ἤ ἐπειδή ἡ σχέσις αὕτη ἰσχύει δι' οἱονδήποτε ὄγκον V, ἡ (4)

δύναται νά ἐκφρασθῇ ὑπό διαφορικήν μορφήν (Βλ. ἀσκ.14)

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \text{ .} \tag{5}$$

Ἡ ἐξίσωσις (5) καλεῖται ἐξίσωσις συνεχείας καί φυσικῶς δεικνύει, ὅτι τό ὁλικόν ρεῦμα διά μιᾶς κλειστῆς ἐπιφανείας, ἰσοῦται μέ τήν ταχύτητα μέ τήν ὁποίαν αὐξάνεται ἤ ἐλαττοῦται τό φορτίον εἰς τόν χῶρον V.

Γενικώτερον ἄν ἐπιτραπῇ ἡ δημιουργία ἤ ἡ καταστροφή φορτίων ἡ ἐξίσωσις (4) λαμβάνει τήν μορφήν:

$$\frac{dq_V}{dt} = \frac{d}{dt}\int_V \rho d^3x = \int_V \partial_t\rho d^3x = -\int\vec{J}\cdot d\vec{S} + \frac{dq'_V}{dt} \tag{4'}$$

ὅπου q'_V δημιουργούμενον ἤ καταστρεφόμενον φορτίον ἐντός τοῦ V. Ἄρα:

$$\int_V d^3x(\partial_t\rho + \vec{\nabla}\cdot\vec{J}) = \frac{dq'_V}{dt} \text{ .}$$

Διά τήν ἐξίσωσιν τῆς συνεχείας (5) ἀπαιτεῖται τοπική διατήρησις τοῦ φορτίου ἤτοι $\frac{dq'_V}{dt}=0$, διά τυχόν V, καί οὐχί ἁπλῶς διατήρησις τοῦ ὁλικοῦ φορτίου(Ἡ δημιουργία ζευγῶν ἠλεκτρονίων ποζιτρονίων ὀφείλει νά εἶναι τοπική). Διά νά γίνῃ τοῦτο πληρέστερον κατανοητόν, θεωρήσωμεν, τό ἀκόλουθον πληθυσμιακόν ἀνάλογον. Ἄν q_V παριστᾷ τόν πληθυσμόν ἀνά περιοχήν V καί ρ τήν πυκνότητα πληθυσμοῦ, τό $\vec{\nabla}\cdot\vec{J}$ εἶναι ἡ ἀλλαγή πυκνότητος πληθυσμοῦ, λόγῳ μετακινήσεως (μεταναστεύσεως) καί $\frac{dq'_V}{dt}$ τήν ταχύτητα μεταβολῆς λόγῳ γεννήσεων ἤ θανάτων. Εἰς τήν προκειμένην περίπτωσιν δέν ἔχομεν ἐξίσωσιν συνεχείας ἔστω καί ἄν ὁ πληθυσμός διατηρεῖται (ἐφ'ὅσον γεννήσεις καί θάνατοι δέν λαμβάνουν χώραν ταυτοχρόνως εἰς τό αὐτό σημεῖον τοῦ χώρου).

2. Μ α γ ν η τ ι κ α ί δ υ ν ά μ ε ι ς.

Αἱ δυνάμεις τάς ὁποίας ἀσκεῖ τό μαγνητικόν πεδίον ἐπί τῶν ἠλεκτρικῶν φορτίων, δίδονται ἐκ τοῦ τύπου τοῦ Lorentz. Ἡ δύναμις $\vec{F}$ ἐπί φορτίου q κινουμένου μέ ταχύτητα $\vec{u}$ ἐντός τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου $\vec{B}$, ἰσοῦται μέ τό ἐξωτερικόν γινόμενον $\vec{F}=q[\vec{u}\times\vec{B}]$. (7)
Ὡς θά ἴδωμεν βραδύτερον ἡ δύναμις αὕτη ἀποτελεῖ ἁπλοῦν συμπλήρωμα τῆς δυνάμεως Coulomb, ὥστε νά εἶναι αὕτη σύμφωνος πρός τήν εἰδικήν θεωρίαν τῆς Σχετικότητος τοῦ Einstein.

Ἐπειδή τά ἠλεκτρικά ρεύματα δέν εἶναι ἄλλο παρά κινούμενα φορτία, ὁ τύπος (7) θά μᾶς δώσῃ καί τάς δυνάμεις Laplace, τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου ἐπί τῶν ἠλεκτρικῶν ρευμάτων.

Ἔστω ρεῦμα ἐκ σωματίων φορτίου q, κινουμένων μέ ταχύτητα $\vec{u}$ ἐντός μαγνητικοῦ πεδίου $\vec{B}$. Ἄν ἔχωμεν N σωμάτια ἀνά μονάδα ὄγκου, εἰς τόν στοιχειώδη ὄγκον dV θά περιέχωνται NdV σωμάτια καί θά ἀσκεῖται ἐπ' αὐτῶν συνολική δύναμις

$$d\vec{F} = N\,dV\,(q\vec{u}\times\vec{B}).$$

Εἰσάγοντες εἰς τήν ἀνωτέρω ἔκφρασιν τήν πυκνότητα ρεύματος $\vec{J} = Nq\vec{u}$ (Ἡ πυκνότης ρεύματος εἶναι ἐξ ὁρισμοῦ τό φορτίον τό ὁποῖον διέρχεται ἀνά μονάδα ἐπιφανείας εἰς τήν μονάδα τοῦ χρόνου), ἔχομεν τελικῶς

$$d\vec{F} = (\vec{J}\times\vec{B})dV = (\vec{J}\times\vec{B})S\,d\ell = I(d\vec{\ell}\times\vec{B})\ . \qquad (8)$$

Ἡ ἐξίσωσις (8) ἐκφράζει τήν δύναμιν τήν ἐξασκουμένην ἐπί ἑνός στοιχειώδους τεμαχίου $Id\vec{\ell}$ "ἠλεκτρικοῦ ρεύματος". Ὁλοκληρώνοντες ὑπεράνω τοῦ ρεύματος λαμβάνομεν:

$$\vec{F} = \int I(d\vec{\ell}\times\vec{B}). \qquad (9)$$

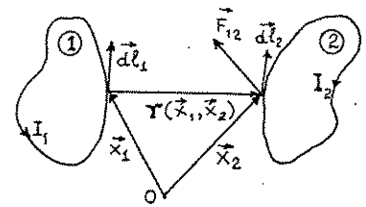
*Ἐξ ἄλλου ὡς θά ἴδωμεν εἰς τήν ἑπομένην παράγραφον, τό μαγνητικόν πεδίον $\vec{B}$ μέ πηγήν τό ἠλεκτρικόν ρεῦμα, δίδεται ἐκ τοῦ τύπου:

$$\vec{B} = \frac{1}{4\pi}\int I\left(\frac{d\vec{\ell}\times\vec{r}(\vec{x},\vec{x}')}{r^3}\right), \qquad (10)$$

ὁ ὁποῖος ἀποτελεῖ τόν νόμον τοῦ " Coulomb " τῆς Μαγνητοστατικῆς.

Βάσει τῶν (9) καί (10) ἡ δύναμις $\vec{F}_{12}$, ἡ ἀσκουμένη ἐπί ἑνός βρόχου διαρρεομένου ὑπό ρεύματος καί εὑρισκομένου εἰς τό μαγνητικόν πεδίον, τό δημιουργούμενον ὑπό τοῦ ρεύματος, τό ὁποῖον διαρρέει ἕν ἕτερον βρόχον, ὡς εἰς τό σχ. 22, εἶναι:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi} I_1 I_2 \oint_1\oint_2 \frac{d\vec{\ell}_2\times[d\vec{\ell}_1\times\vec{r}(\vec{x}_1,\vec{x}_2)]}{r^3(\vec{x}_1,\vec{x}_2)}\ . \qquad (11)$$



Σχῆμα 22.

Ἡ ἐξίσωσις (11) ἐκφράζει τά ἀποτελέσματα τῶν πειραμάτων τοῦ Ampère. Αὕτη συναντᾶται συχνά καί ὑπό τήν ἑξῆς ἔκφρασιν:

$$\vec{F}_{12} = -\frac{1}{4\pi} I_1 I_2 \oint_1 \oint_2 \frac{(\vec{d\ell}_2 \cdot \vec{d\ell}_1)\, \vec{r}(\vec{x}_1,\vec{x}_2)}{r^3(\vec{x}_1,\vec{x}_2)} \quad .$$

Ἕν ἄλλο λίαν ἐνδιαφέρον φυσικόν μέγεθος εἶναι ἡ ροπή, ἡ ὁποία ἐξασκεῖται ἐπί ἑνός στοιχειώδους βρόχου ἠλεκτρικοῦ ρεύματος ἐντός μαγνητικοῦ πεδίου $\vec{B}$

$$\vec{dM} = \vec{r} \times \vec{dF} = I\vec{r} \times (\vec{d\ell} \times \vec{B}) \quad .$$

Δι' ὁλοκληρώσεως τῆς σχέσεως αὐτῆς, θεωρουμένου τοῦ $\vec{B}$ σταθεροῦ εἰς τήν περιοχήν τοῦ στοιχειώδους βρόχου, λαμβάνομεν:

$$\vec{M} = I(\vec{\delta S} \times \vec{B}) \ , \tag{12}$$

ὅπου $\vec{\delta S}$ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ στοιχειώδους βρόχου.

Ἡ ποσότης $I\vec{\delta S}$ ἐμφανίζεται πολύ συχνά εἰς τόν μαγνητισμόν καί ὁρίζεται ὡς ἡ διπολική μαγνητική ροπή

$$\vec{\delta m} = I\vec{\delta S} \ . \tag{13}$$

Συμφώνως μέ τά ἀνωτέρω, ἐάν τοποθετήσωμεν ἕν στοιχειώδη βρόχον ρεύματος ἐντός μαγνητικοῦ πεδίου $\vec{B}$, θά ἀποκτήσῃ οὗτος δυναμικήν ἐνέργειαν:

$$W = -\vec{\delta m} \cdot \vec{B} \ . \tag{14}$$

Ὁ τύπος οὗτος τῆς ἐνεργείας δηλοῖ, ὅτι ὁ βρόχος τείνει νά

προσανατολισθῇ πρός τήν διεύθυνσιν τοῦ πεδίου $\vec{B}$, οὕτως ὥστε νά ἔχῃ τήν ἐλαχίστην δυναμικήν ἐνέργειαν. Παρατηροῦμεν ἐδῶ πλήρη ἀντιστοιχίαν πρός τόν τύπον $W = -\vec{p}\cdot\vec{E}$ τῆς δυναμικῆς ἐνεργείας ἠλεκτρικοῦ διπόλου τῆς Ἠλεκτροστατικῆς. Ἡ ὁλική μαγνητική ροπή ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

$$\vec{m} \equiv \frac{1}{2}\int \vec{r} \times \vec{j}\, d^3x \quad . \tag{15}$$

Ἐπειδή τό ρεῦμα ὀφείλεται εἰς κινούμενα φορτία, βάσει τῆς σχέσεως $\vec{j} = \rho\vec{v}$, ὅπου ρ ἡ πυκνότης φορτίου, ἡ μαγνητική ροπή ἠλεκτρικοῦ ρεύματος ἐκφράζεται καί ὡς ἀκολούθως:

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int \rho(\vec{r} \times \vec{v})\, d^3x \ . \tag{16}$$

Ἡ τελευταία ἔκφρασις ὁμοιάζει μέ τήν ἔκφρασιν τῆς στροφορμῆς $\vec{L}$ τῆς Μηχανικῆς.

