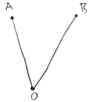
Ασκήσεις Φυλ. 1

1



Έχω ότι $\vec{AO}=\vec{OA_1}$, $\vec{AO}=\vec{OA_2}$

$\vec{BO}=\vec{OB_1}$, $\vec{BO}=\vec{OB_2}$

Επομένως

$$\vec{A_1B_1}=\vec{OB_1}-\vec{OA_1}=\vec{BO}-\vec{AO}=\vec{OA}-\vec{OB}=\vec{BA}$$

$$\vec{A_2B_2}=\vec{OB_2}-\vec{OA_2}=\vec{BO}-\vec{AO}=\vec{OA}-\vec{OB}=\vec{BA}$$

άρα $\underline{\vec{A_1B_1}=\vec{A_2B_2}}$ $\Leftrightarrow$ $\vec{A_1A_2}=\vec{B_1B_2}$

———— o ————

2

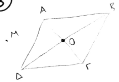
Ξέρω ότι $\vec{OA}=\vec{O'A'}$ και $\vec{OB}=\vec{O'B'}$

i) $\left.\begin{array}{l}\vec{AA'}=\vec{OA'}-\vec{OA}=\vec{OA'}-\vec{O'A'}=\vec{A'O'}-\vec{A'O}=\vec{OO'}\\ \vec{BB'}=\vec{OB'}-\vec{OB}=\vec{OB'}-\vec{O'B'}=\vec{B'O'}-\vec{B'O}=\vec{OO'}\end{array}\right] \to \vec{AA'}=\vec{BB'}$

ii) $\vec{AB}=\vec{A'B'}$? Πράγματι $\vec{AA'}=\vec{BB'} \Leftrightarrow \underline{\vec{AB}=\vec{A'B'}}$

———— o ————

3



i) $\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{M\Gamma}+\vec{M\Delta}=\vec{OA}-\vec{OM}+\vec{OB}-\vec{OM}+\vec{O\Gamma}-\vec{OM}+\vec{O\Delta}-\vec{OM}=$

$=\underbrace{\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{O\Gamma}+\vec{O\Delta}}_{\vec{0}}-4\vec{OM}$

$=4\vec{OM}$

ii) Το Κ είναι το Ο.

———— o ————

④

Για να είναι τα A, B, Γ συνευθειακά αρκεί: να ∃ λ ώστε

$\vec{AB} = \lambda \vec{B\Gamma}$

$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + 2\vec{b}$

$\vec{B\Gamma} = \vec{O\Gamma} - \vec{OB} = 5\vec{a} + 9\vec{b} - 2\vec{a} - 3\vec{b} = 3\vec{a} + 6\vec{b} = 3(\vec{a} + 2\vec{b})$

Άρα $\vec{B\Gamma} = 3\vec{AB} \Rightarrow$ A, B, Γ συνευθειακά

---

⑤ ***

∃ ένα $\lambda_i \neq 0$ χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορώ να υποθέσω ότι $\lambda_1 \neq \vec{0}$.

Τότε $\lambda_1\vec{OA} + \lambda_2\vec{OB} + \lambda_3\vec{O\Gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{OA} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{OB} + \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\vec{O\Gamma} = \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{OA} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{OB} - \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\vec{O\Gamma}$

$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \vec{OB} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{OB} + \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\vec{O\Gamma} = \left(1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\vec{OB} + \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\vec{O\Gamma}$

$\vec{A\Gamma} = \vec{O\Gamma} - \vec{OA} = \vec{O\Gamma} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{OB} + \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\vec{O\Gamma} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{OB} + \left(1 + \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)\vec{O\Gamma}$

$\vec{B\Gamma} = \vec{O\Gamma} - \vec{OB}$

$\vec{AB} = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)\vec{OB}}{\lambda_1} + \frac{\lambda_3\vec{O\Gamma}}{\lambda_1} = \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\vec{O\Gamma} - \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\vec{OB} = \frac{\lambda_3}{\lambda_1}(\vec{O\Gamma} - \vec{OB})$

$\vec{A\Gamma} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{OB} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{O\Gamma} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}(\vec{OB} - \vec{O\Gamma})$

Άρα A, B, Γ συνευθειακά.

