ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Πτυχιακή εξέταση στη Μηχανική ΙΙ

20 Σεπτεμβρίου 2007

Τμήμα Π. Ιωάννου & Θ. Αποστολάτου

Απαντήστε στα ερωτήματα που ακολουθούν με σαφήνεια, ακρίβεια και απλότητα. Όλα τα ερωτήματα είναι ισοδύναμα. Οι ολοκληρωμένες απαντήσεις σε ερωτήματα έχουν περισσότερο βάρος από τις αποσπασματικές και μερικές απαντήσεις ερωτημάτων. Καλή σας επιτυχία.

Θέμα Α: Σε φορτισμένο σωματίδιο μάζας m και φορτίου $q = -e$ το οποίο κινείται εντός ομογενούς μαγνητικού πεδίου ασκείται εκτός από τη δύναμη Lorentz και η δύναμη

$$\vec{F} = -k\vec{r}$$

όπου k και e θετικές σταθερές και $\vec{r}$ το διάνυσμα θέσης του σωματιδίου.

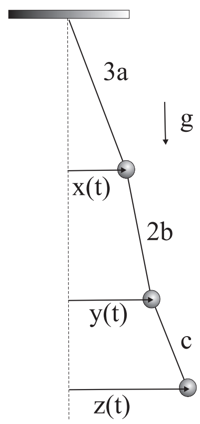
1. Γράψτε τη Λαγκρανζιανή του σωματιδίου δεδομένου ότι το ανυσματικό δυναμικό για ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο μπορεί να γραφεί ως
$$\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r}.$$

2. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα του Jacobi και δείξτε ότι οδηγεί σε διατήρηση της ποσότητας $m\,\vec{v}\cdot\vec{v} + k\,\vec{r}\cdot\vec{r}$. Αναφέρατε τη φυσική σημασία της ποσότητας αυτής και εξηγείστε το λόγο που δεν εμφανίζεται το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ σε αυτή την έκφραση.

3. Αποδείξτε οτι διατηρείται και η ποσότητα:
$$m(\vec{v} \times \vec{r}) \cdot \vec{B} + \frac{e}{2}(\vec{r} \times \vec{B}) \cdot (\vec{r} \times \vec{B}) \ .$$
χρησιμοποιώντας την εξίσωση κίνησης του σωματιδίου και την ταυτότητα $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}$.

4. Από την εξίσωση κίνησης του σωματιδίου κατασκευάστε τη διαφορική εξίσωση που διέπει την εξέλιξη της ποσότητας $\vec{r} \cdot \vec{B}$. Αν αρχικά το σωματίδιο ήταν στην θέση $\vec{r}_0$ ακίνητο προσδιορίστε την τιμή τού $\vec{r} \cdot \vec{B}$ τη χρονική στιγμή t.

Θέμα Β: Τρία σωματίδια μάζας m εκτελούν επίπεδες μικρές ταλαντώσεις περί το ευσταθές σημείο ισορροπίας του κλασικού τριπλού εκκρεμούς του σχήματος. Η σταθερή επιτάχυνση της βαρύτητας είναι g και τα μήκη των εκκρεμών είναι αντίστοιχα $3a$, $2b$ και c. Θα χρησιμοποιήσουμε την απόσταση κάθε σωματιδίου από τον κατακόρυφο άξονα ως συντεταγμένη του κάθε σωματιδίου (βλ. σχήμα).



1. Θεωρώντας μικρές κινήσεις του κάθε σωματιδίου δείξτε με απλότητα αλλά και σαφήνεια (δεν χρειάζονται πολλές πράξεις) ότι η Λαγκραντζιανή που διέπει μικρές κινήσεις περί το σημείο ισορροπίας είναι
$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{g}{2}\left(\frac{x^2}{a} + \frac{(x-y)^2}{b} + \frac{(y-z)^2}{c}\right) \ .$$

2. Κατασκευάστε τους πίνακες κινητικής και δυναμικής ενέργειας του συστήματος, $\mathbf{M}$, $\mathbf{K}$, αντίστοιχα.

