Από το δυναμικό ενός σφαιρικού κελύφους στο δυναμικό μιας σφαιρικά συμμετρικής κατανομής μάζας

Το δυναμικό στο σημείο $\vec{x}$ απο μία συνεχή χωροεξαρτώμενη κατανομή πυκνότητας ρ είναι

$$\phi(\vec{x}) = -G \int \frac{\rho(\vec{x}')d^3x'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \ .$$

Το ολοκλήρωμα αυτό είναι ένα τριπλό ολοκλήρωμα και υπολογίζετε σε όλο τον χώρο (η συμβολή στο ολοκλήρωμα από τις περιοχές που η πυκνότητα είναι μηδενική είναι προφανώς μηδενική, και οι περιοχές αυτές μπορούν να εξαιρεθούν απο την ολοκλήρωση). (Θυμηθείτε επίσης τη συζήτηση για τη συγκλιση αυτού του ολοκληρώματος). Η δύναμη που ασκείται σε μάζα m που βρίσκεται στο σημείο $\vec{x}$ είναι:

$$\vec{F} = -m\vec{\nabla}\phi(\vec{x}) \ .$$

Στη περίπτωση ένος ομογενούς σφαιρικού κελύφους ακτίνας a και μάζας $dM(a)$, το δυναμικό σε απόσταση r από το κέντρο του σφαιρικού κελύφους είναι για $r \geq a$

$$\phi(r) = -\frac{GdM(a)}{r}$$

και για $r < a$

$$\phi(r) = -\frac{GdM(a)}{a}$$

Όταν έχουμε μία συνεχή κατανομή κελύφων το δυναμικό είναι το άθροισμα των δυναμικών απο κάθε κέλυφος. Αν είναι $r \geq a$ όλα τα δυναμικά απο τα κελύφη συμβάλουν κατά

$$d\phi(r) = -\frac{GdM(r')}{r}$$

όπου $dM(r') = 4\pi r'^2 \rho(r')dr'$ είναι η μάζα του κελύφους που βρίσκεται σε απόσταση $r' \leq a$ από το κέντρο της σφαίρας. Συνεπώς αν η απόσταση του σημείου απο το κέντρο είναι $r \geq a$ το δυναμικό στο σημείο αυτό απο τη σφαιρική κατανομή είναι:

$$\phi(r) = -\int_0^a \frac{GdM(r')}{r} = -\frac{GM(a)}{r}$$

όπου $M(a) = \int_0^a 4\pi r'^2 \rho(r')dr'$ είναι η ολική μάζα της σφαίρας.

Αν όμως το σημείο βρίσκεται μέσα στη σφαίρα ($r < a$) τα κελύφη που βρίσκονται σε απόσταση $r' < r$ συμβάλλουν κατα