⑥

$$\vec{A\Gamma} = \vec{O\Gamma} - \vec{OA} = \frac{3}{7}\vec{OA} + \frac{4}{7}\vec{OB} - \vec{OA} = \frac{4}{7}\vec{OB} - \frac{4}{7}\vec{OA} = \frac{4}{7}\vec{AB}$$

Άρα τα A, B, Γ είναι συνευθειακά

$$\vec{\Gamma B} = \vec{OB} - \vec{O\Gamma} = \vec{OB} - \frac{3}{7}\vec{OA} - \frac{4}{7}\vec{OB} = \frac{3}{7}\vec{OB} - \frac{3}{7}\vec{OA} = \frac{3}{7}\vec{AB}$$

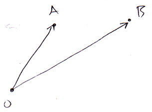
Άρα $\vec{A\Gamma} \upuparrows \vec{\Gamma B}$ άρα το Γ βρίσκεται μεταξύ των A, B

$$\vec{A\Gamma} - \lambda\vec{\Gamma B} = \vec{0} \iff \frac{4}{7}\vec{AB} - \frac{3\lambda}{7}\vec{AB} = \vec{0} \iff 4 - 3\lambda = 0 \iff \lambda = \frac{4}{3}$$

⑦** Affine ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ

$$\vec{O\Gamma} = \lambda\vec{OA} + (1-\lambda)\vec{OB} \iff$$

$$\vec{O\Gamma} = \lambda\vec{OA} - \lambda\vec{OB} + \vec{OB} = \lambda\vec{BA} + \vec{OB} \iff \vec{B\Gamma} = \lambda\vec{BA}$$



- Αν $\lambda > 0$ τότε το Γ βρίσκεται αριστερά του B
- Αν $0 < \lambda < 1$ τότε αφού $|\vec{B\Gamma}| < |\vec{BA}|$ το Γ βρίσκεται μεταξύ των A, B

Αν $\lambda > 1$ τότε αφού $|\vec{B\Gamma}| > |\vec{BA}|$ το Γ βρίσκεται αριστερά του A

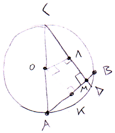
Αν $\lambda < 0$ το Γ βρίσκεται δεξιά του B.

(8)

$$3\overrightarrow{GG'} = 3\overrightarrow{OG'} - 3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{O\Gamma'} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{O\Gamma}$$
$$= \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{\Gamma\Gamma'}$$

---

(9)



- Έστω K, Λ τα μέσα των AB, $\Delta\Gamma$.

Τότε $\overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$

$\overrightarrow{O\Lambda} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{O\Gamma} + \overrightarrow{O\Delta})$

Άρα $\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{O\Lambda} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma} + \overrightarrow{O\Delta})$

- Όμως $OM\Lambda K$ ορθ. άρα

$\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{O\Lambda} = \overrightarrow{OM} \longrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma} + \overrightarrow{O\Delta})$

---

(10)

i) Έστω ότι $\kappa \neq 0$ ή $\lambda \neq 0$.

Τότε $\vec{a} + \frac{\lambda}{\kappa}\vec{\beta} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} = -\frac{\lambda}{\kappa}\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{\beta}$ ΑΤΟΠΟ

ii) $(\kappa-\mu)\vec{a} + (\lambda-\nu)\vec{\beta} = \vec{0} \Leftrightarrow \kappa-\mu = 0$ και $\lambda-\nu = 0$

$\Leftrightarrow \kappa = \mu$ και $\lambda = \nu$.

11

$\vec{\alpha} \,//\, \vec{\beta} \Rightarrow \vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$,

Τότε

$\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} = 2\lambda\vec{\beta} + 3\vec{\beta} = (2\lambda+3)\vec{\beta}$

$\vec{\delta} = \vec{\alpha} - 4\vec{\beta} = \lambda\vec{\beta} - 4\vec{\beta} = (\lambda-4)\vec{\beta}$

Άρα $\vec{\gamma} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$, $\vec{\delta} \,//\, \vec{\beta}$.

