ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Συχνά λάθη φοιτητών στη Μηχανική Ι (2008)

Π. Ιωάννου & Θ. Αποστολάτου

Οι ακόλουθες σημειώσεις γράφτηκαν για να διορθώσουν (όσο αυτό είναι δυνατό) επαναλαμβανόμενα σφάλματα και παρανοήσεις των φοιτητών σε βασικά προβλήματα που σχετίζονται με το μάθημα της Μηχανικής Ι. Το κείμενο θα ανανεώνεται κάθε φορά που αντιλαμβανόμαστε ένα καινούργιο σκοτεινό σημείο και ως εκ τούτου τα διάφορα προβλήματα που αναλύονται δεν θα βρίσκονται σε μια ορθολογική σειριακή σχέση μεταξύ τους.

1. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε καταλήξει στην ακόλουθη εξίσωση

$$\frac{d^2}{dt^2}(\vec{B}\cdot\vec{r}) + \omega^2(\vec{B}\cdot\vec{r}) = 0,$$

όπου $\vec{r}$ είναι το διάνυσμα θέσης ενός σωματιδίου και $\vec{B}$ είναι κάποιο σταθερό διάνυσμα (π.χ. κάποιο ομογενές μαγνητικό πεδίο). Καταρχήν σημειώνουμε ότι η παραπάνω διαφορική εξίσωση δεν είναι διανυσματική αλλά αναφέρεται στο βαθμωτό μέγεθος $(\vec{B}\cdot\vec{r})$. Έστω ότι αρχικά ($t = 0$) γνωρίζουμε ότι $(\vec{B}\cdot\vec{r}(0)) = 0$. Αυτό **ΔΕΝ** σημαίνει ότι μπορούμε να αγνοήσουμε από την παραπάνω διαφορική εξίσωση τον όρο $(\vec{B}\cdot\vec{r})$ και να καταλήξουμε στο

$$\frac{d^2}{dt^2}(\vec{B}\cdot\vec{r}) = 0.$$

Το μόνο που μπορούμε να πούμε τότε είναι ότι η αντίστοιχη επιτάχυνση είναι 0 **αρχικά**. Αν η ταχύτητα του βαθμωτού μεγέθους $(\vec{B}\cdot\dot{\vec{r}}(0))$ δεν είναι μηδενική τότε η ποσότητα $(\vec{B}\cdot\vec{r})$ θα αλλάξει την αμέσως επόμενη χρονική στιγμή και επομένως η επιτάχυνση θα πάψει να είναι 0.

Η διαφορική εξίσωση που έχουμε να λύσουμε είναι αυτή ενός αρμονικού ταλαντωτή, επομένως η γενική λύση θα είναι

$$(\vec{B}\cdot\vec{r}(t)) = A\cos\omega t + C\sin\omega t.$$

Αν αρχικά $(\vec{B}\cdot\vec{r}(0)) = 0$ αυτό συνεπάγεται ότι ο συντελεστής A είναι 0 και επομένως

$$(\vec{B}\cdot\vec{r}(t)) = C\sin\omega t.$$

Επομένως ανάλογα με την αρχική ταχύτητα της βαθμωτής ποσότητας, αυτή θα εκτελέσει μια ημιτονοειδή ταλάντωση (το σωματίδιο θα εκτελεί ταλαντώσεις παράλληλα με τις δυναμικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου – ενώ κάθετα σε αυτό δεν γνωρίζουμε τι θα κάνει).

Αν επιπλέον είναι και $(\vec{B}\cdot\dot{\vec{r}}(0)) = 0$ τότε και $C = 0$ και επομένως συνεχώς η προβολή της θέσης του σωματιδίου στο μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$ θα είναι μηδενική, δηλαδή το σωματίδιο θα κινείται μόνο κάθετα στο μαγνητικό πεδίο, με άλλα λόγια θα εκτελεί επίπεδη κίνηση.

2. Μια διαφορική εξίσωση γραμμική με σταθερούς συντελεστές (ακόμη και αν αυτοί είναι μιγαδικοί) της μορφής

$$a_n\frac{d^n}{dx^n}y + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}y + \ldots + a_1\frac{d}{dx}y = 0$$

έχει λύσεις της μορφής $y(x) = y_0 e^{\lambda x}$. Ο συντελεστής λ είναι μια από τις λύσεις του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots a_1 = 0$. Το γεγονός αυτό γίνεται καθαρό αν αντικαταστήσουμε την προταθείσα λύση στη διαφορική εξίσωση. Το πολυώνυμο αυτό έχει n λύσεις $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ στο σώμα των μιγαδικών αριθμών. Η γενική λύση λοιπόν της διαφορικής εξίσωσης (όντας γραμμική η εξίσωση ισχύει η αρχή της επαλληλίας) είναι

$$y(x) = A_1 e^{\lambda_1 x} + A_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + A_n e^{\lambda_n x}.$$