



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής
Πρόοδος στη Μηχανική Ι
Δεκέμβριος 2008

Τμήμα Π. Ιωάννου & Θ. Αποστολάτου

Φροντίστε να ξεκινήσετε το διαγώνισμα σε κάποια στιγμή που θα αισθάνεστε προετοιμασμένος/η και θα έχετε 2 ώρες ελεύθερες από οποιεσδήποτε οχλήσεις (κλείστε τα τηλέφωνα). Δουλέψτε το διαγώνισμα **μόνοι σας** και **χωρίς να συμβουλευτείτε κανένα ανάγνωσμα**. **Στο τέλος των 2 ωρών ακριβώς σταματήστε** το διαγώνισμα. Αν θέλετε να λύσετε και τα υπόλοιπα θέματα που δεν προλάβατε κάντε το αλλά σε ξεχωριστό φύλλο εργασίας. Αντιπαραβάλετε τις απαντήσεις σας (των 2 ωρών) με τις απαντήσεις που σας έχουμε βάλει στο σχετικό σύνδεσμο και βαθμολογήστε τις.

Διάρκεια 2 ώρες

Καλή επιτυχία

Όταν είστε έτοιμοι γυρίστε σελίδα... ⇨

Απαντήστε και στα 3 θέματα με σαφήνεια και απλότητα. Διάρκεια διαγωνίσματος 2 ώρες.

ΘΕΜΑ Α Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται σε μονοδιάστατο δυναμικό της μορφής $V_n(x) = ax^{2n}$ όπου a κάποιος θετικός αριθμός και n κάποιος φυσικός αριθμός (1,2, ...).

1. Να βρεθούν τα όρια κίνησης του σωματιδίου, δεδομένης της ενέργειάς του.
2. Να υπολογιστεί η εξάρτηση της περιόδου από την ενέργεια. (Δεν χρειάζεται να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα που δίνει την περίοδο).
3. Για ποια τιμή του n η ταλάντωση είναι ισόχρονη (ανεξάρτητη της ενέργειας);
4. Σχεδιάστε τις καμπύλες κίνησης στο χώρο των φάσεων για κάποια τιμή του n , και υπολογίστε τα σημεία τομής της καμπύλης με τους άξονες x και \dot{x} .
5. Ένα τέτοιο κλειστό χωρίο έχει εμβαδόν ανάλογο του μήκους του (διάσταση χωρίου κατά μήκος του x) επί του πλάτους του (διάσταση χωρίου κατά μήκος του \dot{x}). (Ο συντελεστής αναλογίας εξαρτάται από την ακριβή μορφή της καμπύλης αλλά δεν είναι άλλος από έναν απλό αριθμητικό παράγοντα.) Υπολογίστε την περίοδο της ταλάντωσης για άλλη μια φορά παραγωγίζοντας το εμβαδόν του χωρίου ως προς την ενέργεια για να ξανακαταλήξετε στο αποτέλεσμα του ερωτήματος (2).
6. Με βάση το αποτέλεσμα του προηγούμενου ερωτήματος ελέγξτε τη σχέση μεταξύ της περιόδου στο δοσμένο δυναμικό V_n και στο αντίστοιχο δυναμικό \tilde{V}_n που προκύπτει αν η περιοχή των αρνητικών x του V_n απαγορευτεί με την τοποθέτηση κάποιου ανακλαστικού τοιχώματος ώστε το σωματίδιο να κινείται μόνο στα θετικά x .

ΘΕΜΑ Β Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται σε μία διάσταση υπό την επίδραση ενός αρμονικού ταλαντωτή συχνότητας ω_0 χωρίς απόσβεση. Στο σωματίδιο ασκείται εξωτερική δύναμη της μορφής:

$$F(t) = F_1 \cos(\omega t) + F_2 \cos(2\omega t) + F_3 \cos(3\omega t)$$

δηλαδή μια περιοδική δύναμη με τρεις αρμονικές τέτοιες ώστε $k\omega \neq \omega_0$ για κάθε $k = 1, 2, 3$.

1. Γράψτε την εξίσωση που διέπει την κίνηση του ταλαντωτή.
2. Γράψτε την ομογενή λύση αυτής.
3. Βρείτε μια ειδική λύση αυτής.
4. Αν το σωματίδιο είναι αρχικά ακίνητο στη θέση ισορροπίας του υπολογίστε την μετέπειτα κίνηση αυτού.
5. Αν κάποια από τις αρμονικές της δύναμης (η k -οστή) έχει την ιδιότητα $k\omega = \omega_0$ (ισχύει και στα ακόλουθα ερωτήματα), δείξτε ότι για μεγάλους χρόνους t το σωματίδιο θα κινείται με γραμμικά αυξανόμενο πλάτος.
6. Συγκριτικά με ποια ποσότητα πρέπει το t να είναι μεγάλο για να θεωρούμε ότι αυξάνεται γραμμικά το πλάτος;
7. Αν $F_1 = F_2 = F_3$ ο ρυθμός αύξησης του πλάτους εξαρτάται από το ποιο είναι το k για το οποίο ισχύει $k\omega = \omega_0$; Με άλλα λόγια οι ραδιοφωνικοί σταθμοί ακούγονται πιο δυνατά αν βρίσκονται στις υψηλότερες ή στις χαμηλότερες συχνότητες;

Για ευκολία δίδεται η τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\cos(\Omega t) - \cos(\omega_0 t) = -2 \sin\left(\frac{\Omega + \omega_0}{2} t\right) \sin\left(\frac{\Omega - \omega_0}{2} t\right)$$

η οποία όμως δεν χρειάζεται οπωσδήποτε να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση των ερωτημάτων.

συνεχίζεται... \mapsto

ΘΕΜΑ Γ Έστω δύο διανύσματα στο επίπεδο (2-διαστάσεις) το $\vec{a} = (a_x, a_y)$ και το $\vec{b} = (b_x, b_y)$ (a_x, b_x, a_y, b_y είναι οι καρτεσιανές x, y συντεταγμένες αυτών). Ελέγξτε αν τα ακόλουθα μεγέθη παριστάνουν **βαθμωτό μέγεθος, διάνυσμα, ή τίποτε**. Αν δεν παριστάνουν τίποτε, δώστε ένα παράδειγμα μετασχηματισμού που καθιστά το μέγεθος μη βαθμωτό και μη διάνυσμα.

1. $a_x b_x + a_y b_y$.
2. $(a_x - b_x, a_y - b_y)$.
3. a_x .
4. (a_x, b_y) .
5. $a_x b_y - a_y b_x$.

ΤΕΛΟΣ