$\boxed{\vec{\gamma} = \frac{2\lambda+3}{\lambda-4}\vec{\beta}}$

Άρα $\vec{\gamma} \,//\, \vec{\delta}$

Για ποιες τιμές τον λ ισχύει $\frac{2\lambda+3}{\lambda-4} < 0$? (δηλαδή πότε τα $\vec{\gamma}, \vec{\delta}$ είναι αντίρροπα ?)

Ως γνωστόν $\lambda - 4 < 0 \Leftrightarrow \lambda < 4$

$2\lambda + 3 < 0 \Leftrightarrow \lambda < -\frac{3}{2}$

	$-\infty$	$-3/2$	4	$+\infty$
$\lambda - 4$	$-$	$-$	0	$+$
$2\lambda+3$	$-$ 0	$+$		$+$
$\frac{\lambda-4}{2\lambda+3}$	$+$	$-$		$+$
	$\gamma\uparrow\uparrow\delta$	$\gamma\downarrow\uparrow\delta$	$\gamma\uparrow\downarrow\vec{\delta}$	

o

12

$\vec{\alpha} \not\parallel \vec{\beta}$ Για να είναι τα $\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$ και $2\vec{\alpha} - (\lambda+1)\vec{\beta}$ παράλληλα θα πρέπει να $\exists\, \mu \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε:

$\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta} = \mu\left(2\vec{\alpha} - (\lambda+1)\vec{\beta}\right) \Leftrightarrow \vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta} = 2\mu\vec{\alpha} - \mu(\lambda+1)\vec{\beta} \Leftrightarrow$

$(1-2\mu)\vec{\alpha} + (\lambda + \mu\lambda + \mu)\vec{\beta} = \vec{0} \Leftrightarrow$ $1 - 2\mu = 0 \Leftrightarrow \boxed{\mu = \frac{1}{2}}$ (1)

$\boxed{\lambda + \mu\lambda + \mu = 0}$ (2)

Άρα τα $\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$, $2\vec{\alpha} - (\lambda+1)\vec{\beta}$ είναι παράλληλα αν και μόνο αν

$\mu = \frac{1}{2}$ και $\lambda + \mu\lambda + \mu = 0 \Leftrightarrow \lambda + \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow 2\lambda + \lambda = -1 \Leftrightarrow$

$\lambda = -\frac{1}{3}$

τότε $\vec{\gamma} = \frac{1}{2}\vec{\delta}$

(13) Α΄ Τρόπος

$\vec{\alpha} \not\parallel \vec{\beta}$, $\vec{\alpha} \not\parallel \vec{\gamma}$, $\vec{\beta} \not\parallel \vec{\gamma}$ $\quad (\Rightarrow \vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \neq \vec{0})$

$\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} + \vec{\gamma} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$ $\quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$\vec{\beta} \parallel \vec{\gamma} + \vec{\alpha} \Leftrightarrow \vec{\beta} = \mu(\vec{\gamma}+\vec{\alpha})$

$\underline{\vec{\alpha}+\vec{\beta}} = \lambda\vec{\beta} + \lambda\vec{\gamma} + \mu\vec{\gamma} + \mu\vec{\alpha} = \lambda(\mu(\vec{\gamma}+\vec{\alpha})) + \lambda\vec{\gamma} + \mu\vec{\gamma} + \mu\vec{\alpha}$

$= \underline{(\lambda\mu + \lambda + \mu)\vec{\gamma} + (\lambda\mu + \mu)\vec{\alpha}}$

Άρα πρέπει να δ.ο $\boxed{\lambda\mu + \mu = 0}$

$\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta} + \lambda\vec{\gamma} = \lambda\mu(\vec{\gamma}+\vec{\alpha}) + \lambda\vec{\gamma} = \lambda\mu\vec{\gamma} + \lambda\mu\vec{\alpha} + \lambda\vec{\gamma} \Leftrightarrow$

$\underline{(1-\lambda\mu)\vec{\alpha} = (\lambda\mu + \lambda)\vec{\gamma}}$

$\vec{\beta} = \mu(\vec{\gamma}+\vec{\alpha}) = \mu\vec{\gamma} + \mu(\lambda(\vec{\beta}+\vec{\gamma})) = (\mu + \lambda\mu)\vec{\gamma} + \lambda\mu\vec{\beta} \Leftrightarrow$