Πράγματι:

$$\vec{L} = \int \rho_m(\vec{r} \times \vec{v})\, d^3x \ , \tag{17}$$

ὅπου ρ_m ἡ πυκνότης μάζης.

Ὥστε ἄν τό ρεῦμα φέρεται ὑπό σωματιδίων τοῦ αὐτοῦ φορτίου e καί μάζης M, τότε βάσει τῶν τύπων (16) καί (17),

$$\vec{m} = \frac{e}{2M}\vec{L} \ . \tag{18}$$

Ὁ συντελεστής $\frac{e}{2M}$ καλεῖται γυρομαγνητικός λόγος καί ἀποτε -

λεῖ βασικόν μέγεθος εἰς τήν διερεύνησιν τῆς δομῆς τῶν στοιχειωδῶν σωματίων, χαρακτηριστικόν τῆς κατανομῆς τοῦ ρεύματος εἰς τό ἐσωτερικόν αὐτῶν.

3. Λύσις τῶν ἐξισώσεων τῆς Μαγνητοστατικῆς — μαγνητοστατικά δυναμικά —.

Ὡς εἴδομεν προηγουμένως ἡ Μαγνητοστατική χαρακτηρίζεται ἐκ τῶν δύο διαφορικῶν ἐξισώσεων (2) καί (3). Ἐξ αὐτῶν ἡ (3), $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$, ἡ ὁποία ἐκφράζει τόν σωληνοειδῆ χαρακτῆρα τοῦ μαγνητοστατικοῦ πεδίου, εἶναι ἐξίσωσις συνδέσμου. Ἡ ἀνάλογος ἐξίσωσις συνδέσμου τῆς Ἠλεκτροστατικῆς εἶναι ἡ $\vec{\nabla}\times\vec{E}=0$, ἐκφράζουσα τήν διατήρησιν τῆς ἐνεργείας. Ἡ ἐξίσωσις (3) ὑποδηλοῖ, ὅτι ὑπάρχει μία ἀνυσματική συνάρτησις $\vec{A}$ τοιαύτη ὥστε:

$$\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A} \quad . \tag{19}$$

Τήν ἀνυσματικήν αὐτήν συνάρτησιν καλοῦμεν μαγνητικόν ἀνυσματικόν δυναμικόν.

Ὡς θά δειχθῇ κατωτέρω, ἡ συνάρτησις αὕτη εἶναι ἀνάλογος πρός τήν $\Phi(\vec{x})$, ἡ ὁποία ἀντιπροσωπεύει τό ἠλεκτροστατικόν δυναμικόν. Διά τοῦ ὁρισμοῦ (19) ἡ ἐξίσωσις (3) γίνεται ταυτότης καί ἀπομένει μόνον ἡ ἐξίσωσις (2),

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\vec{J} \quad ἤ \quad \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})=\vec{J} \qquad (2'),$$

ὡς πηγή τοῦ μαγνητοστατικοῦ πεδίου. Δι' ὁλοκληρώσεως τῆς (2)

εὑρίσκομεν τό μαγνητοστατικόν πεδίον, ὅπως δι' ὁλοκληρώσεως τῆς ἐξισώσεως τοῦ Poisson ἔχομεν τόν νόμον τοῦ Coulomb καί τό ἠλεκτροστατικόν πεδίον.

Εἰς τήν Ἠλεκτροστατικήν εἴχαμεν ὁρίσει τό δυναμικόν Φ μέ μίαν αὐθαίρετον προσθετικήν λύσιν τῆς ἐξισώσεως τοῦ Laplace . Εἰς τήν Μαγνητοστατικήν, ἔχομεν ἀκόμη μεγαλυτέραν ἐλευθερίαν εἰς τήν ἐκλογήν τοῦ $\vec{A}$.

Ἄν ἕν ἀνυσματικόν πεδίον $\vec{A}(\vec{x})$ ἱκανοποιεῖ τήν ἐξίσωσιν (19)

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}=\vec{B} \quad ,$$

τότε καί τό πεδίον $\vec{A}'(\vec{x})=\vec{A}(\vec{x})+\vec{\nabla}\psi(\vec{x})$, ὅπου $\psi(\vec{x})$ τυχόν βαθμωτόν πεδίον, ἱκανοποιεῖ τήν ἐξίσωσιν (19), διότι:

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}'=\vec{\nabla}\times\vec{A}+\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\psi=\vec{\nabla}\times\vec{A}=\vec{B} \ ,$$

καθ' ὅσον $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\psi)\equiv 0$ διά κάθε συνάρτησιν ψ .

Λαμβάνοντες τήν ἀπόκλισιν τοῦ $\vec{A}'(\vec{x})$ ἔχομεν:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}'=\vec{\nabla}\cdot\vec{A}+\vec{\nabla}^2\psi \quad . \tag{20}$$

Ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις (20) ὑποδηλοῖ, ὅτι διά καταλλήλου ἐκλογῆς τῆς συναρτήσεως ψ , δυνάμεθα νά δώσωμεν εἰς τό $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}'$ οἱανδήποτε ἐπιθυμητήν τιμήν. Πρός τοῦτο ἀρκεῖ νά ὁλοκληρώσωμεν τήν (20), θεωρουμένην ὡς ἐξίσωσιν τοῦ Poisson ὡς πρός ψ μέ "πυκνότητα φορτίου" τό $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}-\vec{\nabla}\cdot\vec{A}'$, ἴσον πρός τήν διαφοράν ἑνός γνωστοῦ ἀρχικοῦ $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$ καί τοῦ ἐπιθυμητοῦ $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}'$.

Ὁ μετασχηματισμός δυναμικῶν $\vec{A}\rightarrow\vec{A}'=\vec{A}+\vec{\nabla}\psi$, ὁ ὁποῖος ἀφήνει τά πεδία ἀναλλοίωτα καλεῖται μετασχηματισμός βαθμίδος (gauge transformation). Εἰς τήν μαγνητοστατικήν συνήθως ἐκλέγομεν $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$, ἥτις καλεῖται βαθμίς Coulomb ἤ βαθμίς ἀκτινοβολίας (radiation gauge). Εἰς τήν βαθμίδα Coulomb διά χρήσεως τῆς ταυτότητος: $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \vec{\nabla}^2\vec{A}$,

ἡ βασική ἐξίσωσις τῆς Μαγνητοστατικῆς (2'), λαμβάνει τήν μορφήν:

$$\vec{\nabla}^2\vec{A}(\vec{x}) = -\vec{J}(\vec{x}) \,, \tag{21}$$

ἥτις εἶναι ἀνυσματικόν ἀνάλογον τῆς ἐξισώσεως τοῦ Poisson τῆς Ἠλεκτροστατικῆς. Οὕτω εὑρίσκομεν ἀμέσως ὡς λύσιν τό

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\vec{J}(\vec{x}\,')}{r(\vec{x},\vec{x}\,')}\,d^3x' \,, \tag{22}$$

ἕν μαγνητοστατικόν δυναμικόν τύπου Coulomb.

Ἡ (22) δύναται νά ἀποτελέσῃ βάσιν διά τήν ἀνάπτυξιν τῆς Μαγνητοστατικῆς ὑπό τήν εἰκόνα Νεύτωνος - Coulomb, ἀλληλεπιδράσεως τῶν μαγνητικῶν δυνάμεων ἐξ ἀποστάσεως. Ἐκ τῆς (22) καί τοῦ ὁρισμοῦ $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$ ἐπιβεβαιοῦμεν ὅτι $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \vec{J}$.

4. Βαθμωτόν δυναμικόν.

Εἰς περιοχήν ὅπου δέν ὑπάρχει ρεῦμα, ἡ ἐξίσωσις (2) λαμβάνει τήν μορφήν:

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = 0 \,.$$

Συνεπῶς ἐντός τῶν περιοχῶν αὐτῶν, δυνάμεθα νά ὁρίσωμεν ἕν βαθμωτόν δυναμικόν Φ_m τοιοῦτον ὥστε:

$$-\vec{\nabla}\Phi_m = \vec{B} \,.$$

Βάσει τῆς ἐξισώσεως (3) προκύπτει, ὅτι τό δυναμικόν Φ_m ἱκανοποιεῖ τήν ἐξίσωσιν τοῦ Laplace, ἤτοι:

$$\vec{\nabla}^2\Phi_m = 0 \,.$$

Παρατηροῦμεν οὕτω, ὅτι ἐντός περιοχῶν ὅπου ἡ ἔντασις τοῦ ἠλεκτρικοῦ ρεύματος εἶναι μηδέν, ἔχομεν πλήρη μαθηματικήν ὁμοιότητα μεταξύ Ἠλεκτροστατικῆς καί Μαγνητοστατικῆς. Βάσει αὐτοῦ, δυνάμεθα νά μεταφέρωμεν τάς λύσεις προβλημάτων τῆς Ἠλεκτροστατικῆς εἰς τήν Μαγνητοστατικήν καί ἀντιστρόφως. Οὕτω, π.χ. τό βαθμωτόν δυναμικόν μαγνητικοῦ διπόλου δίδεται ἀπό τήν ἐξίσωσιν:

$$\Phi_m = \frac{\vec{m}.\vec{r}(\vec{x},\vec{x}\,')}{4\pi\, r^3(\vec{x},\vec{x}\,')} \,.$$

Ἀναφέρομεν τελικῶς καί τήν δυνατότητα χρησιμοποιήσεως μεθόδων τῆς Μαγνητοστατικῆς κατά τήν ἀντίστροφον πορείαν, διά τήν ἐπίλυσιν προβλημάτων Ἠλεκτροστατικῆς. Οὕτω π.χ. εἰς περιοχάς ὅπου δέν ὑπάρχουν φορτία, τό ἠλεκτρικόν πεδίον εἶναι σωληνοειδές $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$ καί δύναται νά ὁρισθῇ τῇ βοηθείᾳ ἑνός ἀνυσματικοῦ δυναμικοῦ, ὡς νά ἐπρόκειτο περί μαγνητικοῦ πεδίου.