3. Έστω μια ιδιοκατάσταση του συστήματος τέτοια ώστε η μεσαία μάζα να παραμένει ακίνητη ($y(t) = 0$). Γράψτε την εξίσωση κίνησης με πίνακες γι' αυτή την κατάσταση και δείξτε ότι σε αυτή την περίπτωση το τελευταίο μήκος c πρέπει να είναι ο αρμονικός μέσος των πρώτων δύο a, b:
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} \, .$$
[Υπ: Δεν χρειάζεται ούτε να βρείτε τις ιδιοκαταστάσεις, ούτε τις ιδιοσυχνότητες.]

4. Για την περίπτωση $a = 2L, b = 2L, c = L$ (που ισχύει η παραπάνω απαίτηση) σχεδιάστε ένα χαρακτηριστικό στιγμιότυπο της θέσης των εκκρεμών αυτής της ιδιοκατάστασης και υπολογίστε την ιδιοσυχνότητά της.

Θέμα Γ:

1. Για ένα σύστημα ενός βαθμού ελευθερίας προσδιορίστε τη σχέση που πρέπει να ικανοποιούν οι παράμετροι $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ έτσι ώστε ο γραμμικός μετασχηματισμός $(q, p) \to (Q = \alpha q + \beta p, P = \gamma q + \delta p)$ να είναι κανονικός.

2. Αν το σύστημα είναι πολλών βαθμών ελευθερίας και η Χαμιλτονιανή $H(q_1, \cdots, q_n, p_1, \cdots, p_n)$ δεν έχει άμεση εξάρτηση από το χρόνο, δείξτε ότι η $F(q_1, \cdots, q_n, p_1, \cdots, p_n)$ είναι σταθερά της κίνησης εάν $\{F, H\}] = 0$.

3. Δείξτε ότι η
$$F = \sum_{i=1}^{n} p_i$$
είναι σταθερά της κίνησης αν η Χαμιλτονιανή έχει τη μορφή
$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i^2 + V(q_1, \cdots, q_n)$$
και η δυναμική συνάρτηση, V, είναι συνάρτηση των q_k, $k = 1, \cdots, n$ μόνο μέσω των διαφορών $q_i - q_j$ ($i \neq j$). Αυτή η αλληλεπίδραση συνεπάγεται το τρίτο νόμο του Νεύτωνα; Απαιτείται για τη διατήρηση της F να συμπεριλαμβάνονται όλα τα ζευγάρια συντεταγμένων;

4. Για $n = 3$ γράψτε τη γενικότερη μορφή δυναμικής ενέγειας (άρα και τρόπου αλληλεπίδρασης) που θα οδηγούσε σε διατήρηση της συνολικής ορμής F.

Θέμα Δ: Θεωρήστε τη Λαγκραντζιανή που διέπει την κίνηση ενός πλανήτη σε ένα "περίεργο" βαρυτικό σύστημα:
$$L = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{\mu r}{r - 2m}$$
όπου m, μ θετικές σταθερές, και $r(t), \theta(t)$ οι πολικές συντεταγμένες του πλανήτη με $0 \leq \theta \leq 2\pi$ και $r > 2m$.

1. Δείξτε ότι η στροφορμή $\ell = r^2\dot{\theta}$ διατηρείται.

2. Ο πλανήτης εκτελεί κυκλική τροχιά ακτίνας $R > 2m$. Κατασκευάστε την εξίσωση που ικανοποιεί η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς για δεδομένη τιμή της ℓ.

3. Υπολογίστε και σχεδιάστε τη στροφορμή ℓ συναρτήσει της ακτίνας περιστροφής R. Προσδιορίστε την ακτίνα περιστροφής R_0 που αντιστοιχεί στην ελάχιστη στροφορμή ℓ_{min}.

4. Ενώ ο πλανήτης περιστρέφεται σε αυτή την κυκλική τροχιά (R_0) διαταράσσουμε λίγο την ακτίνα του (χωρίς να αλλάξει η στροφορμή του). Ελέγξτε αν η κυκλική αυτή τροχιά είναι ευσταθής, ασταθής ή αδιάφορη. Τι σημαίνει πρακτικά ως προς την εξέλιξη της τροχιάς αυτό;

Λύσεις

Θέμα Α:

1.
$$L = \frac{1}{2}m\vec{u}^2 + q\vec{A}\cdot\vec{u} - V(r) = \frac{1}{2}m\vec{u}^2 - \frac{e}{2}(\vec{B}\times\vec{r})\cdot\vec{u} - \frac{1}{2}k\vec{r}^2$$

αφού $V(r) = -\int \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int k\vec{r}\cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}k\vec{r}^2$.