$\underline{(1-\lambda\mu)\vec{\beta} = (\lambda\mu + \mu)\vec{\gamma}}$

(συνδιαστικά μόνο για αυτές τις δύο σχέσεις ισχύει)

Υπάρχουν δύο περιπτώσεις

- $\lambda\mu + \mu = 0 \Leftrightarrow \underline{\mu = -1}$ και $1 - \lambda\mu = 0 \Leftrightarrow \lambda\mu = 1 \Leftrightarrow \underline{\lambda = -1}$ οπότε $\vec{\alpha}+\vec{\beta} = -\vec{\gamma} \Rightarrow \underline{\vec{\alpha}+\vec{\beta} \parallel \vec{\gamma}}$

- $\lambda\mu + \mu \neq 0$ ή $1 - \lambda\mu \neq 0$ οπότε $\vec{\alpha} \parallel \vec{\gamma}$. Άτοπο.

Επομένως αναγκαστικά ισχύει $\boxed{\lambda = \mu = -1}$

Άρα $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = -\vec{\gamma}$

Β' τρόπος

$$\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\lambda\vec{\alpha}$$
$$\vec{\gamma}+\vec{\alpha}=\mu\vec{\beta}$$

$\rightarrow \quad \vec{\beta}-\vec{\alpha}=\lambda\vec{\alpha}-\mu\vec{\beta} \iff \boxed{(1+\mu)\vec{\beta}=(1+\lambda)\vec{\alpha}}$

Αν $\quad 1+\mu\neq 0$ ή $(1+\lambda)\neq 0 \Rightarrow \vec{\beta}\parallel\vec{\alpha}$ Άτοπο

Άρα $\quad 1+\mu=0$ και $1+\lambda=0 \iff \boxed{\mu=\lambda=-1}$

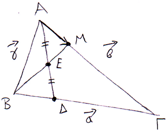
Επομένως $\quad \vec{\beta}+\vec{\gamma}=-\vec{\alpha} \Rightarrow \vec{\alpha}+\vec{\beta}=-\vec{\gamma} \Rightarrow \vec{\gamma}\parallel\vec{\alpha}+\vec{\beta}$

$\quad \vec{\gamma}+\vec{\alpha}=-\vec{\beta}$

14

$$\vec{B\Delta}=\frac{1}{3}\vec{B\Gamma}$$
$$\vec{AE}=\vec{E\Delta}$$

$\vec{\alpha}=\vec{B\Gamma}$
$\vec{\beta}=\vec{A\Gamma}$
$\vec{\gamma}=\vec{AB}$
$\boxed{\vec{\alpha}=\vec{\beta}-\vec{\gamma}}$



$$\vec{B\Delta}=\frac{1}{3}\vec{\alpha}$$
$$\vec{AE}=\vec{E\Delta}=\frac{1}{2}\vec{A\Delta}=\frac{1}{2}(\vec{B\Delta}-\vec{BA})=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\vec{\alpha}+\vec{\gamma}\right)=\frac{1}{6}\vec{\alpha}+\frac{1}{2}\vec{\gamma}$$

Έστω $\quad \vec{AM}=\lambda\vec{A\Gamma}=\lambda\vec{\beta}$

$$\vec{EM}=\mu\vec{BM}=\mu(\vec{AM}-\vec{AB})=\mu(\lambda\vec{\beta}-\vec{\gamma})$$

Όμως $\quad \vec{AE}+\vec{EM}=\vec{AM} \iff \frac{1}{6}\vec{\alpha}+\frac{1}{2}\vec{\gamma}+\lambda\mu\vec{\beta}-\mu\vec{\gamma}=\lambda\vec{\beta} \iff$

$$\frac{1}{6}\vec{\beta}-\frac{1}{6}\vec{\gamma}+\frac{1}{2}\vec{\gamma}+\lambda\mu\vec{\beta}-\mu\vec{\gamma}-\lambda\vec{\beta}=\vec{0} \iff$$

$$\left(\frac{1}{6}+\lambda\mu-\lambda\right)\vec{\beta}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\mu\right)\vec{\gamma}=\vec{0} \iff$$