5. Νόμος τῶν Biot - Savart.

Βάσει τῶν σχέσεων (22) καί (19) , χρησιμοποιοῦντες τήν ταυτότητα: $\vec{\nabla} \times (\Phi\vec{A}) = (\vec{\nabla}\Phi) \times \vec{A} + \Phi\vec{\nabla} \times \vec{A}$, καταλήγομεν εἰς τόν ἀκόλουθον τύπον διά τό μαγνητικόν πεδίον $\vec{B}$, συναρτήσει τοῦ ρεύματος:

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{x}\,') \times \vec{r}(\vec{x},\vec{x}\,')}{r^3(\vec{x},\vec{x}\,')} d^3x' \; . \tag{23}$$

Ἡ ἐξίσωσις (23) εἶναι ὁ νόμος τῶν Biot-Savart, καί ἀποτελεῖ τόν νόμον " Coulomb " τῆς Μαγνητοστατικῆς.

Δυνάμεθα νά λάβωμεν τήν διαφορικήν μορφήν τοῦ νόμου καί νά εἰσαγάγωμεν τήν ἔντασιν τοῦ ρεύματος ἀντί τῆς πυκνότητος ρεύματος ὑποθέτοντες, ὅτι τά ρεύματα διέρχονται δι' ἀγωγῶν μικρᾶς σχετικῶς διατομῆς, ὅτε δυνάμεθα νά ἀντικαταστήσωμεν τό $\vec{j}d^3x$ μέ τό $I\vec{d\ell}$, καθ' ὅσον τό $\vec{j}$ καί $\vec{d\ell}$ εἶναι συγγραμμικά ($\vec{j}d^3x = \vec{j}Sd\ell = jS\vec{d\ell} = I\vec{d\ell}$). Τότε ὁ τύπος (23) λαμβάνει τήν μορφήν:

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{I}{4\pi} \int \frac{\vec{d\ell} \times \vec{r}(\vec{x},\vec{x}\,')}{r^3(\vec{x},\vec{x}\,')} \tag{23α}$$

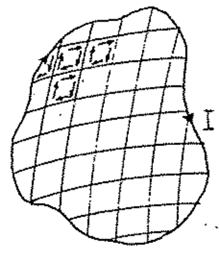
καί ἐξ αὐτοῦ ἕπεται,

$$\vec{dB} = \frac{I}{4\pi} \frac{(\vec{d\ell} \times \vec{r})}{r^3} \; , \tag{23β}$$

ὅπου $d\vec{B}(\vec{x})$ εἶναι τό μαγνητικόν πεδίον, τό ὀφειλόμενον εἰς τό στοιχειῶδες ρεῦμα $I\vec{d\ell}$.

6. Μαγνήτισις.

Θεωροῦμεν βρόχον ἠλεκτρικοῦ ρεύματος I καί τυχοῦσαν ἐπιφάνειαν ἔχουσαν τόν βρόχον ὡς περίμετρον. Ἐπί τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς θεωροῦμεν δίκτυον ἐκ στοιχειωδῶν βρόχων, ὡς εἰς τό σχ. 23. Προφανῶς δυνάμεθα νά θεωρήσωμεν τόν ἀρχικόν βρόχον, ὡς ἄθροισμα ὅλων αὐτῶν τῶν στοιχειωδῶν βρόχων, ἕκαστος τῶν ὁποίων ἀποτελεῖ ἕν στοιχειῶδες μαγνητικόν δίπολον, διπολικῆς ροπῆς $\vec{m} = I\vec{S}$.



Σχῆμα 23.

Ἔστω ἕν σημεῖον $\vec{x}$, τοῦ ὁποίου ἡ ἀπόστασις ἀπό τόν βρόχον εἶναι πολύ μεγάλη ἐν συγκρίσει μέ τάς διαστάσεις τοῦ βρόχου.

Τό μαγνητικόν ἀνυσματικόν δυναμικόν εἰς τήν βαθμίδα Coulomb, δίδεται ὡς εἴδομεν ἀπό τόν τύπον:

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{x}\,')d^3x'}{r(\vec{x},\vec{x}\,')} \; .$$

Ἀναπτύσσοντες τό $\dfrac{1}{r(\vec{x},\vec{x}\,')}$ κατά Taylor (βλέπε § 2.2) καί ἀντικαθιστῶντες εἰς τό ὁλοκλήρωμα λαμβάνομεν:

$$\vec{A}(\vec{x})=\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{1}{r(\vec{x},\vec{0})}\int\vec{J}(\vec{x}')d^3x'+\sum_i\frac{x_i}{r^3(\vec{x},\vec{0})}\int\vec{J}(\vec{x}')x_i'd^3x'+O[\frac{1}{r^3}]\right\}, \quad (24)$$

ἔνθα $O[\frac{1}{r^3}]$ ἄθροισμα ὅρων ἀνωτέρας τάξεως, τό ὁποῖον διά ἀρκετά μεγάλας ἀποστάσεις, δύναται νά παραλειφθῆ.

Λόγῳ τοῦ ὅτι πρόκειται περί κλειστῶν ρευμάτων, ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ ἀθροίσματος ἰσοῦται μέ μηδέν, δηλαδή:

$$\int\vec{J}(\vec{x}')d^3x' = 0 \quad , \qquad (25)$$

διότι τό ἠλεκτρικόν ρεῦμα διαρρέει κλειστούς βρόχους $(\vec{\nabla}\cdot\vec{J}=0)$. Οὕτω ἡ ἐξίσωσις (24) λαμβάνει τήν μορφήν:

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{3}\frac{x_i}{r^3(\vec{x},\vec{0})}\int\vec{J}(\vec{x}')x_i'\,d^3x' \qquad (26)$$

καί ἡ k-συνιστῶσα τοῦ ἀνυσματικοῦ μαγνητικοῦ δυναμικοῦ γράφεται:

$$A_k(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\sum_i\frac{x_i}{r^3(\vec{x},\vec{0})}\int J_k(\vec{x}')x_i'\,d^3x' \,. \qquad (27)$$

Γράφομεν τήν ὑπό ὁλοκλήρωσιν συνάρτησιν τῆς ἐξισ. (27) ὡς ἑξῆς:

$$J_kx_i' = \frac{1}{2}(J_kx_i' - J_ix_k') + \frac{1}{2}(J_kx_i' + J_ix_k') \,. \qquad (28)$$

Ὁ δεύτερος ὅρος τοῦ δευτέρου μέλους τῆς ἐξισώσεως (28), εἶναι προφανῶς συμμετρικός τανυστής καί ὡς ἐκ τούτου τό ὁλοκλήρωμά του εἶναι ἐπίσης συμμετρικός τανυστής, ἔστω T_{ik}. Ὁ τανυστής αὐτός εἶναι ὁ μηδενικός, ἄλλως θά εἴχομεν $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\neq 0$, ἀντιθέτως

πρός τήν ἐκλεγεῖσαν βαθμίδα Coulomb. Διά νά πεισθῶμεν περί τούτου ἄς χρησιμοποιήσωμεν τό σύστημα συντεταγμένων, εἰς τό ὁποῖον ὁ συμμετρικός πίναξ T_{ik} ἔχει διαγώνιον μορφήν

$T_{ik} = \rho_k\delta_{ik}$, ὅπου δ_{ik} τό δέλτα τοῦ Kronecker. Εἰς τό σύστημα αὐτό ἡ συνεισφορά $\vec{\alpha}$ τοῦ T_{ik} εἰς τό ἀνυσματικό δυναμικό, λαμβάνει τήν μορφήν:

$$\alpha_k = \sum_{i=1}^{3}\frac{x_i}{r^3}\rho_k\delta_{ik} = \frac{x_k\rho_k}{r^3}, \quad k = 1,2,3.$$

Τό $\vec{\alpha}$ ἔχει ἀπόκλισιν $\vec{\nabla}\cdot\vec{\alpha} = \frac{1}{r^3}\sum_{k=1}^{3}(1-\frac{3x_k^2}{r^2})\rho_k \neq 0$,

ἐκτός ἄν $\rho_k = 0$. Ὥστε, ὁ T_{ik}, μηδενιζόμενος εἰς ἕν εἰδικόν σύστημα ἀναφορᾶς, εἶναι ὁ μηδενικός πίναξ.

Ἤτοι τελικῶς:

$$A_k(\vec{x}) = \frac{x_i}{4\pi r^3(\vec{x},\vec{0})}\int\frac{(x_i'j_k - x_k'j_i)}{2}d^3x' \,,$$

ἤ τῇ βοηθείᾳ τοῦ τύπου (15),

$$A_k(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\frac{[\vec{m}\times\vec{r}(\vec{x},\vec{0})]_k}{r^3(\vec{x},\vec{0})}, \quad k = 1,2,3.$$

'Εάν ὁ βρόχος εὑρίσκεται εἰς τήν θέσιν $\vec{x}'$, τότε προφανῶς ὁ ἀνωτέρω ὑπολογισμός ὁδηγεῖ εἰς τόν τύπον,

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\,\frac{\vec{m}\times\vec{r}(\vec{x},\vec{x}')}{r^3(\vec{x},\vec{x}')} \ . \tag{29}$$

'Ο τύπος (29) δίδει τό δυναμικόν εἰς τήν θέσιν $\vec{r}$, τό ὀφειλόμενον εἰς ἕνα ἐκ τῶν βρόχων. Διά νά εὕρωμεν τό ὁλικόν ἀνυσματικόν δυναμικόν, πρέπει προφανῶς νά ἀθροίσωμεν τά ἐπί μέρους δυναμικά. Ἄν θεωρήσωμεν ὅτι ὁ ἀριθμός τῶν στοιχειωδῶν βρόχων μεγαλώνει συνεχῶς, ἐνῷ ἀντιθέτως τό μέγεθός των μικραίνει, ἔχομεν εἰς τό ὅριον μίαν συνεχῆ κατανομήν στοιχειωδῶν βρόχων ρεύματος. Τότε εἰς κάθε σημεῖον τοῦ χώρου $\vec{x}$, δυνάμεθα νά ἀντιστοιχίσωμεν ἕν ἄνυσμα $\vec{M}$, τό ὁποῖον καλοῦμεν μαγνήτισιν καί ὁρίζομεν ὡς ἑξῆς:

$$\vec{M} = \lim_{\Delta\upsilon\to 0}\frac{1}{\Delta\upsilon}\sum_i \vec{m}_i \ , \tag{30}$$