2.
$$\begin{aligned} E &= \vec{p}\cdot\vec{u} - L \\ &= [m\vec{u} - \frac{e}{2}(\vec{B}\times\vec{r})]\cdot\vec{u} - \frac{1}{2}m\vec{u}^2 + \frac{e}{2}(\vec{B}\times\vec{r})\cdot\vec{u} - \frac{1}{2}k\vec{r}^2 \\ &= \frac{1}{2}m\vec{u}^2 + \frac{1}{2}k\vec{r}^2 \end{aligned}$$

Επομένως η ζητούμενη ποσότητα διατηρείται αφού το ολοκλήρωμα του Jacobi διατηρείται όταν η Λαγκρανζιανή δεν έχει εκπεφρασμένη εξάρτηση από το χρόνο. Πρόκειται για το άθροισμα κινητικής και δυναμικής ενέργειας. Το μαγνητικό πεδίο δεν εμφανίζεται αφού δεν προκαλεί αλλοίωση του μέτρου της ταχύτητας παρά μόνο στροφή αυτής.

3. Η εξίσωση κίνησης είναι

$$\frac{d}{dt}[m\vec{u} - \frac{e}{2}(\vec{B}\times\vec{r})] = \frac{\partial}{\partial\vec{r}}[-\frac{e}{2}(\vec{B}\times\vec{r})\cdot\vec{u} - \frac{1}{2}k\vec{r}^2]$$

Με αναδιατύπωση του τριπλού γινομένου $(\vec{B}\times\vec{r})\cdot\vec{u} = (\vec{u}\times\vec{B})\cdot\vec{r}$ οπότε

$$\frac{\partial}{\partial\vec{r}}[\ldots] = (-e/2)(\vec{u}\times\vec{B}) - k\vec{r}.$$

Έτσι καταλήγουμε στο ότι

$$\frac{d}{dt}[m\vec{u} - \frac{e}{2}(\vec{B}\times\vec{r})] + (e/2)\vec{u}\times\vec{B} + k\vec{r} = 0$$

Αν πολλαπλασιάσουμε τη σχέση αυτή με $(\vec{r}\times\vec{B})$ θα είναι

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}[m\vec{u} - \frac{e}{2}(\vec{B}\times\vec{r})]\cdot(\vec{r}\times\vec{B}) + (e/2)(\vec{u}\times\vec{B})\cdot(\vec{r}\times\vec{B}) + 0 \\ &= \frac{d}{dt}[m\vec{u} - \frac{e}{2}(\vec{B}\times\vec{r})]\cdot(\vec{r}\times\vec{B}) + \frac{d}{dt}[(e/2)(\vec{r}\times\vec{B})]\cdot(\vec{r}\times\vec{B}) \\ &= \frac{d}{dt}[m\vec{u} + \frac{e}{2}(\vec{r}\times\vec{B})]\cdot(\vec{r}\times\vec{B}) + [(e/2)(\vec{r}\times\vec{B})]\cdot\frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{B}) \\ &= \frac{d}{dt}[m\vec{u} + \frac{e}{2}(\vec{r}\times\vec{B})]\cdot(\vec{r}\times\vec{B}) + [m\vec{u} + (e/2)(\vec{r}\times\vec{B})]\cdot\frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{B}) \\ &= \frac{d}{dt}\left[[m\vec{u} + (e/2)(\vec{r}\times\vec{B})]\cdot(\vec{r}\times\vec{B})\right] \\ &= \frac{d}{dt}\left[m\vec{B}\cdot(\vec{u}\times\vec{r}) + (e/2)(\vec{r}\times\vec{B})\cdot(\vec{r}\times\vec{B})\right] \end{aligned}$$

Παραπάνω στο 3ο βήμα χρησιμοποιήθηκε η ορθογωνιότητα του $\vec{u}$ και του $\vec{u}\times\vec{B} = (d/dt)(\vec{r}\times\vec{B})$. Επομένως διατηρείται η ζητούμενη ποσότητα.