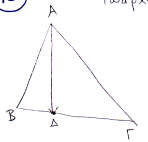
$$\left(\frac{1}{6}+\lambda\mu-\lambda\right)\vec{\beta}+\left(\frac{2}{6}-\mu\right)\vec{\gamma}=\vec{0}$$

Αφού $\vec{\alpha} \nparallel \vec{\gamma}$

$\mu = \frac{1}{3}$ και $\frac{1}{6} + \frac{\lambda}{3} - \lambda = 0 \Rightarrow \frac{2\lambda}{3} = \frac{1}{6} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{4}$

Άρα $\boxed{\vec{AM} = \frac{1}{4}\vec{A\Gamma}}$

15



Υπάρχει κ

$\vec{A\Delta} = \kappa\vec{AB} + (1-\kappa)\vec{A\Gamma}$

(Δες Άσκηση 4 βιβλίου σελ 78)

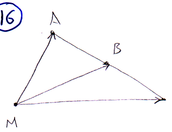
Έστω $\frac{B\Delta}{B\Gamma} = \lambda$ τότε

$\vec{B\Delta} = \lambda\vec{B\Gamma}$

και $\vec{A\Delta} = \vec{AB} + \vec{B\Delta} = \vec{AB} + \lambda\vec{B\Gamma} = \vec{AB} + \lambda(\vec{A\Gamma} - \vec{AB}) =$

$= \vec{AB} + \lambda\vec{A\Gamma} - \lambda\vec{AB} = (1-\lambda)\vec{AB} + \lambda\vec{A\Gamma}$ $\quad \lambda \in (0,1)$

16



$\boxed{\vec{A\Gamma} = \lambda\vec{B\Gamma}}$

i) Έστω ότι $\alpha+\beta+\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = -(\alpha+\beta)$

$\vec{\delta}(M) = \alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB} - \alpha\vec{M\Gamma} - \beta\vec{M\Gamma} =$

$= \alpha\vec{\Gamma A} + \beta\vec{\Gamma B} = \alpha\cdot\lambda\vec{\Gamma B} + \beta\vec{\Gamma B} =$

$= (\alpha\lambda+\beta)\vec{\Gamma B}$ = σταθερό.

ii) Α΄ τρόπος

Αφού $\alpha+\beta+\gamma \neq 0 \Rightarrow$ ένα τουλάχιστον εκ των α, β, γ είναι διάφορο του μηδενός. Έστω το γ. Τότε $\vec{\delta}(M) = \vec{0} \Rightarrow$

$\vec{M\Gamma} = -\frac{\alpha}{\gamma}\vec{MA} - \frac{\beta}{\gamma}\vec{MB} \Leftrightarrow \vec{M\Gamma} = -\frac{\alpha}{\gamma}\vec{\Gamma A} + \frac{\alpha}{\gamma}\vec{\Gamma M} - \frac{\beta}{\gamma}\vec{\Gamma B} + \frac{\beta}{\gamma}\vec{\Gamma M}$

$\Leftrightarrow \left(1+\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\gamma}\right)\vec{M\Gamma} = +\frac{\alpha}{\gamma}\vec{A\Gamma} + \frac{\beta}{\gamma}\vec{B\Gamma} \Leftrightarrow$

$$(a+b+\gamma)\,\vec{M\Gamma} = a\cdot\vec{A\Gamma} + b\cdot\vec{B\Gamma}$$

$$\boxed{\vec{M\Gamma} = \frac{a}{a+b+\gamma}\,\vec{A\Gamma} + \frac{b}{a+b+\gamma}\,\vec{B\Gamma}}$$

Β΄ τρόπος (πιο ωραίος)

$$f(M)=\vec{0} \Leftrightarrow a\vec{MA} + b\vec{MB} + \gamma\vec{M\Gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow$$

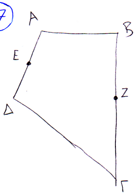
$$a\vec{OA} - a\vec{OM} + b\vec{OB} - b\vec{OM} + \gamma\vec{O\Gamma} - \gamma\vec{OM} = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$(a+b+\gamma)\,\vec{OM} = a\vec{OA} + b\vec{OB} + \gamma\vec{O\Gamma} \Leftrightarrow$$

$$\vec{OM} = \frac{a}{a+b+\gamma}\,\vec{OA} + \frac{b}{a+b+\gamma}\,\vec{OB} + \frac{\gamma}{a+b+\gamma}\,\vec{O\Gamma}$$

