ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Εξέταση στη Μηχανική ΙΙ

8 Ιουλίου 2013

ΘΕΜΑ Α [35 μόρια] Θεωρήστε τη Λαγκραντζιανή $L(x, \dot{x}, t)$ που εξαρτάται απο τη θέση x ενός σωματιδίου πάνω σε μια ευθεία, το χρόνο t, και την ταχύτητα $\dot{x}$ του σωματιδίου.

1. Γράψτε: (α) τον ορισμό της δράσης και την αρχή του Χάμιλτον που διέπει τις φυσικές κινήσεις, (β) το ορισμό της κανονικής (γενικευμένης) ορμής p, (γ) την εξίσωση Euler-Lagrange που διέπει τη φυσική κίνηση που αντιστοιχεί σε αυτή τη Λαγκραντζιανή και (δ) εξηγήστε για ποιο λόγο η Λαγκραντζιανή δεν εξαρτάται από παραγώγους του x ανώτερες της πρώτης.

2. Θεωρήστε τώρα μία φυσική διαδρομή η οποία διέρχεται από τα σημεία (t_1, x_1) και (t_2, x_2) με $x_2 > x_1$ και $t_2 > t_1$. Θεωρήστε επίσης τον μετασχηματισμό των σημείων του επιπέδου (t, x) της φυσικής διαδρομής: $(t, x) \to (t+\epsilon, x+\epsilon)$, όπου ϵ μια σταθερά. Σχεδιάστε τις δύο διαδρομές (τη φυσική και το μετασχηματισμό αυτής).

3. Δείξτε τώρα ότι η νέα δράση της μετασχηματισμένης διαδρομής είναι:
$$S(\epsilon) = \int_{t_1+\epsilon}^{t_2+\epsilon} L\left[x(\tau-\epsilon)+\epsilon, \dot{x}(\tau-\epsilon), \tau\right] d\tau = \int_{t_1}^{t_2} L\left[x(t)+\epsilon, \dot{x}(t), t+\epsilon\right] dt\,.$$

4. Θεωρώντας την ϵ ως μια συνεχή μεταβλητή, δείξτε, δεδομένου ότι η x είναι φυσική τροχιά, ότι:
$$\left.\frac{\partial S}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0} = \left.(p + L - p\dot{x})\right|_{t_1}^{t_2}.$$

5. Υποθέστε τώρα ότι ο συνεχής μετασχηματισμός, $(t, x) \to (t+\epsilon, x+\epsilon)$, αποτελεί συμμετρία της παραπάνω Λαγκραντζιανής και συνεπώς ικανοποιείται η παρακάτω σχέση:
$$\left.\frac{\partial S}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0} = 0\,.$$
Προσδιορίστε την ποσότητα που διατηρείται κατά τη φυσική κίνηση του σωματιδίου.

6. Δείξτε με προσοχή ότι ο μετασχηματισμός $(t, x) \to (t+\epsilon, x+\epsilon)$ αποτελεί πράγματι συμμετρία της ακόλουθης Λαγκραντζιανής:
$$L = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{(x-t)^2}{2}\,.$$
Από τη συμμετρία αυτή προκύπτει η διατηρούμενη ποσότητα του ερωτήματος [5].

7. Προσδιορίστε μια φυσική τροχιά του παραπάνω συστήματος που διέρχεται από το σημείο $(0, 0)$ και επιβεβαιώστε ότι πράγματι διατηρείται η ποσότητα που προσδιορίζεται στο ερώτημα [4]. [Υπ: Χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι $\ddot{t} = 0$.]

ΘΕΜΑ Β [25 μόρια] Ένα σωματίδιο μάζας m κρέμεται από ελαστικό κορδόνι μηδενικού φυσικού μήκους, αμελητέας μάζας και σταθεράς ελαστικότητας k, από ακλόνητο σημείο. Η μάζα βρίσκεται μέσα στο ομογενές βαρυτικό πεδιο της Γης έντασης g και μπορεί να κινείται μόνο στο κατακόρυφο επίπεδο $x - z$.

