ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Μηχανική Ι

5 Νοεμβρίου 2014

Τμήμα Θ. Αποστολάτου & Π. Ιωάννου

Σχόλιο περί της σταθερότητας σάρωσης των εμβαδών στην αριθμητική ολοκλήρωση (αριθμητική εποιβεβαίωση του 2ου νόμου του Kepler).

Στο μάθημα δείξαμε ότι η αριθμητική ολοκλήρωση κατά Euler ακολουθεί τον αλγόριθμο

$$\mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i + \mathbf{v}_i\delta$$
$$\mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{v}_i + \mathbf{a}_i\delta$$

όπου και οι θέσεις οι επιταχύνσεις και οι ταχύτητες με δείκτη i αναφέρονται στην ίδια χρονική στιγμή $t = i\delta$.

Επομένως το i-στό εμβαδό τριγώνου θα είναι

$$\mathcal{E}_i = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \mathbf{r}_i \\ \mathbf{r}_{i+1} \end{vmatrix}$$

(το μισό του απαραλληλογράμμου που σχηματίζουν τα $\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_{i+1}$) όπου με το σύμβολο $|\ldots|$ εννοούμε την ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}.$$

Προτιμήσαμε να εκφράσουμε τα εμβαδά στη μορφή των αριζουσών αντί ενός εξωτερικού γινομένου για να είναι πιο άμεσα υλοποιήσιμος ο υπολογισμός των εμβαδών σε ένα κώδικα, αλλά και για να αποφύγουμε φορμαλιστικές ανησυχίες σχετικά με το τι ακριβώς αντικείμενο είναι ένα εξωτερικό γινόμενο και πως θα το παραστήσουμε αριθμητικά (περισσότερα σχόλια γι΄αυτό στη διάλεξη τη σχετική με τα διανύσματα).

Στην ακόλουθη συζήτηση θα χρησιμοποιηθεί η ιδιότητα των οριζουσών σύμφωνα με την οποία η πρόσθεση σε μια γραμμή (ή στήλη) οποιουδήποτε γραμμικού συνδυασμού των υπολοίπων αφήνει την ορίζουσα απαράλλαχτη. Έτσι για παράδειγμα

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b}+\lambda\mathbf{a} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{vmatrix}.$$

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι ότι η αριθμητική ολοκλήρωση της βαρυτικής δύναμης κατά Euler δεν κρατάει απολύτως σταθερό το εμβαδόν των διαδοχικών τριγώνων. Θα είναι

$$\mathcal{E}_i + 1 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \mathbf{r}_{i+1} \\ \mathbf{r}_{i+2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \mathbf{r}_i + \mathbf{v}_i\delta \\ \mathbf{r}_{i+1} + \mathbf{v}_{i+1}\delta \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} \mathbf{r}_i \\ \mathbf{r}_{i+1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{v}_i\delta \\ \mathbf{r}_{i+1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{r}_i \\ \mathbf{v}_{i+1}\delta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{v}_i\delta \\ \mathbf{v}_{i+1}\delta \end{vmatrix}\right) =$$
$$\mathcal{E}_i + \frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} \mathbf{v}_i\delta \\ \mathbf{r}_i + \cancel{\mathbf{v}_i\delta} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{r}_i \\ (\mathbf{v}_i + \cancel{\mathbf{a}_i\delta})\delta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{v}_i\delta \\ (\cancel{\mathbf{v}_i} + \mathbf{a}_i\delta)\delta \end{vmatrix}\right). \quad (1)$$

Οι διαγραφές των όρων στηρίζονται στην προαναφερθείσα ιδιότητα των οριζουσών και στο γεγονός ότι η βαρυτική επιτάχυνση έχει τη μορφή $\mathbf{a} = -\mathbf{r}/r^3$ (δηλαδή το ότι η δύναμη είναι κεντρική και ΟΧΙ ότι έχει τη συγκεκριμένη μορφή αντιστρόφου τετραγώνου). Τελικά θα έχουμε

$$\mathcal{E}_i + 1 = \mathcal{E}_i + \frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} \mathbf{v}_i\delta \\ \mathbf{r}_i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{r}_i \\ \mathbf{v}_i\delta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{v}_i\delta \\ (\mathbf{a}_i\delta)\delta \end{vmatrix}\right) \quad (2)$$