Affine Combination

17



$$\vec{EZ} = \frac{1}{2}(\vec{EB}+\vec{E\Gamma}) = -\frac{1}{2}(\vec{BE}+\vec{\Gamma E}) =$$

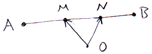
$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(\vec{BA}+\vec{B\Delta}) + \frac{1}{2}(\vec{\Gamma A}+\vec{\Gamma\Delta})\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\vec{AB}+\vec{A\Gamma}+\vec{\Delta B}+\vec{\Delta\Gamma}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\vec{AB}+\vec{A\Gamma}+\vec{AB}-\vec{A\Delta}+\vec{A\Gamma}-\vec{A\Delta}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(2\vec{AB}+2\vec{A\Gamma}-2\vec{A\Delta}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{AB}+\vec{A\Gamma}-\vec{A\Delta}\right)$$

(18)



$\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM} = \vec{OA} + \frac{1}{3}\vec{AB} = \vec{OA} + \frac{1}{3}\vec{OB} - \frac{1}{3}\vec{OA} = \frac{2}{3}\vec{OA} + \frac{1}{3}\vec{OB}$ ✓

$\vec{ON} = \vec{OB} + \vec{BN} = \vec{OB} + \frac{1}{3}\vec{BA} = \vec{OB} + \frac{1}{3}\vec{OA} - \frac{1}{3}\vec{OB} = \frac{2}{3}\vec{OB} + \frac{1}{3}\vec{OA}$ ✓

---

(19)

$\vec{A\Gamma} = \lambda\vec{\Gamma B} \Leftrightarrow \vec{O\Gamma} - \vec{OA} = \lambda\vec{OB} - \lambda\vec{O\Gamma} \Leftrightarrow$

$$\boxed{-\lambda\vec{OB} + (1+\lambda)\vec{O\Gamma} = \vec{OA}}$$

Όμως $2\vec{OA} - 5\vec{OB} + 3\vec{O\Gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{OA} = \frac{5}{2}\vec{OB} - \frac{3}{2}\vec{O\Gamma}$

Επομένως για να ισχύει $\vec{A\Gamma} = \lambda\vec{\Gamma B}$ αρκεί να υπάρχει λ τέτοιο ώστε $\lambda = -\frac{5}{2}$, $1+\lambda = -\frac{3}{2} \Rightarrow \lambda = -\frac{5}{2}$

Άρα $\boxed{\lambda = -\frac{5}{2}}$

Ομοίως

$\vec{BA} = \mu\vec{A\Gamma} \Leftrightarrow \vec{OA} - \vec{OB} = \mu\vec{O\Gamma} - \mu\vec{OA} \Leftrightarrow$

$$\boxed{(1+\mu)\vec{OA} - \mu\vec{O\Gamma} = \vec{OB}}$$

και $\vec{OB} = \frac{2}{5}\vec{OA} + \frac{3}{5}\vec{O\Gamma}$.

Αρκεί να υπάρχει μ τέτοιο ώστε

$1+\mu = \frac{2}{5} \Leftrightarrow \mu = -\frac{3}{5}$ και $-\mu = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \mu = \frac{3}{5}$

Άρα $\boxed{\mu = \frac{3}{5}}$

(20) Αν Α,Β,Γ συνευθειακά τότε υπάρχει λ

τέτοιο ώστε $\vec{AB} = \lambda \vec{B\Gamma} \Leftrightarrow$

$$\vec{OB} - \vec{OA} = \lambda\vec{O\Gamma} - \lambda\vec{OB} \Leftrightarrow -\vec{OA} + (1+\lambda)\vec{OB} - \lambda\vec{O\Gamma} = \vec{0}$$

Επιλέγω $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1+\lambda$, $\lambda_3 = -\lambda$ και ισχύει το

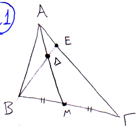
ζητούμενο.

