ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Διαγωνισμα Υποτροφιών 15 Ιουλίου 2015

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΠΟΥ ΚΛΗΡΩΘΗΚΑΝ

Πρόβλημα 6: Ένα εκκρεμές, αποτελούμενο από αβαρή ράβδο μήκους l και σημειακή μάζα m, εκτελεί επίπεδες ταλαντώσεις εντός του βαρυτικού πεδίου της Γης έντασης g. Αν η ταλάντωση γίνεται μεταξύ των γωνιών $-\theta_0$ και $+\theta_0$ (μετρούμενες από την κατακόρυφο), να βρεθεί ο λόγος της μέγιστης προς την ελάχιστη τιμή της τάσης της ράβδου κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης.

Στη μαζα ασκειται η δυναμη της βαρύτητας mg και η τάση N κατα την ακτινική διεύθυνση. Αν ω η στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα τότε κατα τη διευθυνση της ραβδου ο β' νομος του Νευτωνα απαιτεί:

$$-ml\omega^2 = mg\cos\theta - N \quad \text{, δηλαδή} \quad N = m(g\cos\theta + l\omega^2) \tag{1}$$

Ενώ η διατήρηση της ενέργειας προσδιορίζει τη γωνιακή ταχύτητα καθε στιγμή:

$$\frac{m}{2}l^2\omega^2 = mgl(\cos\theta - \cos\theta_0) \quad \text{, άρα} \quad l\omega^2 = 2g(\cos\theta - \cos\theta_0) \tag{2}$$

Συνεπώς η εξάρτηση της τάσης απο τη γωνία είναι:

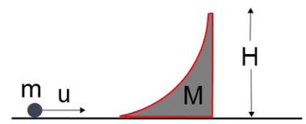
$$N(\theta) = mg(3\cos\theta - 2\cos\theta_0)\ , \tag{3}$$

και η μεγιστη τιμή της τάσης επιτυγχανεται στο κατώτερο σημείο της ταλάντωσης $\theta = 0$ και είναι $N_{max} = mg(3 - 2\cos\theta_0)$ ενώ η ελάχιστη στο $\theta = \theta_0$ που αντιστοιχεί στο μέγιστο της αιώρησης $N_{min} = mg\cos\theta_0$, είναι δηλαδή

$$\frac{N_{max}}{N_{min}} = \frac{3 - 2\cos\theta_0}{\cos\theta_0}\ . \tag{4}$$

Το αποτέλεσμα αυτό είναι διασθητικά αναμενόμενο απο την εμπειρία μας στις κούνιες όταν είμασταν μικροί.

Πρόβλημα 8: Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται με ταχύτητα u προς μια αρχικά ακίνητη πλατφόρμα μάζας M που έχει τη μορφή του διπλανού σχήματος. Το σωματίδιο ανεβαίνει πάνω στην πλατφόρμα και γλυστρά πάνω στην καμπύλη επιφάνεια δίχως τριβές, ενώ το ίδιο συμβαίνει και με την πλατφόρμα πάνω στο οριζόντιο δάπεδο. Ποιο θα ειναι το ανώτερο ύψος που θα ανέβει το σωματίδιο επί της πλατφόρμας; Αν η πλατφόρμα έχει ύψος H ποια είναι η συνθήκη εγκατάλειψης της πλατφόρμας;



Διατηρείται η ενέργεια και η ορμή στην οριζοντια διευθυνση διότι δεν ασκείται σε αυτή τη διεύθυνση εξωτερική δύναμη. Αν το σωματίδιο φτάσει σε ύψος h σε αυτό το ύψος η μάζα m θα έχει μηδενική κατακόρυφη ταχύτητα και ίδια ταχύτητα με την μάζα M, έστω V. Η διατηρηση ενέργειας απαιτει

$$\frac{m}{2}u^2 = \frac{m+M}{2}V^2 + mgh \text{ άρα } h = \frac{1}{2g}\left(u^2 - \frac{m+M}{m}V^2\right) \tag{5}$$

ενή η διατήρηση της οριζόντιας ορμής απαιτεί:

$$mu = (m+M)V \tag{6}$$

Συνεπώς το μέγιστο ύψος που φτάνει το σωματίδιο είναι:

$$h = \frac{1}{2g}\left(u^2 - \frac{mu^2}{m+M}\right) = \frac{M}{2(m+M)g}u^2 \tag{7}$$

(δηλαδή όταν $M \to \infty$ είναι $h \to u^2/(2g)$, ενώ όταν $M \to 0$ τότε $h \to 0$). Υπερβαίνει το εμπόδιο αν

$$u^2 > \frac{2(m+M)gH}{M}\ . \tag{8}$$

Πρόβλημα 10: Από το ανώτερο σημείο κεκλιμμένου επιπέδου με γωνία κλίσης θ κρέμεται με τη βοήθεια ελατηρίου σταθεράς k ένα σώμα μάζας M. Ένα δεύτερο σώμα μάζας m βάλλεται από το κατώτερο άκρο του κεκλιμμένου επιπέδου προς τα επάνω με αρχική ταχύτητα v_0 και σφηνώνεται στο σώμα μάζας M. (i) Να βρεθεί το πλάτος της ταλάντωσης που θα εκτελέσει η M μετά την πλαστική κρούση ως συνάρτηση της απόστασης d που θα διανύσει η m κατά μήκος του κελιμμένου επιπέδου μέχρι να συναντήσει και να σφηνωθεί στην M. (ii) Να γίνει το αντίστοιχο διάγραμμα.