ὅπου τό ἄθροισμα θεωρεῖται ὑπεράνω τοῦ $\Delta\upsilon$. Θεωροῦντες τώρα ἕνα ὄγκον dV καί τήν ἀντίστοιχον διπολικήν ροπήν dm εἰς αὐτόν, βάσει τοῦ ὁρισμοῦ (30),

$$\overrightarrow{dm} = \vec{M}dV \ .$$

Ὥστε διά νά λάβωμεν τό ὁλικόν δυναμικόν, πρέπει τώρα ἀντί ἀθροίσεως νά ὁλοκληρώσωμεν ὑπεράνω τοῦ χώρου, ἤτοι:

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi}\int\frac{\overrightarrow{dm}\times\vec{r}}{r^3} \ . \tag{31}$$

'Ο τύπος (31) μᾶς δίδει τό ἀνυσματικόν δυναμικόν, τό ὀφειλόμενον εἰς μίαν συνεχῆ κατανομήν μαγνητίσεως δηλ. εἰς ἠλεκτρικά ρεύματα, τά ὁποῖα μακροσκοπικῶς δέν μεταφέρουν φορτίον, ἀλλ' ἐκδηλοῦνται μόνον ὡς μαγνήτισις. Π.χ. οἱ στοιχειώδεις βρόχοι τῶν ἀτομικῶν τροχιῶν τῶν ἠλεκτρονίων. 'Ο τύπος (31) δύναται νά τεθῇ εἰς πλέον κατάλληλον μορφήν, ὑπενθυμίζουσαν τήν βαθμίδα Coulomb. Πρός τοῦτο ἡ (31) μετασχηματίζεται ὡς ἑξῆς:

$$\vec{A} = -\frac{1}{4\pi}\int \overrightarrow{dm}\times\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{4\pi}\int \overrightarrow{dm}\times\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{r}\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int \vec{M}\times\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{r}\right)d^3x' = \frac{1}{4\pi}\int\frac{\vec{\nabla}'\times\vec{M}}{r}d^3x' - \int\vec{\nabla}'\times\left(\frac{\vec{M}}{r}\right)d^3x' \ .$$

Τό δεύτερον ὁλοκλήρωμα δύναται νά μετασχηματισθῇ εἰς ἐπιφανειακόν καί ἐάν λάβωμεν τήν ἐπιφάνειαν ὑπεράνω τῆς ὁποίας γίνεται ἡ ὁλοκλήρωσις, ἐκτός τῆς περιοχῆς ὅπου ὑπάρχουν ρεύματα, ὁ προσθετέος αὐτός μηδενίζεται καί τελικῶς ἔχομεν:

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\int\frac{\vec{\nabla}'\times\vec{M}(\vec{x}')}{r(\vec{x},\vec{x}')}d^3x' \ . \tag{32}$$

Συγκρίνοντες τόν τύπον (32) μέ τόν τύπον (22), παρατηροῦμεν ὅτι δυνάμεθα νά ἑρμηνεύσωμεν τόν παράγοντα $\vec{\nabla}'\times\vec{M}$ ὡς πυκνότητα ρεύματος, συμβολιζομένην μέ $\vec{J}$, ἤτοι:

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\vec{j}_{\mu\alpha\gamma}(\vec{x}')d^3x'}{r} , \qquad (33)$$

ὅπου $\vec{j}_{\mu\alpha\gamma} = \vec{\nabla}\times\vec{M}(\vec{x})$. Οὕτω καί τό ἀνυσματικό δυναμικό τοῦ ρεύματος μαγνητίσεως, ἐτέθη ὑπό προφανῆ μορφήν Coulomb.

Ἄς ζητήσωμεν τώρα τήν ἔντασιν $\vec{B}$ τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου, τοῦ ὀφειλομένου εἰς στοιχειῶδες μαγνητικόν δίπολον. Ἐκ τοῦ τύπου (29) καί βάσει τῆς σχέσεως (19) ἔχομεν:

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = -\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\times\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\times\vec{m}\right) = \frac{1}{4\pi}\left[-(\vec{m}\cdot\vec{\nabla})\frac{\vec{r}}{r^3} + \vec{m}\left(\vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{r}}{r^3}\right)\right] =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}(\vec{m}\cdot\vec{\nabla})\frac{\vec{r}}{r^3} , \qquad (34)$$

ὅπου ἐγένετο χρῆσις τῆς ταυτότητος $\vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{r}}{r^3} = -\vec{\nabla}^2\left(\frac{1}{r}\right) = 4\pi\delta(\vec{x}) = 0$, θεωροῦμεν τό πεδίον μακράν τοῦ διπόλου, συνεπῶς $\vec{x}\neq 0$ καί οὕτω ἀπερρίφθη ὁ ὅρος $\vec{m}\left(\vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{r}}{r^3}\right)$.

Ὑπενθυμίζομεν ὅτι τό ἠλεκτρικόν πεδίον, τό ὀφειλόμενον εἰς στοιχειῶδες ἠλεκτρικόν δίπολον, διπολικῆς ροπῆς $\vec{\ell}$, δίδεται ὑπό τοῦ τύπου:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi = -\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\left(\frac{\vec{\ell}\cdot\vec{r}}{r^3}\right) ,$$

ἤ

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi}(\vec{\ell}\cdot\vec{\nabla})\frac{\vec{r}}{r^3} . \qquad (35)$$

Συγκρίνοντες τάς ἐξισώσεις (34) καί (35) συνάγομεν, ὅτι στοιχειώδης βρόχος ἠλεκτρικοῦ ρεύματος ἔχει ἠλεκτροστατικόν ἀνάλογον, στρῶσιν ἠλεκτρικῆς διπολικῆς ροπῆς ἐπί τυχούσης ἐπιφανείας, ἐχούσης τόν βρόχον ὡς περίμετρον.

7. Μαγνητοστατική ἐντός ὑλικῶν.

Τά ἠλεκτρικά ρεύματα ἐντός τῶν πραγματικῶν ὑλικῶν, δύνανται νά ταξινομηθοῦν εἰς:

α) Συνήθη ρεύματα ἀγωγιμότητος, διά τά ὁποῖα ἰσχύει ὁ νόμος τοῦ Ohm, $\vec{j}_{\alpha\gamma} = \sigma\vec{E}$, ὅπου σ ἡ εἰδική ἀγωγιμότης τοῦ μέσου.

β) Ρεύματα μαγνητικά, τά ὁποῖα προσδίδουν μόνον μαγνήτισιν, ὡς π.χ. τά στοιχειώδη δίπολα ρεύματα, τά προερχόμενα ἐκ τῆς ἀτομικῆς ἤ μοριακῆς κινήσεως τῶν ἠλεκτρονίων, τά ὁποῖα μακροσκοπικῶς ἐκδηλοῦνται μόνον ὡς ρεύματα μαγνητίσεως, $\vec{j}_{\mu\alpha\gamma}$,

$$\vec{j}_{\mu\alpha\gamma} = \vec{\nabla}\times\vec{M} . \qquad (36)$$

Κατά τά ἀνωτέρω τό ὁλικόν ἀνυσματικόν δυναμικόν $\vec{A}_{o\lambda}$ θά δίδεται ὑπό τοῦ τύπου:

$$\vec{A}_{o\lambda} = \frac{1}{4\pi}\int\frac{\vec{j}_{\alpha\gamma}(\vec{x}')}{r(\vec{x},\vec{x}')}d^3x' + \frac{1}{4\pi}\int\frac{\vec{\nabla}'\times\vec{M}(\vec{x}')}{r(\vec{x},\vec{x}')}d^3x'$$

ἤ

$$\vec{A}_{o\lambda} = \frac{1}{4\pi}\int\frac{\vec{j}_{\alpha\gamma}(\vec{x}') + \vec{j}_{\mu\alpha\gamma}(\vec{x}')}{r(\vec{x},\vec{x}')}d^3x' . \qquad (37)$$

'Εξ ἄλλου ἐκ τῆς σχέσεως (37) καί τῇ βοηθείᾳ τῶν ἐξισώσεων (22) καί (2) προκύπτει:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{J}_{\alpha\gamma} + \vec{J}_{\mu\alpha\gamma} \quad ,$$

ἤ λόγῳ τῆς (36)

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{J}_{\alpha\gamma} + \vec{\nabla} \times \vec{M}$$

καί

$$\vec{\nabla} \times (\vec{B} - \vec{M}) = \vec{J}_{\alpha\gamma} \quad . \tag{38}$$

'Η ἐξίσωσις (38) ὑποδεικνύει τόν ὁρισμόν ἑνός νέου ἀνυσματικοῦ μεγέθους $\vec{H} = \vec{B} - \vec{M}$, τό ὁποῖον καλεῖται ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου καί ἱκανοποιεῖ τήν ἐξίσωσιν:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_{\alpha\gamma} \quad . \tag{39}$$

Δηλ. εἶναι στροβιλόν πεδίον μέ ἀνυσματικήν πηγήν τό ρεῦμα ἀγω - γιμότητος. Τό πεδίον $\vec{H}$ ἐν ἀντιθέσει πρός τό $\vec{B}$, δέν εἶναι πάντοτε σωληνοειδές.

Πράγματι, βάσει τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ $\vec{H}$ καί τῇ βοηθείᾳ τῆς ἐξισώσεως (3) ἔχομεν,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} - \vec{\nabla} \cdot \vec{M} = - \vec{\nabla} \cdot \vec{M} \quad .$$

Εἰς περιοχάς ὁμογενοῦς μαγνητίσεως ὅπου $\vec{\nabla} \cdot \vec{M} = 0$, τό $\vec{H}$ θά εἶναι τοπικῶς σωληνοειδές, ἐνῷ εἰς περιοχάς ἀνομοιογενείας εἰς τήν μαγνήτισιν θά ἔχωμεν ἐν γένει $\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = - \vec{\nabla} \cdot \vec{M} \neq 0$. Τήν βαθμωτήν πηγήν ρ_m τοῦ $\vec{H}$, $\rho_m = \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = - \vec{\nabla} \cdot \vec{M}$, καλοῦμεν

πυκνότητα μαγνητικῶν φορτίων,διότι ἀπουσίᾳ ρευμάτων ἀγωγιμότη- τος, ἔχομεν ἀναλογίαν πρός τήν 'Ηλεκτροστατικήν:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = 0$$
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = \rho_m \quad .$$

Τέλος παραθέτομεν τάς συνοριακάς συνθήκας αἱ ὁποῖαι διέπουν τό μαγνητικόν πεδίον κατά τήν ἐπαφήν δύο ὑλικῶν:

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1)\cdot\hat{n} = 0 \quad ,$$
$$(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \times \hat{n} = \vec{J}_{\varepsilon\pi\iota\varphi}$$

ὅπου $\vec{J}_{\varepsilon\pi\iota\varphi}$ ἡ ἐπιφανειακή πυκνότης ρεύματος ἡ ὁποία διαρρέει τήν διαχωριστικήν ἐπιφάνειαν τῶν δύο ὑλικῶν, καί $\hat{n}$ μοναδιαῖον ἄνυσμα ἐπί τήν διαχωριστικήν ἐπιφάνειαν. Οἱ ἀνωτέρω τύποι παράγονται εὐκόλως ἐκ τῶν ἐξισώσεων τοῦ Maxwell (βλ.ἄσκ.15) καί εἶναι ἀνά- λογοι τῶν τύπων (40),(41) οἱ ὁποῖοι ἀποτελοῦν τάς συνοριακάς συνθήκας ἐπαφῆς διηλεκτρικῶν εἰς τήν 'Ηλεκτροστατικήν.