4. Λαμβάνοντας το εσωτερικό γινόμενο της εξίσωσης κίνησης με το $\vec{B}$ παίρνουμε

$$\frac{d^2}{dt^2}(m\vec{r}\cdot\vec{B}) + k\vec{r}\cdot\vec{B} = 0$$

Επομένως το εν λόγω εσωτερικό γινόμενο διέπεται από την εξίσωση του αρμονικού ταλαντωτή. Αν μάλιστα το σωματίδιο ήταν αρχικά ακίνητο θα είναι

$$\vec{r}(t)\cdot\vec{B} = (\vec{r}_0\cdot\vec{B})\cos(\sqrt{k/m}t)$$

Θέμα Β:

1. Επειδή θεωρούμε μικρές κινήσεις οι χαμηλότερης τάξης όροι στην κινητική ενέργεια οφείλονται στις οριζόντιες ταχύτητες που δεν είναι άλλο από $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ επομένως

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

Όσο για τη δυναμική αυτή είναι

$$\begin{aligned} V = mg[3a(1-\cos\phi_1)] + \\ mg[3a(1-\cos\phi_1) + 2b(1-\cos\phi_2)] + \\ mg[3a(1-\cos\phi_1) + 2b(1-\cos\phi_2) + c(1-\cos\phi_3)] \end{aligned} \quad (1)$$

όπου $\phi_{1,2,3}$ είναι οι γωνίες που σχηματίζουν το ανώτερο, μεσαίο και κατώτερο εκκρεμές αντίστοιχα. Όμως για μικρές γωνίες $\cos\phi \simeq 1 - \phi^2/2$ και $\phi \simeq \sin\phi =$ απέναντι/υποτείνουσα. Αναπτύσσοντας αναλόγως έχουμε

$$\begin{aligned} V &= mg[3\frac{3a}{2}\left(\frac{x}{3a}\right)^2 + 2\frac{2b}{2}\left(\frac{y-x}{2b}\right)^2 + c\frac{c}{2}\left(\frac{z-y}{c}\right)^2] \\ &= \frac{mg}{2}[\frac{x^2}{a} + \frac{(y-x)^2}{b} + \frac{(z-y)^2}{c}] \end{aligned}$$

2. Αναπτύσσοντας κινητική και δυναμική ενέργεια βλέπουμε από τους συντελεστές των διγραμμικών μορφών ταχυτήτων και συντεταγμένων ότι οι πίνακες είναι

$$\mathbf{M} = \mathbf{I}, \mathbf{K} = g\begin{pmatrix} 1/a+1/b & -1/b & 0 \\ -1/b & 1/b+1/c & -1/c \\ 0 & -1/c & 1/c \end{pmatrix}$$

3. Ψάχνουμε για κίνηση του εκκρεμούς της μορφής

$$\Psi(t) = \hat{\Psi}e^{i\omega t} = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ 0 \\ \hat{z} \end{pmatrix} e^{i\omega t}$$

Η κατάσταση αυτή θα πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση κίνησης

$$\mathbf{M}\ddot{\Psi} + \mathbf{K}\Psi = \mathbf{0}$$

Επομένως

$$\begin{aligned} \omega^2\mathbf{M}\hat{\Psi} &= \mathbf{K}\hat{\Psi} \Rightarrow \\ & \omega^2\hat{x} = g(1/a+1/b)\hat{x}, \\ & 0 = g(-1/b)\hat{x} + g(-1/c)\hat{z}, \\ & \omega^2\hat{z} = g(1/c)\hat{z} \end{aligned}$$

Από την πρώτη και τρίτη εξίσωση προκύπτει ότι $\omega^2 = g(1/a+1/b) = g/c$.

4. $\omega^2 = g/L$. Από τη δεύτερη εξίσωση συνάγουμε ότι $\hat{x}/b + \hat{z}/c = 0$. Επομένως $\hat{x} = -\hat{z}(b/c) = -2\hat{z}$. Επομένως ενώ η δεύτερη μάζα βρίσκεται στον κατακόρυφο άξονα, η τρίτη βρίσκεται σε αντίθετη θέση από την πρώτη και μάλιστα στη μισή απομάκρυνση.

