ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξετάσεις επί Πτυχίω

στη Μηχανική ΙΙ

4 Μαΐου 2009

Απαντήστε και στα 3 προβλήματα που ακολουθούν με σαφήνεια, ακρίβεια και απλότητα. Όλα τα προβλήματα είναι ισοδύναμα. Καλή σας επιτυχία.

Θέμα Α: Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται επί του επιπέδου $x-y$. Θέλοντας να το παγιδεύσουμε σε μια περιοχή του επιπέδου κατασκευάζουμε ένα δυναμικό της μορφής

$$V(x,y)=\frac{1}{2}k(4x^2+2y^2+2\lambda xy).$$

1. Κατασκευάστε τους πίνακες κινητικής και δυναμικής ενέργειας για το σωμάτιο αυτό και βρείτε το σημείο ισορροπίας.
2. Να βρεθούν οι χαρακτηριστικές συχνότητες του σωματιδίου και τα αντίστοιχα ιδιοανύσματα.
3. Δείξτε ότι τα ιδιοανύσματα αυτά είναι ορθογώνια.
4. Για τι τιμές του συντελεστή λ οι χαρακτηριστικές συχνότητες είναι πραγματικές; Είναι το δυναμικό που κατασκευάσαμε παγιδευτικό τελικά;
5. Αν το δυναμικό είναι παγιδευτικό περιγράψτε ποιοτικά την κίνηση του σωματιδίου μέσα σε αυτό.

Θέμα Β: Ένα σχετικιστικό σωματίδιο με μάζα ηρεμίας m το οποίο κινείται σε κάποιο δυναμικό $V(x)$ (θεωρήστε για ευκολία ότι η κίνηση συμβαίνει επί του άξονα x μόνο) περιγράφεται από την ακόλουθη Λαγκρανζιανή

$$L(x,v)=-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}-V(x)$$

όπου $v=\dot{x}$ και c η ταχύτητα του φωτός.

1. Γράψτε την εξίσωση κίνησης του σωματιδίου και λύστε την στην περίπτωση που $V(x)=-Fx$.
2. Συγκρίνετε το διάστημα που θα διανύσει το σωματίδιο ξεκινώντας από την ηρεμία με το αντίστοιχο ενός μη σχετικιστικού σωματιδίου που υπόκειται σε ίδιο δυναμικό λαμβάνοντας όρους μέχρι τέταρτης τάξης στο ανάπτυγμα του $x(t)$ για το σχετικιστικό σωματίδιο. [Δίδεται το ολοκλήρωμα $\int_0^s xdx/\sqrt{1+x^2}=-1+\sqrt{1+s^2}$ καθώς και το ανάπτυγμα του $\sqrt{1+\epsilon^2}=1+\epsilon^2/2-\epsilon^4/8+\mathcal{O}(\epsilon^6)$.]
3. Ποια είναι η γενικευμένη ορμή του σωματιδίου; Κατασκευάστε την Χαμιλτονιανή που αντιστοιχεί στο σωματίδιο αυτό.
4. Ποια ποσότητα διατηρείται κατά τη διάρκεια της κίνησης του σωματιδίου;

Θέμα Γ: Κατασκευάστε μια Λαγκρανζιανή συνάρτηση για κάθε ένα από τα ακόλουθα φυσικά συστήματα. Εξηγήστε με κάποιο σχήμα ή με λόγια τη φυσική σημασία της κάθε παραμέτρου που θα χρησιμοποίηστε. Σημειώστε πόσοι είναι οι βαθμοί ελευθερίας του συστήματος που περιγράφεται από την εκάστοτε Λαγκρανζιανή.

1. Δύο **ΜΗ** αλληλεπιδρώντα σωματίδια τα οποία μπορούν να κινούνται στον τρισδιάστατο χώρο.

2. Ένα εκκρεμές μέσα στο ομογενές βαρυτικό πεδίο της Γης το οποίο αποτελείται από μια σημειακή μάζα m στερεωμένη στο άκρο μιας αβαρούς ράβδου, η οποία είναι ελαστική με συντελεστή ελαστικότητας k, έχει φυσικό μήκος l_0 και η οποία δύναται να περιστρέφεται ελεύθερα γύρω από το ένα άκρο της, κινούμενη επί κατακορύφου επιπέδου.

3. Μια σημειακή μάζα m η οποία είναι αναγκασμένη να κινείται πάνω σε μια σφαιρική επιφάνεια ακτίνας R δίχως τριβές και βρίσκεται μέσα στο ομογενές βαρυτικό πεδίο της Γης.

4. Μια σημειακή μάζα m η οποία κινείται δίχως τριβές πάνω σε οριζόντιο επίπεδο και η οποία είναι προσδεδεμένη μέσω ενός μή εκτατού νήματος μήκους L με μια άλλη σημειακή μάζα m. Το νήμα διέρχεται μέσα από μια τρύπα του επιπέδου έτσι ώστε η δεύτερη μάζα να κρέμεται κάτω από το επίπεδο και να κινείται μόνο κατακόρυφα, ενώ το νήμα που συνδέει τις δύο μάζες είναι συνεχώς τεντωμένο.