7.1. Μαγνητική ἐπιδεκτικότης.

'Εν ἀντιστοιχίᾳ πρός τήν σχέσιν τῆς 'Ηλεκτροστατικῆς $\vec{p} = k\vec{E}$, ἡ ὁποία συνδέει τήν διηλεκτρικήν πόλωσιν μέ τήν ἔντασιν τοῦ ἠ- λεκτρικοῦ πεδίου (§7, κεφ. II), ὁρίζομεν τήν μαγνητικήν ἐπιδε- κτικότητα (magnetic susceptibility) k_μ ὑλικοῦ βάσει τοῦ τύπου

$$\vec{M} \equiv k_\mu \vec{H} \quad .$$

'Η ἀνωτέρω σχέσις ἡ συνδέουσα τήν μαγνήτισιν $\vec{M}$ μέ τήν ἔντασιν τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου $\vec{H}$ δέν εἶναι πάντοτε γραμμική, ὡς παρα - δείγματος χάριν εἰς τά σιδηρομαγνητικά ὑλικά, ὅπου ἡ μαγνητική ἐπιδεκτικότης $k_\mu = k_\mu(\vec{H})$ εἶναι μία συνάρτησις τοῦ $\vec{H}$.

Δία μίαν μεγάλην κατηγορίαν ὑλικῶν καί μικράς ἐντάσεις πεδίου $\vec{H}$, τό $\vec{k}_\mu$ δύναται νά θεωρηθῇ ὡς σταθερά καί ἡ σχέσις $\vec{M} = k_\mu \vec{H}$ ὡς γραμμική. Ὑλικά μέ $k_\mu > 0$ καλοῦνται παραμαγνητικά, μέ $k_\mu < 0$ διαμαγνητικά.

Εἰσάγοντες τήν μαγνητικήν ἐπιδεκτικότητα εἰς τόν ὁρισμόν τοῦ $\vec{B}$ συναρτήσει τῶν $\vec{H}$ καί $\vec{M}$ ἔχομεν τώρα:

$$\vec{B} = \vec{H} + \vec{M} = \vec{H} + k_\mu \vec{H} = (1 + k_\mu)\vec{H} ,$$

ἤ $\vec{B} = \mu \vec{H}$, ὅπου $\mu \equiv (1+k_\mu)$.

Τό μ, εἶναι ἕν πολύ χρήσιμον μέγεθος καί καλεῖται μαγνητική διαπερατότης τοῦ ὑλικοῦ (magnetic permeability). Τά παραμαγνητικά ὑλικά ἔχουν $\mu > 1$, τά διαμαγνητικά $\mu < 1$ καί τά σιδηρομαγνητικά $\mu \gg 1$

8. Ἰσοδύναμα συνοριακά προβλήματα Ἠλεκτροστατικῆς Μαγνητοστατικῆς εἰς δύο διαστάσεις.

Βάσει λεχθέντων εἰς προηγουμένας παραγράφους, τά συνοριακά προβλήματα Ἠλεκτροστατικῆς καί Μαγνητοστατικῆς εἶναι μαθηματικῶς ἰσοδύναμα. Τοῦτο παρέχει τήν εὐχέρειαν ἀπλουστεύσεως τῆς εἰκόνος τοιούτων προβλημάτων, δι' ἐκλογῆς ἑκάστοτε τῆς καταλληλοτέρας περιγραφῆς εἴτε Ἠλεκτροστατικῆς εἴτε Μαγνητοστατικῆς, ἀναλόγως τῆς περιπτώσεως. Λέγοντες Ἠλεκτροστατικήν ἤ Μαγνητοστατικήν περιγραφήν ἐν προκειμένῳ ἐννοοῦμεν τήν χρησιμοποίησιν βαθμωτοῦ ἤ ἀνυσματικοῦ δυναμικοῦ ἀντιστοίχως.

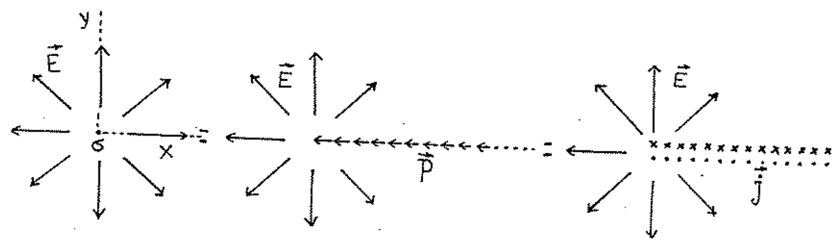
Ἡ ἰσοδυναμία αὕτη καθίσταται ἰδιαιτέρως εὐκρινής εἰς προβλήματα κυλινδρικῆς συμμετρίας, ὥστε κρίνομεν λίαν σκόπιμον μίαν σύντομον θεώρησιν κοινῶν προβλημάτων Ἠλεκτροστατικῆς ἤ Μαγνητοστατικῆς εἰς δύο διαστάσεις (βλ.Κεφ.II,§4). Ἐπιθυμοῦντες νά τονίσωμεν κυρίως τάς φυσικάς ἰδέας, θά ἀρκεσθῶμεν εἰς τήν δι' ἁπλῶν φυσικῶν ἐννοιῶν ἀνάλυσιν τῆς ἰσοδυναμίας τῶν δύο περιγραφῶν εἰς τήν περίπτωσιν σημειακῶν πηγῶν.

(i) Ἠλεκτρικά φορτία

Ἠλεκτροστατική περιγραφή ↔	Μαγνητοστατικόν ἰσοδύναμον
$\vec{E} = \vec{\nabla}\Phi$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho$	$\vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{j}$.
Σημειακή πηγή (local source), εἰς δύο διαστάσεις (ὁμογενῶς φορτισμένη εὐθεῖα).	Πηγή ἡ ἐκτεταμένη στρῶσις διπολικῆς ροπῆς "ρεύματος μαγνητίσεως" $\vec{p} = \sigma\, \vec{\xi}\, \delta(y)\, \theta(x)$.

Πυκνότης: $\rho(x,y) = \sigma\delta(x)\delta(y) = \vec{\nabla} \cdot \vec{p}$.

Βαθμωτόν δυναμικόν: $\Phi = \sigma \ln r$. Ἀνυσματικόν δυναμικόν: $\vec{A} = \sigma\hat{z}\varphi$.

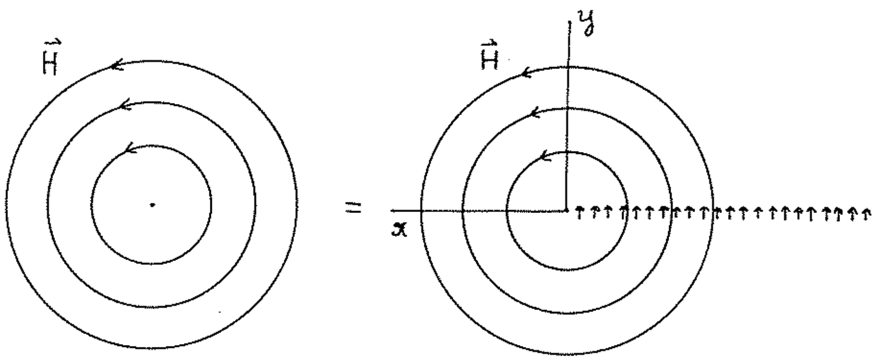


(Ὁ ἄξων z θεωρεῖται κάθετος ἐπί τό ἐπίπεδον τοῦ σχήματος).

" Τό σημειακόν φορτίον εἶναι ἰσοδύναμον πρός διπολικήν στρῶσιν".

(ii) 'Ηλεκτρικά ρεύματα.

Μαγνητοστατική περιγραφή ↔	'Ηλεκτροστατικόν ἰσοδύναμον
$\vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}$.	Βαθμωτόν μαγνητικόν δυναμικόν Ψ_m , $\vec{H} = - \vec{\nabla}\Psi_m$.
Σημειακή πηγή, εὐθύγραμμον ἠλεκτρικόν ρεῦμα $\vec{j}$.	'Εκτεταμένη πηγή, στρῶσις μαγνητίσεως $\vec{M}$.



Πυκνότης ρεύματος: $\vec{j}=\sigma\delta(x)\delta(y)\hat{z}$ $\vec{M} = \sigma\delta(y)\theta(x)\hat{y}$.

'Ανυσματικόν δυναμικόν: $\vec{A}=\sigma \ln r\hat{z}$. Βαθμωτόν δυναμικόν $\Psi_m = \sigma\theta$.

" Εἰς τά ἀνωτέρω παραδείγματα σημειακή (local) πηγή βαθμωτοῦ δυναμικοῦ, ἀντιστοιχεῖ πρός ἐκτεταμένην (nonlocal) πηγήν ἀνυσματικοῦ δυναμικοῦ καί ἀντιστρόφως ".

(iii) "Δυνάμεις Coulomb."

Αἱ δυνάμεις Coulomb μεταξύ παραλλήλων εὐθειῶν φορτίου ἤ παραλλήλων ρευμάτων διαφέρουν μόνον κατά σημεῖον.'Ενῷ ὁμόσημα φορτία ἀπωθοῦνται καί ἑτερόσημα ἕλκονται,ὁμόσημα ρεύματα ἕλκονται καί ἑτερόσημα ἀπωθοῦνται.'Η διαφορά αὕτη δύναται νά ἑρμηνευθῇ ἐπίσης ἁπλᾶ βάσει τῶν ἀνωτέρω (ἄσκ.12).

9.'Η ἐνέργεια τοῦ μαγνητοστατικοῦ πεδίου.