1. Βρείτε το σημείο ισορροπίας του σωματιδίου.

2. Κατασκευάστε τη Λαγκραντζιανή του σωματιδίου.

3. Γραμμικοποιήστε τη Λαγκρανζιανή γύρω από το σημείο ισορροπίας και βρείτε τις ιδιοσυχνότητες του συστήματος.

4. Ποια θα είναι η τροχιά του σωματιδίου, αν αυτό βρισκόταν αρχικά στο σημείο ανάρτησης και είχε ταχύτητα $\vec{v} = v_0\hat{x}$ (όπου x ο οριζόντιος άξονας);

5. Αν κάθε φορά που το σωματίδιο περνάει από την αρχική του θέση (το σημείο ανάρτησης) σβήνουμε και ανάβουμε εναλλάξ το βαρυτικό πεδίο (αρχικά είναι αναμμένο), ποια θα είναι η τροχιά του σωματιδίου; Σχεδιάστε τη, σημειώνοντας τις χρονικές στιγμές που περνά από τις διάφορες θέσεις.

ΘΕΜΑ Γ [40 μόρια] Σωματίδιο φορτίου q και μάζας m κινείται εντός ηλεκτρομαγνητικού πεδίου που χαρακτηρίζεται από το βαθμωτό δυναμικό $\phi(\vec{r}, t)$ και το ανυσματικό δυναμικό $\vec{A}(\vec{r}, t)$ Η Λαγκραντζιανή του σωματιδίου είναι:

$$L = \frac{m|\dot{\vec{r}}|^2}{2} - q(\phi - \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A})$$

1. Κατασκευάστε τη Χαμιλτονιανή του σωματιδίου.

2. Θεωρήστε ότι το πεδίο είναι ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο στον x άξονα και ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο στον z άξονα. Ένα τέτοιο πεδίο μπορεί να περιγραφεί από τα δυναμικά $\phi = -Ex$ και $\vec{A} = (0, Bx, 0)$. Θέτοντας τα πεδία αυτά στην Χαμιλτονιανή δείξτε με τη χρήση αγγυλών Poisson, ότι οι ποσότητες $G = \dot{y} + \omega x$, $F = \dot{x} - \omega y - (qE/m)t$, με $\omega = qB/m$, είναι σταθερές της κίνησης.

3. Αν αρχικά το σωματίδιο βρίσκεται ακίνητο στην αρχή των αξόνων, υπολογίστε τις τιμές αυτών των σταθερών. Στη συνέχεια παραγωγίστε την F ως προς χρόνο, χρησιμοποιήστε την σταθερότητα αυτής καθώς και την σταθερή τιμή της G που βρήκατε προηγουμένως, και υπολογίστε την $x(t)$. Τέλος, από τη σταθερότητα της G υπολογίστε και την $y(t)$.

4. Τώρα ξαναγράψτε τη Λαγκραντζιανή και τη Χαμιλτονιανή εκμεταλλευόμενοι την ελευθερία που υπάρχει στον ορισμό του βαθμωτού και του διανυσματικού δυναμικού:

$$\phi' = \phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \quad , \quad \vec{A}' = \vec{A} + \nabla \Lambda$$

όπου $\phi, \vec{A}$ είναι αυτά που χρησιμοποιήσατε στο ερώτημα [2] και ως Λ λάβετε τη βαθμωτή συνάρτηση $\Lambda = -Ext$ ώστε να σβήσετε εντελώς το βαθμωτό δυναμικό. Δείξτε ότι και πάλι καταλήγετε στη σταθερότητα των ποσοτήτων F, G του ερωτήματος [2].