5. Ένα φορτισμένο σωματίδιο φορτίου q και μάζας m το οποίο μπορεί να κινείται δίχως τριβές επί του άξονα x ενώ βρίσκεται ταυτόχρονα μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο $\vec{B} = B\hat{z}$. [Δείξτε πρώτα ότι το μαγνητικό αυτό πεδίο μπορεί να προκύψει από ένα ανυσματικό δυναμικό της μορφής $\vec{A} = Bx\hat{y}$.]

Λύσεις

Θέμα Α:

1. $$\mathbf{M} = m\mathbf{I}\ ,\ \mathbf{K} = k\begin{pmatrix} 4 & \lambda \\ \lambda & 2 \end{pmatrix}.$$

   Το σημείο ισορροπίας χαρακτηρίζεται από $\partial V/\partial x = \partial V/\partial y = 0$, δηλαδή $4x + \lambda y = 2y + \lambda x = 0$ δηλαδή $x = y = 0$.

2. Από το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\det(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}) = 0$ βρίσκουμε $(4-x)(2-x) - \lambda^2 = 0$ όπου $x = m\omega^2/k$, με λύση
$$x = 3 \pm \sqrt{1+\lambda^2}.$$
   Τα αντίστοιχα ιδιοανύσματα είναι
$$X_\pm = \pm\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{1+\lambda^2}\mp 1}{\lambda} \end{pmatrix}.$$

3. Το εσωτερικό γινόμενο ορίζεται μέσω του πίνακα της κινητικής ενέργειας. ΕΔώ όμως είναι ο μοναδιαίος πίνακας οπότε υπολοογίζουμε απευθείας το $X_-^\top X_+$ το οποίο είναι 0 (κάθετα ιδιοανύσματα).

4. Για $|\lambda| > \sqrt{2}$, η μια από τις δύο ιδιοσυχνότητες γίνεται αρνητική, οπότε το σημείο ισορροπίας δεν είναι ευσταθές. Αλλιώς οι ιδιοσυχνότητες είναι πραγματικές. Επομένως για να είναι δυναμικό παγίδευσης πρέπει $|\lambda| < \sqrt{2}$.

5. Το σωματίδιο εκτελεί μια σύνθετη ταλάντωση (αρμονική ταλάντωση σε καθένα από τα δύο ιδιοανύσματα με τις αντίστοιχες ιδιοσυχνότητες.).

Θέμα Β:

1. $$m\frac{d}{dt}\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + \frac{dV}{dx} = 0.$$
   Για το συγκεκριμένο δυναμικό
$$\left.\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right|_{v(0)}^{v(t)} = \frac{Ft}{m}.$$
   Για $v(0) = 0$
$$\frac{v(t)}{\sqrt{1-\frac{v(t)^2}{c^2}}} = \frac{Ft}{m} \Rightarrow v(t) = c\sqrt{\frac{1}{1+1/(Ft/mc)^2}} = \frac{(Ft/m)}{\sqrt{1+(Ft/mc)^2}}.$$

2. $$x(t) = \int_0^t v(t)dt = \frac{mc^2}{F}\int_0^{Ft/m}\frac{sds}{\sqrt{1+s^2}} = \frac{mc^2}{F}\left[-1+\sqrt{1+\left(\frac{Ft}{mc}\right)^2}\right]. \tag{1}$$

Αναπτύσσοντας την παραπάνω σχέση και κράτωντας μέχρι όρους 4ης τάξης βρίσκουμε

$$x(t) = \frac{Ft^2}{2m} - \frac{F^3t^4}{8m^3c^2} + \mathcal{O}(t^6)$$

Ο δεύτερος όρος είναι αυτός που διαφοροποιεί την διανυθείσα απόσταση για το σχετικιστικό σωματίδιο από τον αντίστοιχο για το νευτώνειο (πρώτος όρος).

3.
$$H = pv - L$$

με $p = \partial L/\partial v = mv/\sqrt{1-(v/c)^2}$. Λύνοντας ως προς v βρίσκουμε

$$v = \frac{pc}{\sqrt{(mc)^2 + p^2}}$$

οπότε

$$H = c\sqrt{p^2 + (mc)^2} + V(x).$$

4. Η ποσότητα που διατηρείται είναι η ενέργεια η οποία εκφράζεται από το ολοκλήρωμα του Jacobi

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} + V(x).$$

Θέμα Γ:

1.
$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{x}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{x}}_2^2$$

6 βαθμών ελευεθερίας.

2.
$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{1}{2}k(r-l_0)^2 + mgr\cos\theta$$

2 βαθμών ελευθερίας.

3.
$$L = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\phi}^2) - mgR\cos\theta$$

2 βαθμών ελευθερίας.

4.
$$L = \frac{1}{2}m(2\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + mg(L-r)$$

2 βαθμών ελευθερίας.

5.
$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

Είναι εύκολο να δείξει κανείς ότι $\vec{\nabla} \times Bx\hat{y} = B\hat{z}$. 1 βαθμού ελευθερίας.