ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Μηχανική Ι

12 Φεβρουαρίου 2015

Τμήμα Θ. Αποστολάτου & Π. Ιωάννου

Σχόλιο περί των αστρόβιλων πεδίων.

Ας θεωρήσουμε τα πεδία

$$\mathbf{F}_1 = \hat{r}/r^2 \text{ και } \mathbf{F}_2 = \hat{\theta}/r \tag{1}$$

σε έναν δισδιάστατο χώρο.

Δεν είναι δύσκολο να δούμε αν κατασκευάσουμε τις μορφές αυτών των πεδίων σε καρτεσιανές συντεταγμένες

$$\mathbf{F}_1 = \frac{(x, y)}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \text{ και } \mathbf{F}_2 = \frac{(-y, x)}{x^2 + y^2} \tag{2}$$

ότι έχουν μηδενικό στροβιλισμό παντού όπου αυτά ορίζονται. Παρόλ' αυτά γνωρίζουμε ότι το πρώτο είναι ένα συντηρητικό πεδίο ενώ το δεύτερο όχι, αφού αν υπολογίσουμε το $\oint \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}$ κατά μήκος κάποιας κλειστής διαδρομής που περιελίσσεται γύρω από την αρχή των αξόνων το αποτέλεσμα θα είναι μη μηδενικό (για την ακρίβεια θα είναι 2π επί το πλήθος των περιελίξεων της κλειστής καμπύλης).

Συνήθως αναφέρεται το δεύτερο πεδίο ως χαρακτηριστικό παράδειγμα πεδίου το οποίο παρόλο που έχει στροβιλισμό 0 (εδώ, στις 2 διαστάσεις, ο στροβιλισμός είναι αριθμός και όχι διάνυσμα), δεν είναι συντηρητικό με το επιχείρημα ότι το πεδίο δεν ορίζεται στο 0 και επομένως υπάρχει "τρύπα" στο χώρο ορισμού του επομένως δεν είναι ακριβές ότι ο στροβιλισμός είναι 0 *παντού*. Είναι 0 σε ένα μη συνεκτικό χώρο και επομένως αυτό δεν είναι αρκετό για να είναι το πεδιο συντηρητικό.

Θα μπορούσε όμως κάποιος να παρατηρήσει ότι και το πρώτο πεδίο δεν ορίζεται στο 0 (το πεδίο ορισμού του έχει τρύπα), αλλά αυτό είναι συντηρητικό. Όποια κλειστή διαδρομή και να θεωρήσουμε, είτε αυτή τυλίγεται γύρω από την αρχή είτε όχι το έργο είναι 0. Τι διαφορετικό έχουν αυτές οι 2 περιπτώσεις;

Ας δούμε αν αυτά τα δύο πεδία μπορούν να προκύψουν από κάποιο δυναμικό (μαντεύοντας τη λύση):

$$\mathbf{F}_1 = -\boldsymbol{\nabla} V_1(r, \theta) = -\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) \text{ και } \mathbf{F}_2 = -\boldsymbol{\nabla} V_2(r, \theta) = -\boldsymbol{\nabla}(-\theta). \tag{3}$$

Στην παραπάνω κατασκευή χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι σε πολικές συντεταγμένες το ανάδελτα έχει τη μορφή

$$\boldsymbol{\nabla} f(r, \theta) = \hat{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}.$$

Και τα δύο μοιάζουν να απορρέουν από απλά, συναρτησιακά, δυναμικά, επομένως μήπως είναι συντηρητικά; Το πρώτο σίγουρα ναι γιατί καθώς τρέχουμε κατά μήκος μιας ακτίνας προχωράμε προς χαμηλώτερο δυναμικό χωρίς ποτέ να τμήσουμε κάποια άλλη ακτινική γραμμή πεδίου. Το δεύτερο όμως πεδίο ενώ κατηφορίζει σε χαμηλώτερα δυναμικά, αφού μια γραμμή του διαγράψει έναν κύκλο, συναντά τον εαυτό της και επομένως ξαναανυψώνεται το δυναμικό της σαν τα παραπλανητικά σχέδια του Escher. Από πλευράς δυναμικού η γωνία ταυτίζεται με τον εαυτό της όταν προστεθεί το 2π οπότε το δυναμικό παρουσιάζει ασυνέχειες.

Ίσως πιο κατανοητό και ξεκάθαρο θα ήταν το εξής παράδειγμα: Φανταστείτε έναν άπειρο κύλινδρο (2D επιφάνεια και πάλι). Ένα ομογενές πεδίο το οποίο κατευθύνεται σε όλη την επιφάνεια του κυλίνδρου και έχει διεύθυνση κατά μήκος του άξονα του κυλίνδρου θα ήταν και αστρόβιλο και συντηρητικό. Αν όμως είχε κατεύθυνση κατά μήκος ενός κύκλου κάθετου στον άξονα θα ήταν αστρόβιλο αλλά μη συντηρητικό. Μια κλειστή διαδρομή η οποία θα περιελισσόταν στον κύλινδρο θα οδηγούσε σε μη μηδενικό έργο. Μετά από μια πλήρη στροφή η γωνία θα μεγάλωνε, αλλά η διαφορετική αυτή γωνία θα περιέγραφε το ίδιο σημείο. Τέλος αν οι γραμμες του πεδίου ακολουθούσαν έλικες σταθερού βήματος επί του κυλίνδρου, πάλι το πεδίο θα ήταν αστρόβιλο αλλά μη συντηρητικό (σκεφθείτε το έργο κατά μήκος ενός κύκλου κάθετου στον άξονα). Το δυναμικό θα μεγάλωνε σαν γραμμικός συνδυασμός της γωνίας περιστροφής και της μετατόπισης παράλληλα στον άξονα. Αφού όμως η γωνία δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένη [((z,θ) και $(z,\theta+2\pi)$ περιγράφει την ίδια θέση], το δυναμικό δεν θα ήταν καλά ορισμένο. Προσέξτε ότι στην περίπτωση αυτή οι γραμμές του πεδίου (οι έλικες) δεν τέμνονται μεταξύ τους. Επομένως ούτε αυτό το στοιχείο (η μη τομή) καθορίζει την συντηρητικότητα.

Συνολικά θα μπορούσαμε να πούμε ότι όταν ο χώρος έχει τρύπα (ή τρύπες) η τοπολογία του πεδίου σχετικά με τις τρύπες καθορίζει την συντηρητικότητα. Αν οι γραμμές του πεδίου περιελίσσονται με οποιονδήποτε τρόπο γύρω από μια τρύπα τότε το πεδίο αν και αστρόβιλο είναι *μη συντηρητικό*.