Εἰς τήν § 6 ἐτονίσθη ἡ ἀπόλυτος ὁμοιότης μεταξύ ἠλεκτροστατικῶν καί μαγνητικῶν διπόλων, ὡς πηγῶν τῶν πεδίων $\vec{E}$ καί $\vec{B}$ ἀντιστοίχως. 'Επεξετάθη δέ αὕτη εἰς τάς ἐκφράσεις τῆς μηχανικῆς ροπῆς καί δυναμικῆς ἐνεργείας. Βάσει τῆς ὁμοιότητος αὐτῆς ἡ ἀνά μονάδα ὄγκου ἐνέργεια τοῦ μαγνητοστατικοῦ πεδίου, δύναται προφανῶς νά ὑπολογισθῇ ὡς νά ἦτο ἠλεκτροστατική ἐνέργεια ὀφειλομένη εἰς ἰσοδύναμον ἀντίστοιχον κατανομήν ἠλεκτρικῶν διπόλων.
Εἰς τήν ἀντιστοιχίαν αὐτήν ἀπουσιάζουν τά σημειακά φορτία (μαγνητικά μονόπολα). Τό $\vec{B}$ πηγάζει ἀπό δίπολα πραγματικά ἐκ τοῦ ρεύματος $\vec{j}$ καί φαινομενικά ἐκ τοῦ ρεύματος μαγνητίσεως $\vec{M}$. Ὥστε μαθηματικῶς ἀντιστοιχεῖ πρός τό $\vec{D}$. 'Εξ ἄλλου εἰς περιοχάς τοῦ χώρου, ὅπου δέν ὑπάρχουν ρεύματα ἀγωγιμότητος καί φορτία ἔχομεν:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = - \vec{\nabla} \cdot \vec{p} \neq 0 \quad \text{καί}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = 0 , \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = - \vec{\nabla} \cdot \vec{M} \neq 0$$

Αἱ ἐξισώσεις αὗται συμπληρώνουν τήν μαθηματικήν ἀντιστοιχίαν ἡ-

λεκτροστατικῶν καί μαγνητοστατικῶν μεγεθῶν.
Τό $\vec{E}$ εἶναι ἀντίστοιχον τοῦ $\vec{H}$ καί τό $\vec{p}$ τοῦ $\vec{M}$.
(Ὑπενθυμίζομεν ὡστόσο ὅτι τά $\vec{E}$ καί $\vec{B}$ ἔχουν πλέον ἄμεσον φυσικήν ἑρμηνείαν, ὥστε νά θεωρῶνται βασικά, τά δέ $\vec{D}$ καί $\vec{H}$ παράγωγα).

$$\vec{M} \Longleftrightarrow \vec{p}$$

$$\vec{H} \Longleftrightarrow \vec{E}$$

$$\vec{B} \Longleftrightarrow \vec{D} \, .$$

Ἡ πυκνότης μαγνητοστατικῆς ἐνεργείας W_m ἀνά μονάδα ὄγκου, ἀντίστοιχος τῆς πυκνότητος $W_E = \frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{D})$ ἠλεκτροστατικῆς ἐνεργείας, θά εἶναι $W_m = \frac{1}{2}(\vec{H}\cdot\vec{B})$.

9.1. Ροή τῆς ἐνεργείας.

Μετάθεσις ἠλεκτρικῶν φορτίων ἐντός ἠλεκτρικοῦ πεδίου, συνεπάγεται μεταβολήν τῆς ἐνεργείας κατά $\vec{j}\cdot\vec{E}$ ἀνά μονάδα ὄγκου καί χρόνου. Ἐντός ἀγωγῶν ἡ πυκνότης ἐντάσεως τοῦ ἠλεκτρικοῦ ρεύματος j, εἶναι ἀνάλογος τῆς ἐντάσεως $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου, $\vec{j} = \sigma\vec{E}$, ὅπου σ ἡ εἰδική ἀγωγιμότης. Γενικώτερον, παρουσίᾳ ἐπιπροσθέτως τοῦ ἠλεκτρικοῦ πεδίου $\vec{E}$ καί ἐξωτερικῶν ἠλεκτρεγερτικῶν δυνάμεων $\vec{E}'$, π.χ. δυνάμεων Laplace, παρουσίᾳ μαγνητικοῦ πεδίου, ἤ δυνάμεων ἐκ χημικοῦ δυναμικοῦ κ.λ.π., αἱ ὁποῖαι ἀσκοῦνται ἐπί τῶν σωματιακῶν φορέων φορτίου, τότε:

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}')$$

$$\text{ἤ} \quad \vec{E}' = \frac{\vec{j}}{\sigma} - \vec{E} \, .$$

Δι' ὁλοκληρώσεως τοῦ $\vec{E}'.\vec{j}$, ἡ ἰσχύς τοῦ ἔργου τῶν ἐξωτερικῶν πηγῶν εἶναι:

$$\int \vec{E}'.\vec{j}\, dV = \int \frac{1}{\sigma}\vec{j}^2\, dV - \int \vec{E}.\vec{j}\, dV \, . \qquad (41)$$

Τό μέρος $\int \frac{1}{\sigma}\vec{j}^2\, dV$ τῆς ὡς ἄνω ἰσχύος, καταναλίσκεται ὡς θερμότης Joule καί τό ὑπόλοιπον $-\int \vec{E}.\vec{j}\, dV$, ἐναποθηκεύεται ὑπό μορφήν δυναμικῆς ἐνεργείας. Θά μετασχηματίσωμεν τοῦτο, ὥστε νά δεικνύῃ καλύτερον τήν ροήν ἐνεργείας ἐντός τοῦ χώρου. Πρός τοῦτο θεωροῦμεν τάς ἐξισώσεις τοῦ Maxwell:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0 \quad , \quad \vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{j} \, .$$

Ἐπιθυμοῦντες, ὅπως ἕκαστος ἔχῃ διαστάσεις ἐνεργείας ἀνά μονάδα ὄγκου καί χρόνου, πολλαπλασιάζομεν τήν πρώτην ἐξίσωσιν ἐσωτερικῶς ἐπί $\vec{H}$ καί τήν δευτέραν ἐπί $\vec{E}$. Οὕτω προκύπτει:

$$\vec{E}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{E}\cdot\vec{j} \, ,$$

$$\vec{H}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0 \, .$$

Ἀφαιροῦντες κατά μέλη τάς δύο ἰσότητας καί ἐφαρμόζοντες τήν ταυτότητα:

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{H}) = \vec{H}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{E}) - \vec{E}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{H}) \, ,$$

εὑρίσκομεν: $\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{H}) = -\vec{E}\cdot\vec{j}$

καί $\displaystyle\int_V \vec{E}\cdot\vec{j}\, dV = -\int_V \vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{H})\, dV = -\int_{S(V)} (\vec{E}\times\vec{H})\cdot d\vec{S}$,

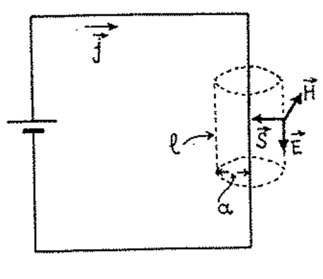
ἤ
$$\int_V \vec{E}'\cdot\vec{j}\, dV = \int_V \frac{1}{\sigma}\vec{j}^2\, dV + \int_{S(V)} (\vec{E}\times\vec{H})\cdot d\vec{S}\,. \qquad (42)$$

Βάσει τοῦ τύπου (42) ἕν μέρος τῆς ἐνεργείας τῆς πηγῆς καταναλίσκεται ὡς θερμότης Joule καί τό ὑπόλοιπον ρέει διά τῆς ὁρικῆς ἐπιφανείας S .

Τό ἄνυσμα $(\vec{E}\times\vec{H})$ καλεῖται **ἄνυσμα Poynting** καί συμφώνως πρός τά ἀνωτέρω, δύναται νά ἑρμηνευθῇ ὡς πυκνότης ροῆς ἐνεργείας ἀνά μονάδα ἐπιφανείας.

Ἐφαρμογή.

Ἔστω κύκλωμα ἀποτελούμενον ἐκ σύρματος εἰδικῆς ἀγωγιμότητος σ καί ἀκτῖνος α , τό ὁποῖον τροφοδοτεῖται ἀπό πηγήν ἠλεκτρεγερτικῶν δυνάμεων μέ ἀποτέλεσμα τήν ἐμφάνισιν τοῦ ἠλεκτρικοῦ ρεύματος πυκνότητος $\vec{j} = \sigma\vec{E}$, ὡς εἰς τό σχ. 24.



Σχῆμα 24.

Ἄς ἐφαρμόσωμεν τά τῆς §9 δι'ἕν ὡρισμένον μῆκος ℓ τοῦ σύρματος (τό ὁποῖον ἔχει σχεδιασθῆ

ἐν μεγεθύνσει εἰς τό σχῆμα 24). Εἰς τήν παράπλευρον ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου τό μαγνητικόν πεδίον εἶναι $\vec{H} = \frac{1}{2}\vec{j}\,\alpha$, (τό ἠλεκτρικόν πεδίον εἶναι φυσικά $\vec{E} = \vec{j}/\sigma$) καί τό ἄνυσμα Poynting

$\vec{E}\times\vec{H} = \dfrac{j^2\,\alpha}{2\sigma}\,\hat{S}$.

Ἡ διεύθυνσις $\hat{S}$ τοῦ ἀνύσματος τοῦ Poynting εἶναι κάθετος ἐπί τήν παράπλευρον ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου, ἡ δέ φορά πρός τό ἐσωτερικόν αὐτοῦ, ὥστε ἡ ροή διά τῶν βάσεων τοῦ κυλίνδρου μηδενίζεται. Τελικῶς ἡ ὁλική ροή ἐνεργείας, εἰσερχομένη διά τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας καταναλίσκεται πλήρως εἰς θερμότητα:

$$\int (\vec{E}\times\vec{H})\cdot d\vec{S} = -\,j^2\,\frac{\alpha}{2\sigma}\,2\pi\alpha\ell = -\,j^2\,\frac{(\pi\alpha^2\,\ell)}{\sigma} = -\int \frac{j^2}{\sigma}\,dV =$$

$= -$ θερμότης Joule.

10. Ἀλληλεπίδρασις ὕλης καί πεδίου.

Θεωρήσωμεν σωμάτιον μάζης m , ἠλεκτρικοῦ φορτίου e καί μηδενικῆς μαγνητικῆς ροπῆς, εὑρισκόμενον ἐντός ἠλεκτρικοῦ καί μαγνητικοῦ πεδίου. Τήν ἀλληλεπίδρασιν τοῦ σωματίου μέ τό πεδίον θά τήν περιγράψωμεν τῇ βοηθείᾳ τῆς συναρτήσεως τοῦ Lagrange.