Θέμα Γ:

1. Πρέπει η αγκύλη Poisson να είναι 1. Δηλαδή

$$\{Q, P\} = \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

2.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i}\dot{p}_i \\ &= \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} = \{F, H\} \end{aligned}$$

3.

$$\{F, H\} = \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0 - \sum \frac{\partial V}{\partial q_i}$$

Για να διατηρείται η F πρέπει η παραπάνω έκφραση να είναι 0, οπότε στη συνάρτηση V θα πρέπει όλες οι συντεταγμένες να εμφανίζονται σε ζεύγη ώστε κατά την άθροιση να φεύγουν. Ένα τέτοιο δυναμικό δεν δημιουργεί κατ' ανάγκη δυνάμεις νευτώνειου τύπου αφού για να είναι νευτώνειου τύπου πρέπει η δυναμική ενέργεια να είναι άθροισμα συναρτήσεων που η καθεμιά να είναι συνάρτηση μόνο μιας διαφοράς συντεταγμένων. Στο πρώτο παράδειγμα που ακολουθεί η δύναμη στο 1 εξαρτάται και από τη 2 και από την 3 συντεταγμένη και απομένως δεν είναι ίση και αντίθετη με τη δύναμη στο 2 ή στο 3. Αν κάποια διαφορά συντεταγμένων λείπει εξακολουθεί η ολική ορμή να διατηρείται.

4. $V = G(q_1 - q_2, q_2 - q_3, q_3 - q_1)$ όπου G τυχαία συνάρτηση τόσων μεταβλητών όσα είναι τα δυνατά ζεύγη συντεταγμένων. Π.χ. $V = (q_1 - q_2)(q_2 - q_3)(q_3 - q_1)$ ή $V = (q_1 - q_2) + 2(q_2 - q_3) + 3(q_3 - q_1)$.

Θέμα Δ:

1. Αφού η L δεν εξαρτάται από την θ (κυκλική μετραβλητή) θα διατηρείται η αντίστοιχη ορμή $\ell = \partial L/\partial\dot{\theta} = r^2\dot{\theta}$. Επομένως διατηρείται η $\ell = r^2\dot{\theta}$.

2. Η εξίσωση κίνησης είναι

$$\begin{aligned} 0 &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - \left(\frac{\mu}{r - 2m} - \frac{\mu r}{(r - 2m)^2}\right) \\ &= \ddot{r} - \frac{\ell^2}{r^3} + \frac{2m\mu}{(r - 2m)^2} \end{aligned}$$

Για να έχουμε κυκλική τροχιά ακτίνας R θα πρέπει $\ddot{r} = \dot{r} = 0$ οπότε

$$\frac{\ell^2}{R^3} = \frac{2m\mu}{(R - 2m)^2}$$

δηλαδή

$$\ell^2 = \frac{2m\mu R^3}{(R - 2m)^2}$$

3. Η στροφορμή ℓ^2 πηγαίνει σαν R για $R \to \infty$ και στο ∞ για $R \to 2m$. Με παραγώγιση βρίσκουμε ότι η ελάχιστη τιμή αυτής είναι

$$0 = \frac{d\ell^2}{dR} = \frac{6m\mu R^2}{(R - 2m)^2} - 2\frac{2m\mu R^3}{(R - 2m)^3}$$

δηλαδή για $R_0 = 6m$ οπότε $\ell^2_{\text{min}} = 27\mu m^2$.

4. Θεωρώντας τροχιές με $R = R_0 + \epsilon = 6m + \epsilon$ και $\ell^2 = 27\mu m^2$ η εξίσωση κίνησης θα είναι

$$\ddot{\epsilon} = \frac{27\mu m^2}{(6m+\epsilon)^3} - \frac{2m\mu}{(4m+\epsilon)^2} = \frac{\mu}{8m}\left[(1+\epsilon/(6m))^{-3} - (1+\epsilon/(4m))^{-2}\right]$$

Σε μηδενική και πρώτη τάξη ως προς ϵ το δεύτερο μέλος είναι 0, οπότε η ισορροπία είναι αδιάφορη. Δηλαδή στη νέα θέση θα παραμείνει εκτελώντας και πάλι κυκλική τροχιά (τουλάχιστον μέχρι να αρχίσουν να γίνονται σημαντικοί οι όροι της επόμενης τάξης).