5. Τώρα ξεκινώντας από την αρχή, ξανακατασκευάστε τη Λαγκραντζιανή και στη συνέχεια την Χαμιλτονιανή του φορτισμένου σωματιδίου για ένα σύστημα αναφοράς που κινείται κατά μήκος του άξονα y με ταχύτητα V, έτσι ώστε $x' = x$, $y' = y - Vt$, $z' = z$. Δείξτε ότι τώρα διατηρούνται οι ποσότητες $G' = \dot{y}' + \omega x'$ και $F' = \dot{x}' - \omega y' - (\omega V + qE/m)t$.

6. Επιλέξτε κατάλληλη τιμή της ταχύτητας V, ώστε να απλοποιήστε όσο το δυνατό την έκφραση της διατηρούμενης ποσότητας F' (μηδενίζοντας τον χρονοεξαρτημένο όρο). Τώρα βρείτε τις $x'(t)$ και $y'(t)$ χρησιμοποιώντας τις διατηρούμενες αυτές ποσότητες (όπως και στο ερώτημα [3]). Προσέξτε ότι στο σύστημα αυτό η αρχική ταχύτητα του σωματιδίου είναι $(0, -V, 0)$. Τι κίνηση εκτελεί το σωματίδιο στο σύστημα αυτό;

Καλό σας καλοκαίρι

Λύσεις

ΘΕΜΑ Α

1. (α) ... θεωρία, (β) $p = \partial L/\partial \dot{q}$, (γ) $d(\partial L/\partial \dot{q})/dt - \partial L/\partial q = 0$, (δ) Αν εξαρτιώταν από ανώτερες παραγώγους θα οδηγούσε σε εξισώσεις κίνησης τάξης μεγαλύτερης του 2 (που είναι η εξίσωση του Νεύτωνα).

2. Η φυσική διαδρομή (όποια κι αν είναι αυτή) που συνδέει αρχικά και τελικά σημεία του θεσεογραφικού χώρου, θα μετατοπιστεί παράλληλα στον εαυτό της συρόμενη κατά ϵ στο x και στο t.

3. $x' = x + \epsilon, t' = t + \epsilon, dx'/dt' = dx/dt$, οπότε

$$\begin{aligned}
S(\epsilon) &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} L(x', \dot{x}', \tau) d\tau \\
&= \int_{t_1+\epsilon}^{t_2+\epsilon} L(x(\tau - \epsilon) + \epsilon, \dot{x}(\tau - \epsilon), \tau) d\tau \\
&= \int_{t_1}^{t_2} L(x(t) + \epsilon, \dot{x}(t), t + \epsilon) dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x}, t) dt + \epsilon \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial L}{\partial t} \right)_{\epsilon=0} dt + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\
&= S(0) + \epsilon \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \frac{dL}{dt} - \ddot{x}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \dot{x}\frac{\partial L}{\partial x} \right)_{\epsilon=0} dt + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\
&= S(0) + \epsilon \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d}{dt}p + \frac{dL}{dt} - \ddot{x}p - \dot{x}\frac{dp}{dt} \right)_{\epsilon=0} dt + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\
&= S(0) + \epsilon (p + L - \dot{x}p)|_{t_1}^{t_2} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \qquad (1)
\end{aligned}$$

οπότε άμεσα προκύπτει το ζητούμενο.

5. Προφανώς διατηρείται η ποσότητα $p + L - p\dot{x}$.

6. Είναι άμεσο ότι ο μετασχηματισμός αφήνει αναλλοίωτη την L και επομένως δεν αλλάζει και την S.

7. Η εξίσωση κίνησης είναι

$$\ddot{x} = x - t \to \ddot{u} = u$$

όπου θέσαμε ως $u = x - t$. Η λύση είναι (για τη δεδομένη αρχική συνθήκη)

$$u(t) = x(t) - t = A \sinh t.$$

Η υποτιθέμενη διατηρούμενη ποσότητα είναι

$$\begin{aligned}
p + L - p\dot{x} &= \dot{x} + \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{(x-t)^2}{2} - \dot{x}^2 \\
&= \dot{x} - \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{(x-t)^2}{2} \\
&= A \cosh t + 1 - \frac{(A \cosh t + 1)^2}{2} + \frac{(A \sinh t)^2}{2} \\
&= 1 - (1/2) - (A^2/2)(\cosh^2 t - \sinh^2 t) = (1 - A^2)/2 \qquad (2)
\end{aligned}$$

η οποία είναι σταθερά (ανεξάρτητη του χρόνου).