Ὡς γνωστόν ἡ συνάρτησις τοῦ Lagrange $L(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)$ ὁρίζεται κατά τρόπον ὥστε αἱ ἐξισώσεις:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \ , \qquad (43)$$

νά δίδουν τάς ἐξισώσεις τῆς κινήσεως.

Εἰς τήν παροῦσαν περίπτωσιν, ἡ συνάρτησις τοῦ Lagrange θά περιλάβῃ μόνον τό σωμάτιον καί τήν ἐπ' αὐτοῦ ἐπίδρασιν τοῦ ἠλεκτρικοῦ καί μαγνητικοῦ πεδίου, τό ὁποῖον θεωρεῖται ἐξωτερικόν. Ἐπίσης θά θεωρήσωμεν μικράς ταχύτητας καί ὡς πρός τό σωμάτιον θά ἐφαρμόσωμεν τόν νόμον τοῦ Νεύτωνος τῆς μή σχετικιστικῆς μηχανικῆς.

Ἡ δύναμις τοῦ Lorentz δίδεται ἀπό τόν τύπον

$$\vec{F} = e(\vec{E} + \vec{\upsilon} \times \vec{B}) , \qquad (44)$$

ὅπου $\vec{\upsilon} = \dot{\vec{r}}$ ἡ ταχύτης τοῦ σωματίου. Ἄρα ἡ ἐξίσωσις τῆς κινήσεως εἶναι:

$$m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{p}}{dt} = e(\vec{E} + \vec{\upsilon} \times \vec{B}) . \qquad (45)$$

Θά δείξωμεν ὅτι ἡ συνάρτησις Lagrange εἶναι

$$L = \frac{1}{2} m\upsilon^2 - e\Phi(\vec{r}(t),t) + e\vec{\upsilon}.\vec{A}(\vec{r}(t),t) . \qquad (46)$$

Δι' ἐκτελέσεως τῶν πράξεων εὑρίσκομεν:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\upsilon_x + eA_x ,$$

καί διά παραγωγίσεως ὡς πρός τόν χρόνον

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \frac{d^2x}{dt^2} + e \frac{dA_x}{dt} . \qquad (48)$$

Ἀλλά $$\frac{dA_x}{dt} = \frac{\partial A_x}{\partial t} + (\upsilon_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + \upsilon_y \frac{\partial A_x}{\partial y} + \upsilon_z \frac{\partial A_x}{\partial z}) \qquad (49)$$

καί βάσει αὐτῆς, ἡ (48) μᾶς δίδει:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \frac{d^2x}{dt^2} + e \frac{\partial A_x}{\partial t} + e(\upsilon_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + \upsilon_y \frac{\partial A_x}{\partial y} + \upsilon_z \frac{\partial A_x}{\partial z}) . \qquad (50)$$

Ἐξ ἄλλου $$\frac{\partial L}{\partial x} = - e(\vec{\nabla}\Phi)_x + e\vec{\upsilon}.\frac{\partial \vec{A}}{\partial x} . \qquad (51)$$

Βάσει τῶν (43), (50) καί (51), προκύπτει:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = - e(\vec{\nabla}\Phi)_x - e \frac{\partial A_x}{\partial t} - e(\upsilon_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + \upsilon_y \frac{\partial A_x}{\partial y} + \upsilon_z \frac{\partial A_x}{\partial z}) +$$

$$+ e(\upsilon_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + \upsilon_y \frac{\partial A_y}{\partial x} + \upsilon_z \frac{\partial A_z}{\partial x}) = -e(\vec{\nabla}\Phi)_x - e\frac{\partial A_x}{\partial t} + e(\upsilon_y B_z - \upsilon_z B_y).$$

Εἰς τήν περίπτωσιν τῶν στατικῶν πεδίων, ὅπως ἐν προκειμένῳ ,

$$\frac{\partial A_x}{\partial t} = 0 \quad \text{καί} \quad - (\vec{\nabla}\Phi)_x = E_x .$$

Ὡς θά ἴδωμεν ἀργότερον καί εἰς τά χρονικῶς μεταβαλλόμενα πεδία, τό ἠλεκτρομαγνητικόν πεδίον $\vec{E}(\vec{x},t)$, $\vec{B}(\vec{x},t)$ ὁρίζεται τῇ βοηθείᾳ τοῦ βαθμωτοῦ δυναμικοῦ $\Phi(\vec{x},t)$ καί τοῦ ἀνυσματικοῦ δυναμικοῦ $\vec{A}(\vec{x},t)$ βάσει τῶν σχέσεων:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad , \qquad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \ .$$

Ἑπομένως ἀπεδείχθη, ὅτι ἡ Lagrangian (46) μᾶς δίδει

$$m\,\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = e(\ \vec{E} + (\vec{\upsilon}\times\vec{B})\ )\ ,$$

ἤτοι ἡ (46) εἶναι ἡ ζητουμένη Lagrangian τόσον διά στατικά, ὅσον καί διά χρονικῶς μεταβαλλόμενα πεδία.

Ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ δεξιοῦ μέλους τῆς (46) ἐκφράζει τήν κινητικήν ἐνέργειαν τοῦ σωματίου (ὑπό μή σχετικιστικήν μορφήν), ὁ δέ δεύτερος ὅρος τήν Lagrangian τῆς ἀλληλεπιδράσεως τοῦ σημειακοῦ φορτίου μετά τοῦ πεδίου.

Ἡ ἀνωτέρω Lagrangian ἰσχύει καί σχετικιστικῶς μέ μόνην ἀντικατάστασιν τοῦ ὅρου $1/2\ m\upsilon^2$ τῆς κινητικῆς ἐνεργείας τοῦ σωματίου, διά τῆς γνωστῆς σχετικιστικῆς ἐκφράσεως $-mc^2/\ (1-\frac{\upsilon^2}{c^2})^{1/2}$.

Τό μέρος: $\sum_{\mu=0}^{3} j_\mu A^\mu = q\Phi - \vec{j}\cdot\vec{A} = -e\Phi + e\vec{\upsilon}\cdot\vec{A}$ τῆς (46), τό ὁποῖον ἐκφράζει τήν ἀλληλεπίδρασιν τῆς ὕλης μετά τοῦ ἠλεκτρομαγνητικοῦ πεδίου, εἶχεν ἤδη σχετικιστικῶς ἀναλλοίωτον μορφήν. Εἰς τήν (46) δέν περιλαμβάνεται φυσικά ἡ Lagrangian τοῦ ἰδίου τοῦ ἠλεκτρομαγνητικοῦ πεδίου. Τοῦτο ἀπαιτεῖται εἰς τά χρονικῶς μεταβαλλόμενα πεδία. Συνήθως περιλαμβάνομεν τοῦτο ὑπό τήν μορφήν ἑνός ἀπείρου συνόλου ἁρμονικῶν ταλαντωτῶν, ἀντιστοίχων πρός τάς συνιστώσας τῆς κατά Fourier ἀναλύσεως τοῦ πεδίου.

Πρός εὕρεσιν τῆς Hamiltonian ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Ὁρίζομεν κατ' ἀρχάς τήν κανονικήν ὁρμήν $\vec{p}$, συζυγῆ τῆς θέσεως $\vec{r}$. Ἐξ ὁρισμοῦ:

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial\dot{x}} = m\upsilon_x + eA_x \ ,$$

$$\text{ἤ} \qquad \vec{p} = m\vec{\upsilon} + e\vec{A}\ . \tag{52}$$

Ἡ κανονική ὁρμή εἶναι συνάρτησις τῆς χρησιμοποιουμένης βαθμίδος (gauge). Ἡ ταχύτης φυσικά $\vec{\upsilon} = \frac{1}{m}(\vec{p} - e\vec{A})$ εἶναι ἀναλλοίωτος ὡς πρός μετασχηματισμόν βαθμίδος.

Ἡ Hamiltonian ὡς γνωστόν ὁρίζεται, βάσει τῆς σχέσεως:

$$H = \vec{\upsilon}\cdot\vec{p} - L\ ,$$

ἄρα ἐν προκειμένῳ:

$$H = (\vec{p} - e\vec{A})\cdot\frac{\vec{p}}{m} - \frac{1}{2}\,\frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{m} + e\Phi - \frac{e}{m}(\vec{p} - e\vec{A})\cdot\vec{A}\ ,$$

$$\text{ἤ} \qquad H = \frac{1}{2m}(\vec{p} - e\vec{A})^2 + e\Phi\ . \tag{53}$$

Ἡ Hamiltonian H, ἔχει καί ἐδῶ τήν φυσικήν ἑρμηνείαν τῆς ἐνεργείας. Ὁ πρῶτος ὅρος τῆς (53) εἶναι ἡ κινητική ἐνέργεια $\frac{1}{2}m\upsilon^2$, ὁ δέ δεύτερος ἐκφράζει τήν δυναμικήν ἐνέργειαν, λόγῳ τοῦ ἠλεκτροστατικοῦ δυναμικοῦ. Αἱ μαγνητικαί δυνάμεις ὡς κάθετοι πρός τήν ταχύτητα, κατά τόν νόμον τοῦ Lorentz, δέν ἐκτελοῦν ἔργον κατά τάς μετατοπίσεις τοῦ σημειακοῦ φορτίου καί συνεπῶς δέν ἀλλάζουν τήν δυναμικήν ἐνέργειαν τούτου.

Ἀσκήσεις.

1. Βάσει τοῦ ὁρισμοῦ (15) νά ὑπολογισθῇ ἡ μαγνητική ροπή κυκλικοῦ βρόχου ρεύματος, σταθερᾶς ἐντάσεως I, ἀκτῖνος R καί ἐπιβεβαιωθῇ ἡ ἰσοδυναμία τῶν ὁρισμῶν (15), (13).

2. Νά εὑρεθῇ ἡ ροπή ἡ ἐξασκουμένη ἐπί στερεοῦ ἀγωγοῦ κυλίνδρου, περιστρεφομένου μέ μικράν γωνιακήν ταχύτητα ω , ἐντός ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου καθέτου ἐπί τόν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου.

3. Ἡ ἐπιφάνεια κυκλικοῦ δίσκου ἀκτῖνος α καλύπτεται μέ λεπτόν σύρμα σχηματῖζον N σπείρας ἐκ τοῦ κέντρου μέχρι τῆς ἐπιφανείας, καί τό ὁποῖον διαρρέεται ὑπό ρεύματος σταθερᾶς πυκνότητος $\vec{j}$. Ζητεῖται ἡ μαγνητική διπολική ροπή.