Οι δύο πρώτοι όροι εντός της παρένθεσης αλληλοαναιρούνται (έχοντας σε αντίστροφες γραμμές τις θέσεις και τις ταχύτητες), οπότε

$$\mathcal{E}_{i+1} = \mathcal{E}_i + \delta^3\begin{vmatrix} \mathbf{v}_i \\ \mathbf{a}_i \end{vmatrix}. \quad (3)$$

Η τελευταία ορίζουσα δεν μηδενίζεται παρά ισούται με

$$\begin{vmatrix} \mathbf{v}_i \\ -\mathbf{r}_i/(r_i)^3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\delta}\begin{vmatrix} \mathbf{r}_i + \mathbf{v}_i\delta \\ -\mathbf{r}_i/(r_i)^3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\delta(r_i)^3}\begin{vmatrix} \mathbf{r}_{i+1} \\ -\mathbf{r}_i \end{vmatrix} = \frac{1}{\delta(r_i)^3}\begin{vmatrix} \mathbf{r}_i \\ \mathbf{r}_{i+1} \end{vmatrix} = \frac{1}{\delta(r_i)^3}\mathcal{E}_i. \tag{4}$$

Συνολικά λοιπόν

$$\mathcal{E}_{i+1} = \mathcal{E}_i\left(1 + \frac{\delta^2}{(r_i)^3}\right)$$

και κατά τον αριθμητικό υπολογισμό το εμβαδόν συνεχώς θα αυξάνεται.

Στην ολοκλήρωση σύμφωνα με την ιδέα του Feynman

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{i+1} &= \mathbf{r}_i + \mathbf{v}_i\delta \\ \mathbf{v}_{i+1} &= \mathbf{v}_i + \mathbf{a}_{i+1}\delta \end{aligned}$$

(προσέξτε την αλλαγή της επιτάχυνσης σε σχέση με του Euler) όπου και οι θέσεις και οι επιταχύνσεις με δείκτη i αναφέρονται στη χρονική στιγμή $t = i\delta$, ενώ οι ταχύτητες με δείκτη i αναφέρονται στη χρονική στιγμή $t = i\delta + \delta/2$. Στην αλλαγμένη αυτή αρίθμηση οφείλεται και ο δείκτης $i+1$ της επιτάχυνσης που προωθεί την ταχύτητα.

Επαναλαμβάνοντας την έκφραση 1 (τη δεύτερη σειρά όπου πρωτοεμφανίζεται η επιτάχυνση) για τη νέα αυτή ολοκλήρωση θα έχουμε

$$\mathcal{E}_{i+1} = \mathcal{E}_i + \frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} \mathbf{v}_i\delta \\ \mathbf{r}_i + \cancel{\mathbf{v}_i\delta} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{r}_i \\ (\mathbf{v}_i + \mathbf{a}_{i+1}\delta)\delta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{v}_i\delta \\ (\cancel{\mathbf{v}_i} + \mathbf{a}_{i+1}\delta)\delta \end{vmatrix}\right). \tag{5}$$

όπου τώρα δεν διώξαμε στον 2ο όρο την επιτάχυνση όπως προηγουμένως. Έτσι

$$\mathcal{E}_{i+1} = \mathcal{E}_i + \frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} \mathbf{v}_i\delta \\ \mathbf{r}_i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{r}_i \\ \mathbf{v}_i\delta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{r}_i \\ (\mathbf{a}_{i+1}\delta)\delta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{v}_i\delta \\ (\mathbf{a}_{i+1}\delta)\delta \end{vmatrix}\right). \tag{6}$$

Οι 2 πρώτες ορίζουσες αλληλοαναιρούνται και οι 2 τελευταίες αθροίζονται στην

$$\begin{vmatrix} \mathbf{r}_{i+1} \\ (\mathbf{a}_{i+1}\delta)\delta \end{vmatrix} \tag{7}$$

η οποία μηδενίζεται ταυτοτικά αφού $\mathbf{a}_{i+1} \parallel \mathbf{r}_{i+1}$. Συνεπώς σην ολοκλήρωση a la Feynman τα εμβαδά διατηρούνται ακριβώς.