ΘΕΜΑ Β

1. Το σημείο ισορροπίας είναι το $x_0 = 0, z_0 = -mg/k$.

2.
$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) - mgz - \frac{1}{2}k(x^2 + z^2).$$

3. Θέτοντας $\eta = x - x_0 = x$ και $\xi = z - z_0 = z + mg/k$:
$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m(\dot{\eta}^2 + \dot{\xi}^2) - mg(\xi - mg/k) - \frac{1}{2}k\left(\eta^2 + (\xi - mg/k)^2\right) \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{\eta}^2 + \dot{\xi}^2) - \frac{1}{2}k\left(\eta^2 + \xi^2\right) + \text{σταθ.} \end{aligned} \tag{3}$$

   Πρόκειται προφανώς για 2 αρμονικούς ταλαντωτές ίδιας συχνότητας $\omega = \sqrt{k/m}$.

4. $x(0) = 0, \dot{x}(0) = v_0, z(0) = 0, \dot{z}(0) = 0$ δηλαδή $\eta(0) = 0, \dot{\eta}(0) = v_0, \xi(0) = mg/k, \dot{\xi}(0) = 0$. Επομένως η λύση είναι
$$\begin{aligned} x(t) &= \eta(t) = (v_0/\omega)\sin\omega t \\ z(t) &= \xi - mg/k = (mg/k)(\cos\omega t - 1). \end{aligned}$$

   Πρόκειται για έλλειψη με ημιάξονες v_0/ω και mg/k.

5. Αφότου το σωματίδιο εκτελέσει μια πλήρη έλλειψη (διάρκειας $T = 2\pi/\omega$), το σωματίδιο επιστρέφει στο αρχικό σημείο με την αρχική ταχύτητα, το πεδίο σβήνει και το σωματίδιο εκτελεί μια ημιταλάντωση επί του άξονα x πλάτους v_0/ω και επιστρέφει στο αρχικό σημείο με ανάποδη τώρα ταχύτητα τη χρονική στιγμή $3T/2$. Στη συνέχεια διαγράφεται μια ανάποδης φοράς ίδια έλλειψη και ξαναεπιστρέφει στο αρχικό σημείο τη στιγμή $5T/2$. Μετά διαγράφεται μια ημιταλάντωση επί του άξονα $-x$ πλάτους v_0/ω και επιστρέφει στο αρχικό σημείο με ίδιες συνθήκες σαν την αρχική τη χρονική στιγμή $3T$. Ακολούθως επαναλαμβάνεται όλη η παραπάνω τροχιά.

ΘΕΜΑ Γ

1.
$$\frac{(p_x - qA_x)^2}{2m} + \frac{(p_y - qA_y)^2}{2m} + \frac{(p_z - qA_z)^2}{2m} + q\phi$$

2.
$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{(p_y - qBx)^2}{2m} - qEx.$$

   Είναι $G = \frac{p_y - qBx}{m} + \omega x$ και $F = \frac{p_x}{m} - \omega y - \frac{qE}{m}t$, οπότε
$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= \{G, H\} \\ &= \{\frac{p_y - qBx}{m} + \omega x, H\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \{\frac{p_y - qBx}{m}, \frac{p_x^2}{2m}\} + \{\omega x, \frac{p_x^2}{2m}\} \\
&= \{\frac{-qBx}{m}, \frac{p_x^2}{2m}\} + \{\omega x, \frac{p_x^2}{2m}\} \\
&= \omega\{x, \frac{p_x^2}{2m}\} + \omega\{x, \frac{p_x^2}{2m}\} = 0
\end{aligned} \tag{4}$$