4. Ἀγωγός ἐπίπεδος πλάξ ($z = 0$) διαρρέεται ὑπό ρεύματος σταθερᾶς ἐπιφανειακῆς πυκνότητος κατά τόν θετικόν ἄξονα y. Νά εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου, τό ὁποῖον δημιουργεῖ.

5. Δίδονται δύο ἐπίπεδοι ἀγωγοί πλάκες διαρρεόμεναι ὑπό ρεύματος ἐπιφανειακῆς πυκνότητος $+j\hat{y}$ καί $-j\hat{y}$ ἀντιστοίχως. Νά εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου καί ἡ ἀμοιβαία δύναμις ἀνά μονάδα ἐπιφανείας.

6. Ὑπολογίσατε τήν πίεσιν ἐπί τῆς ἐπιφανείας εὐθυγράμμου σωλῆνος, ἀκτῖνος R, διαρρεομένου ὁμοιομόρφως ὑπό ἠλεκτρικοῦ

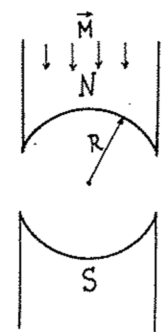
ρεύματος ἐντάσεως I.

7. Ὑπολογίσατε τήν πίεσιν ἐπί τῆς ἐπιφανείας πηνίου, διαρρεομένου ὑπό ρεύματος I καί ἔχοντος N ἀριθμόν σπειρῶν ἀνά μονάδα μήκους.

8. Δίδεται συνεχής ἑλικοειδής κυλινδρικός φλοιός ρεύματος, ἀκτῖνος R. Ζητεῖται τό βῆμα τῆς ἕλικος, ὥστε αἱ ἀμοιβαῖαι μαγνητικαί δυνάμεις μεταξύ τῶν ρευμάτων νά ἀλληλοαναιροῦνται καί οὕτω νά ἔχωμεν στατικήν ἰσορροπίαν.

9. Δείξατε ὅτι τό δυναμικόν τοῦ τύπου (22), ἱκανοποιεῖ τήν συνθήκην $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$ τῆς βαθμίδος Coulomb. (Νά χρησιμοποιηθῇ ἡ ἐξίσωσις διατηρήσεως τοῦ ἠλεκτροστατικοῦ ρεύματος $\vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$).

10. Δίδεται ἰδανικός σιδηρομαγνήτης, τοῦ ὁποίου οἱ δύο πόλοι ἀποτελοῦν τά ἥμιση ἀπείρου κυλινδρικῆς ἐπιφανείας ἀκτῖνος R. Νά ὑπολογισθῇ ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου μεταξύ τῶν πόλων τοῦ μαγνήτου. Δίδεται ἡ μαγνήτισις $\vec{M}$.



11. Θεωρήσατε σιδηροῦν δακτύλιον πέριξ τοῦ ὁποίου περιελίσσεται σύρμα σχηματίζον N σπείρας καί διαρρεόμενον ὑπό ρεύματος

I. α) Εὕρατε τά $\vec{B}$ καί $\vec{H}$.

β) Ὁμοίως ἐάν ὁ δακτύλιος φέρει ἄνοιγμα μήκους ε.

12. Ὡς γνωστόν αἱ δυνάμεις Coulomb, ἀνά μονάδα μήκους, μεταξύ δύο ὁμοιομόρφως φορτισμένων παραλλήλων εὐθειῶν εἶναι

$$\vec{F}^{(e)}_{12} = \sigma_1\sigma_2 \frac{\widehat{r_1 - r_2}}{r_{12}} .$$

Τά ἑτερόσημα ἕλκονται καί τά ὁμόσημα ἀπωθοῦνται. Ἀντιθέτως, προκειμένου περί παραλλήλων ρευμάτων ἕλκονται τά ὁμόσημα καί τά ἑτερόσημα ἀπωθοῦνται

$$\vec{F}^{(m)} = - i_1 i_2 \frac{\widehat{r_1 - r_2}}{r_{12}} .$$

Νά ἑρμηνευθῆ ἡ διάφορος αὕτη συμπεριφορά ἠλεκτρικῶν καί μαγνητικῶν δυνάμεων εἰς τά πλαίσια τῆς Ἠλεκτροστατικῆς - Μαγνητοστατικῆς τῶν δύο διαστάσεων.

13. Θεωρήσωμεν κυλινδρικόν " ἰδανικόν σιδηρομαγνήτην " $(\mu=\infty)$ ἀκτῖνος R, καί ἠλεκτρικόν ρεῦμα ἐντάσεως i διαρρέον εὐθεῖαν παράλληλον πρός τόν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου, εἰς ἀπόστασιν $\alpha > R$ ἀπ' αὐτοῦ.

Νά εὑρεθῆ ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου.

14. Δείξατε ὅτι ἡ διατήρησις τοῦ ἠλεκτρικοῦ ρεύματος εἶναι συνέπεια τῶν ἐξισώσεων τοῦ Maxwell.

15. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι κατά τήν ἐπαφήν δύο μαγνητικῶν ὑλικῶν ἰσχύουν αἱ ἑξῆς συνοριακαί συνθῆκαι:

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \hat{n} = 0$$

$$(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \times n = \vec{J}_{\epsilon\pi\iota\varphi}$$

ὅπου $\vec{B}_2$, $\vec{B}_1$, $\vec{H}_2$, $\vec{H}_1$ εἶναι τά ἀνύσματα τῆς μαγνητικῆς ἐπαγωγῆς $\vec{B}$ καί τῆς ἐντάσεως τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου $\vec{H}$, ἀντιστοίχως ἐντός τῶν δύο ὑλικῶν, $\vec{J}_{\epsilon\pi\iota\varphi}$ πυκνότης ἐντάσεως ρεύματος ἡ ὁποία διαρρέει τήν διαχωριστικήν ἐπιφάνειαν τῶν δύο ὑλικῶν καί $\hat{n}$ μοναδιαῖον ἄνυσμα κάθετον ἐπί τήν διαχωριστικήν ἐπιφάνειαν.

16. Ἐπιβεβαιώσατε ὅτι αἱ ἐξισώσεις τοῦ Maxwell καταλλήλως τροποποιημέναι ὥστε νά παρέχουν τήν δυνατότητα ὑπάρξεως καί διατηρουμένου ρεύματος μαγνητικῶν φορτίων ἔχουν τήν μορφήν:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = - \vec{J}_m \quad , \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \rho_m$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{J}_e \quad , \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho_e \qquad \text{ὅπου}$$

ρ_e, $\vec{J}_e$ καί ρ_m, $\vec{J}_m$ αἱ ἀντίστοιχοι πυκνότητες ἠλεκτρικοῦ ἤ μαγνητικοῦ φορτίου καί ἐντάσεως ρεύματος.

Π Ι Ν Α Ξ Ι.

Γενικαί 'Ανυσματικαί Σχέσεις.

1. $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A}) = \vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})$
2. $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B} - (\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$
3. $(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{C}\times\vec{D}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})(\vec{B}\cdot\vec{D}) - (\vec{A}\cdot\vec{D})(\vec{B}\cdot\vec{C})$
4. $(\vec{A}\times\vec{B})\times(\vec{C}\times\vec{D}) = (\vec{A}\times\vec{B}\cdot\vec{D})\vec{C} - (\vec{A}\times\vec{B}\cdot\vec{C})\vec{D}$
5. $\vec{\nabla}(\Phi + \Psi) = \vec{\nabla}\Phi + \vec{\nabla}\Psi$
6. $\vec{\nabla}(\Phi\Psi) = \Phi\vec{\nabla}\Psi + \Psi\vec{\nabla}\Phi$
7. $\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}+\vec{B}) = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \vec{\nabla}\cdot\vec{B}$
8. $\vec{\nabla}\cdot(\Phi\vec{A}) = \vec{A}\cdot\vec{\nabla}\Phi + \Phi\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$
9. $\vec{\nabla}\times(\vec{A}+\vec{B}) = \vec{\nabla}\times\vec{A} + \vec{\nabla}\times\vec{B}$
10. $\vec{\nabla}\times(\Phi\vec{A}) = \vec{\nabla}\Phi\times\vec{A} + \Phi\vec{\nabla}\times\vec{A}$
11. $\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} + \vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B}) + \vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})$
12. $\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) - \vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})$
13. $\vec{\nabla}\times(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{A}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}) - \vec{B}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) + (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}$
14. $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \vec{\nabla}^2\vec{A}$
15. $\vec{\nabla}^2\Phi = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\Phi$
16. $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\Phi = 0$
17. $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = 0$

Π Ι Ν Α Ξ ΙΙ.

Είδικαί 'Ανυσματικαί Σχέσεις.

1. $\vec{\nabla}\cdot\vec{r} = 3$
2. $\vec{\nabla}\times\vec{r} = 0$

3. $\vec{\nabla}r = \frac{\vec{r}}{r}$
4. $\vec{\nabla}(\frac{1}{r}) = -\frac{\vec{r}}{r^3}$
5. $\vec{\nabla}^2(\frac{1}{r}) = -4\pi\delta(\vec{r})$
6. $\vec{\nabla}\cdot(\frac{\vec{J}}{r}) = \vec{J}\cdot[\vec{\nabla}(\frac{1}{r})] = -\frac{(\vec{J}\cdot\vec{r})}{r^3}$, ἄν $\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0$
7. $\vec{\nabla}^2\,(\frac{\vec{J}}{r}) = \vec{J}\quad\vec{\nabla}^2(\frac{1}{r}) = -\vec{J}\,4\pi\delta(\vec{r})$, ἄν $\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0$.

Π Ι Ν Α Ξ ΙΙΙ

'Ολοκληρωτικαί Σχέσεις

1. $\int d\vec{x}\cdot\vec{\nabla}\Phi = \Phi$
2. $\int (d\vec{x}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} = \vec{A}$
3. $\oint_{S(V)} \Phi\, d\vec{S} = \int_V (\vec{\nabla}\Phi)\, dV$
4. $\oint_{\ell} \Phi\, d\vec{\ell} = -\int_{S(\ell)} \vec{\nabla}\Phi\times d\vec{S}$
5. $\oint_{S(V)} \vec{A}\cdot d\vec{S} = \int_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{A})\, dV$
6. $\oint_{\ell} \vec{A}\cdot d\vec{\ell} = \int_{S(\ell)} (\vec{\nabla}\times\vec{A})\cdot d\vec{S}$
7. $\oint_{S(V)} \vec{A}\times d\vec{S} = -\int_V (\vec{\nabla}\times\vec{A})\, dV$