Αν διανύσει απόσταση d προσκρούει στη μάζα με ταχύτητα $v = \sqrt{v_0^2 - 2gd\sin\theta}$. Η διατήρηση της ορμής προσδιορίζει ότι η αρχική ταχύτητα των δύο μαζών είναι

$$u_0 = \frac{mv}{m+M}\ . \tag{9}$$

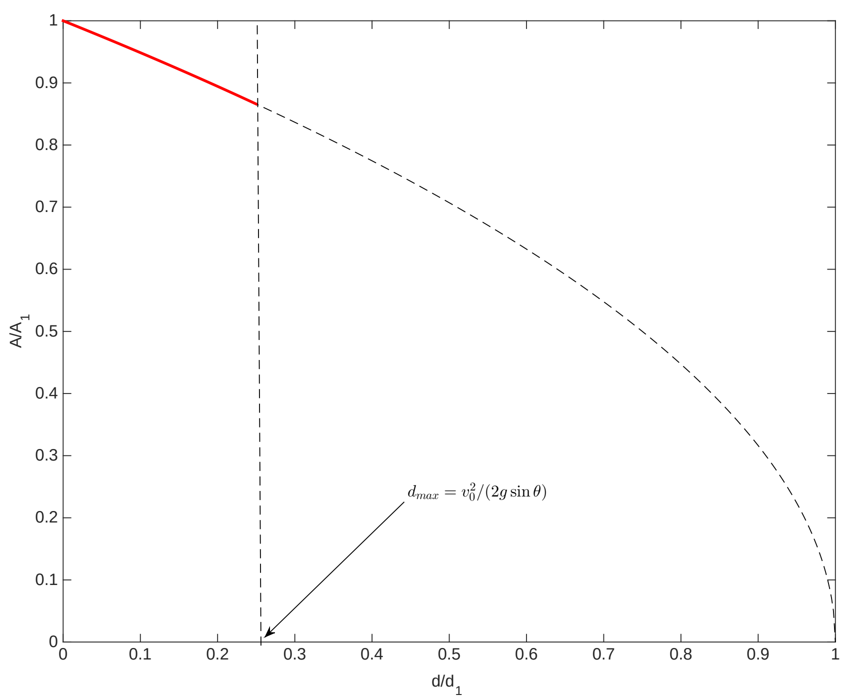
Οταν ομως σφηνωθεί το σωματίδιο ο ταλαντωτής δεν είναι πλεον στο σημείο ισοορροπίας του στο κεκλιμμενο επίπεδο, αλλα βρίσκεται σε απόσταση $x_e = -mg\sin\theta/k$ απο αυτό (x είναι οι αποστάση επί του κεκλιμμενου επιπέδου και οχι επι της οριζοντιας διεύθυνσης, δηλαδή μια μετατόπιση κατα x επι του κεκλιμμενου επιπέδου μετατοπίζει τη μάζα $x \sin\theta$ καθ'ύψος και $x \cos\theta$ στην οριζοντια διεύθυνση). Αρχικά λοιπόν ο ταλαντωτής που αποτελείται απο το συσσωματωμα βρίσκεται σε απόσταση $x_e = -mg \sin\theta / k$ από το σημείο ισορροπίας και έχει ταχύτητα u_0, συνεπώς αν $t = 0$ ήταν η χρονική στιγμή της κρούσης η θέση του ταλαντωτή ως προς το σημείο ισορροπίας του είναι:

$$x = -\frac{mg \sin\theta}{k} \cos(\omega t) + \frac{u_0}{\omega} \sin(\omega t) \tag{10}$$

με $\omega^2 = k/(m + M)$, οπότε το πλάτος είναι:

$$\begin{aligned} A(d) &= \sqrt{\frac{m^2 g^2}{k^2} \sin^2\theta + \frac{m^2}{(m+M)^2} \frac{m+M}{k} (v_0^2 - 2gd \sin\theta)} \\ &= \sqrt{\frac{m^2 g^2}{k^2} \sin^2\theta + \frac{m^2}{(m+M)k} v_0^2 - 2\frac{m^2}{(m+M)k} gd \sin\theta} \\ &= \sqrt{A_1^2 - \frac{d}{d_1}} \end{aligned}$$

Το πλάτος μηδενίζεται όταν $d = A_1^2 d_1$ και λαμβάνει την μέγιστη τιμή $A_{max} = A_1$ όταν $d = 0$. Το σχήμα είναι μια παραβολή. Αλλά $d < d_{max} = v_0^2/(2g \sin\theta) < A_1 d_1$, αλλως δεν φτανει την μαζα, οπότε οι τιμες του $d \in [0, d_{max}]$ και η $A(d)$ διαγραφει τμημα αυτής της παραβολής, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Σχήμα 1: Η γραφική παράσταση για την περίπτωση $v_0 = 10$, $g = 10$, $k = 1$,$m = 1$, $M = 2$, $\theta = \pi/6$.