(στους παραπάνω υπολογισμούς έχουμε κρατήσει μόνο τους όρους της Χαμιλτονιανής που δεν δίνουν εμφανώς μηδενικές αγγύλες Poisson),

$$\begin{aligned}
\frac{dF}{dt} &= \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t} \\
&= \{\frac{p_x}{m}, H\} - \omega\{y, H\} - \frac{qE}{m}\{t, H\} - \frac{qE}{m} \\
&= \{\frac{p_x}{m}, \frac{(p_y - qBx)^2}{2m} - qEx\} - \omega\{y, \frac{(p_y - qBx)^2}{2m}\} - 0 - \frac{qE}{m} \\
&= \frac{(p_y - qBx)}{m^2}\{p_x, -qBx\} - \frac{qE}{m}\{p_x, x\} - \omega\frac{(p_y - qBx)}{m}\{y, p_y\} - \frac{qE}{m} \\
&= \frac{(p_y - qBx)}{m}\omega + \frac{qE}{m} - \omega\frac{(p_y - qBx)}{m} - \frac{qE}{m} = 0
\end{aligned}$$

(όπου χρησιμοποιήθηκε η ιδιότητα: $q, f(p) = f'(p)$.) Επομένως οι 2 αυτές ποσότητες είναι σταθερές της κίνησης.

3. $G(t) = G(0) = 0 = F(0) = F(t)$. Έτσι $\dot{y} = -\omega x$ και

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{dF}{dt} \\
&= \ddot{x} - \omega\dot{y} - (qE/m) \\
&= \ddot{x} + \omega^2 x - (qE/m).
\end{aligned}$$

   Αυτή είναι εξίσωση αρμονικού ταλαντωτή με σταθερή δύναμη. Η λύση της είναι

$$x(t) = C\cos\omega t + S\sin\omega t + \frac{qE/m}{\omega^2}$$

   η οποία προκειμένου να ικανοποιεί τις συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες θα πρέπει $C = (qE)/(m\omega^2)$, $S = 0$. Έτσι

$$x(t) = \frac{qE}{m\omega^2}(1 - \cos\omega t).$$

   Όμοια

$$y(t) = -\omega\int_0^t x(t')dt' = -\frac{qE}{m\omega}\left(t - \frac{\sin\omega t}{\omega}\right).$$

   Εκτός από τους ταλαντωτικούς όρους φαίνεται ότι η κίνηση θα περιγράφεται από μια ομαλή κίνηση με ταχύτητα $-(qE)/(m\omega) = -E/B$ κατά μήκος του y άξονα.

4. Θα είναι $\phi' = 0$ και $\vec{A} = (-Et, Bx, 0)$.

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + q(-E\dot{x}t, Bx\dot{y})$$

και

$$H=\frac{(p_x+qEt)^2}{2m}+\frac{(p_y-qBx)^2}{2m}+\frac{p_z^2}{2m}$$

Τώρα

$$G=\frac{(p_y-qBx)}{m}+\omega x=p_y/m$$

και

$$F=\frac{(p_x+qEt)}{m}-\omega y-(qE/m)t=p_x/m-\omega y=\frac{p_y-qBx}{m}$$

(χωρίς άμεση χρονοεξάρτηση τώρα). Προφανώς $dG/dt=\{G,H\}=0$ αφού η H δεν έχει άμεση εξάρτηση από το y και

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dt}=\{F,H\} &= \{\frac{p_x-qBy}{m},\frac{(p_y-qBx)^2}{2m}\}\\ &= \frac{p_y-qBx}{m^2}\{p_x-qBy,p_y-qBx\}\\ &= \frac{p_y-qBx}{m^2}(-qB)\left[\{p_x,x\}+\{y,p_y\}\right]=0\end{aligned}$$