$$d\phi(r) = -\frac{GdM(r')}{r} \ ,$$

ενώ τα κελύφη με $r' > r$ συμβάλλουν κατά

$$d\phi(r) = -\frac{GdM(r')}{r'} \ .$$

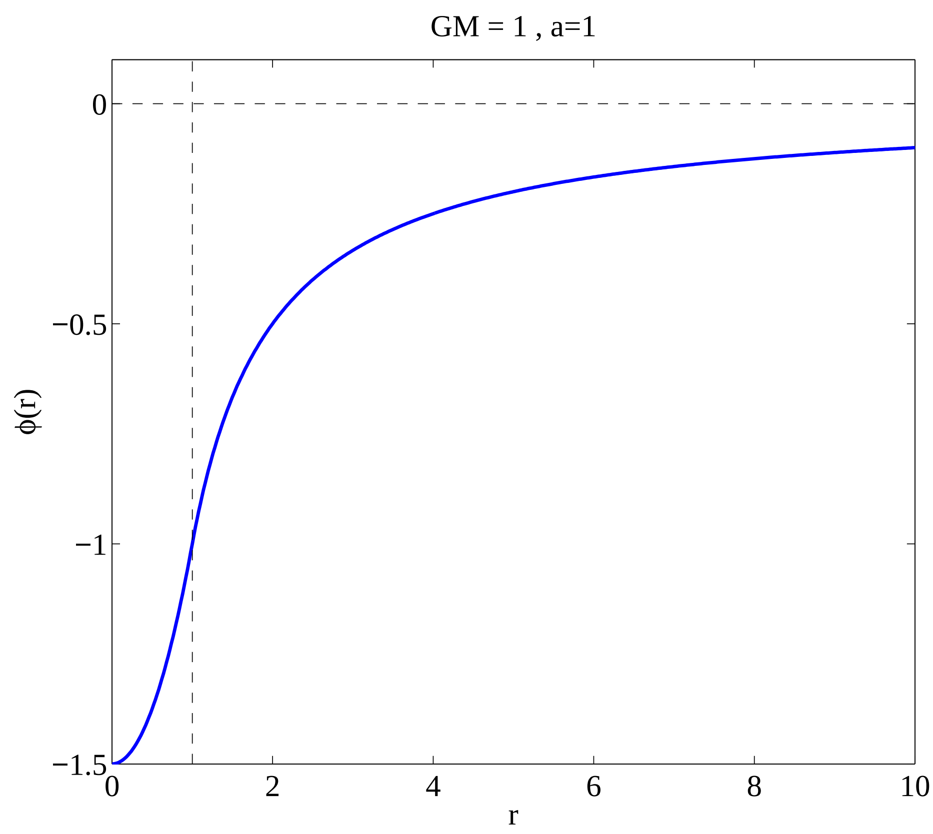
Συνεπώς, το ολικό δυναμικό είναι

$$\phi(r) = -\int_0^r \frac{GdM(r')}{r} - \int_r^a \frac{Gdm(r')}{r'}$$

ή

$$\phi(r) = -\frac{GM(r)}{r} - \int_r^a \frac{G4\pi\rho(r')r'^2 dr'}{r'}$$

όπου $M(r) = \int_0^a r 4\pi r'^2 \rho(r') dr'$ η μάζα της σφαίρας ακτίνας r.



Σχήμα 1: Το δυναμικό μίας ομογενούς σφαίρας σταθερής πυκνότητας, μάζας M και ακτίνας $a = 1$. Μέσα στη σφαίρα το δυναμικό είναι παραβολικό. Εχει ληφθεί $GM = 1$.

Απο την έκφραση αυτού του δυναμικού δείξτε τώρα ότι η δύναμη που ασκείται σε μάζα m που βρίσκεται σε απόσταση $r = |\vec{x}| < a$ απο το κέντρο είναι:

$$\vec{F} = -\frac{GmM(r)}{r^2}\hat{\vec{r}},$$

όπου $\hat{\vec{r}} = \vec{x}/|\vec{x}|$ το μοναδιαίο ακτνικό διάνυσμα. Στη περίπτωση που η πυκνότητα είναι σταθερή $\rho = \bar{\rho}$ και η συνολική μάζα της σφαίρας είναι M, δείξτε ότι το δυναμικό μέσα στη σφαίρα $r < a$ είναι:

$$\phi(r) = -\frac{GM}{2a^3}(3a^2 - r^2)\ ,$$

δηλαδή είναι ένα δυναμικό ευσταθούς αρμονικού ταλαντωτή, ενω έξω απο τη σφαίρα για $r > a$ το δυναμικό είναι:

$$\phi(r) = -\frac{GM}{r}\ ,$$

Συνεπώς έξω απο τη σφαίρα για $r > a$ η δύναμη που ακείται σε σωματίδιο μάζας m είναι:

$$\vec{F} = -\frac{GmM}{r^2}\hat{\vec{r}}$$

ενώ για $r < a$ η δύναμη είναι αυτή αρμονικού ταλαντωτή:

$$\vec{F} = -\frac{GmMr}{a^3}\hat{\vec{r}}\,.$$