5.

$$L=\frac{m}{2}(\dot{x}'^2+(\dot{y}'+V)^2+\dot{z}^2)+qBx'(\dot{y}'+V)+qEx')$$

και

$$H=\frac{(p'_x)^2}{2m}+\frac{(p'_y-qBx')^2}{2m}+\frac{{p'_z}^2}{2m}-qEx'-Vp'_y.$$

Τώρα

$$G'=\dot{y}'+\omega x'=\frac{(p'_y-qBx')}{m}-V+\omega x'=\frac{p'_y}{m}-V$$

και

$$F'=\dot{x}'-\omega y'-(\omega V+qE/m)t=\frac{p'_x}{m}-\omega y'-(\omega V+qE/m)t=\frac{p'_x-qBy'}{m}-(\omega V+qE/m)t.$$

Έτσι

$$\begin{aligned}\frac{dG'}{dt} &= \{G',H\}\\ &= \{\frac{p'_y}{m},H\}=0\end{aligned}\qquad (5)$$

αφού η H δεν εξαρτάται από την y'. Ομοίως

$$\begin{aligned}\frac{dF'}{dt} &= \{F',H\}+\frac{\partial F'}{\partial t}\\ &= \{\frac{p'_x-qBy'}{m}-(\omega V+qE/m)t,H\}-(\omega V+qE/m)\\ &= \{\frac{p'_x-qBy'}{m},H\}-(\omega V+qE/m)\\ &= \{\frac{p'_x}{m},\frac{(p'_y-qBx')^2}{2m}-qEx'\}+\{\frac{-qBy'}{m},\frac{(p'_y-qBx')^2}{2m}-Vp'_y\}-(\omega V+qE/m)\\ &= \frac{(p'_y-qBx')}{m}\{p'_x/m,(-qB)x'\}-(qE/m)\{p'_x,x'\}+\\ &\quad \frac{(p'_y-qBx')}{m}\{(-qB/m)y',p'_y\}+(VqB/m)\{y',p'_y\}-(\omega V+qE/m)=0\end{aligned}$$

Επομένως και οι G', F' είναι σταθερές της κίνησης.

6. Θέτοντας $V = -(qE)/(m\omega) = -E/B$ η F' παίρνει πιο απλή μορφή. Από τις αρχικές συνθήκες γνωρίζουμε ότι $G'(t) = G'(0) = -V = E/B$ και $F'(t) = F'(0) = 0$. Εκτελώντας τις ίδιες πράξεις όπως και προηγουμένως θα έχουμε

$$\dot{y}' = E/B - \omega x'$$

και

$$\frac{dF'}{dt} = 0 = \ddot{x}' - \omega\dot{y}' = \ddot{x}' - \omega(E/B - \omega x') = \ddot{x}' + \omega^2 x' - \omega(E/B)$$

Παιρνουμε πάλι έναν αρμονικό ταλαντωτή με σταθερή δύναμη και ως λύση (για τις δεδομένες αρχικές συνθήκες) βρίσκουμε

$$x'(t) = \frac{E}{B\omega}(1 - \cos\omega t) = \frac{qE}{m\omega^2}(1 - \cos\omega t)$$

και

$$y'(t) = \int_0^t (E/B - \omega x'(t'))dt' = \frac{qE}{m\omega}\int_0^t (1 - 1 + \cos\omega t')dt' = \frac{qE}{m\omega^2}\sin\omega t.$$

Οι δύο παραπάνω εκφράσεις περιγράφουν ένα κύκλο στο επίπεδο $x-y$ με κέντρο το $(\frac{qE}{m\omega^2}, 0, 0)$ και ακτίνα $R = \frac{qE}{m\omega^2}$. Στο αρχικό λοιπόν σύστημα το σωματίδιο κινείται σε μια κυκλοειδή καμπύλη (ομαλή κυκλική+ ομαλή μεταφορική κίνηση στον y).