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

$$|\lambda_1| + |\lambda_2| + |\lambda_3| = 1 + |1+\lambda| + |\lambda| > 1 > 0$$

---

(21)



$$\vec{B\Delta} = \vec{A\Delta} - \vec{AB} = \frac{1}{3}\vec{AM} - \vec{AB} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{A\Gamma})\right) - \vec{AB}$$

$$= \frac{1}{6}\vec{AB} + \frac{1}{6}\vec{A\Gamma} - \vec{AB} = \frac{1}{6}\vec{A\Gamma} - \frac{5}{6}\vec{AB}$$

$$\vec{\Delta E} = \vec{AE} - \vec{A\Delta} = \frac{1}{5}\vec{A\Gamma} - \frac{1}{3}\vec{AM} =$$

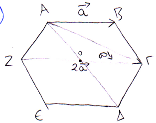
$$= \frac{1}{5}\vec{A\Gamma} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{A\Gamma})\right) = \frac{1}{5}\vec{A\Gamma} - \frac{1}{6}\vec{AB} - \frac{1}{6}\vec{A\Gamma}$$

$$= \frac{1}{30}\vec{A\Gamma} - \frac{1}{6}\vec{AB}$$

Άρα $\vec{B\Delta} = 5 \cdot \vec{\Delta E} \Leftrightarrow$ Β, Δ, Ε συνευθειακά

---

(22)



- $\vec{B\Gamma} = \vec{\beta} - \vec{\alpha}$
- $\vec{\Gamma\Delta} = \vec{A\Delta} - \vec{A\Gamma} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$
- $\vec{\Delta E} = -\vec{\alpha}$
- $\vec{EZ} = -\vec{B\Gamma} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$
- $\vec{ZA} = \vec{\Delta\Gamma} = \vec{\beta} - 2\vec{\alpha}$

(23) Έστω ότι $\vec{\alpha}+\vec{\beta} \parallel 2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$. Τότε θα υπάρχει λ τέτοιο ώστε $\vec{\alpha}+\vec{\beta} = \lambda(2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}) \Leftrightarrow \vec{\alpha} - 2\lambda\vec{\alpha} + \vec{\beta} - 3\lambda\vec{\beta} = \vec{0} \Leftrightarrow$

$\underline{(1-2\lambda)\vec{\alpha} = (3\lambda-1)\vec{\beta}}$

Αν $\lambda = \frac{1}{2}$ (τότε $1-2\lambda=0$)

και $0\cdot\vec{\alpha} = \left(\frac{3}{2}-1\right)\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\beta}=\vec{0}$. Άρα $\vec{\alpha}\parallel\vec{\beta}$ Άτοπο.

Αν $\lambda \neq \frac{1}{2}$

τότε $\vec{\alpha} = \dfrac{3\lambda-1}{1-2\lambda}\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha}\parallel\vec{\beta}$ Άτοπο.

Επομένως τα $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $2\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα

---

(24) Για να είναι τα $\vec{\gamma}, \vec{\delta}$ παράλληλα θα πρέπει να υπάρχει λ τέτοιο ώστε

$\vec{\gamma} = \lambda\vec{\delta} \Leftrightarrow \kappa\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \lambda(2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}) \Leftrightarrow$

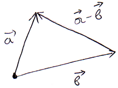
$(\kappa-2\lambda)\vec{\alpha} = (1+3\lambda)\vec{\beta}$

- Αν $1+3\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{3}$
  τότε $(\kappa-2\lambda)\vec{\alpha} = \vec{0} \Leftrightarrow \kappa = 2\lambda$ (αφού $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$. Αν $\vec{\alpha}=\vec{0}$ τότε $\vec{\alpha}\parallel\vec{\beta}$ άτοπο)

- Αν $\lambda \neq -\frac{1}{3}$ τότε $\vec{\alpha}\parallel\vec{\beta}$ Άτοπο.

Επομένως $\underline{\lambda = -\frac{1}{3}}$ και $\underline{\kappa = -\frac{2}{3}}$.

25



Η ανισότητα που μας ζητείται η απόδειξη είναι η τριγωνική ανισότητα (βλέπε Γεωμετρία)

Θα δίνουμε την ίδια απόδειξη και σε επόμενο φυλλάδιο με διαφορετικό τρόπο.
(όπως και την επόμενη)

26

i) όταν $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$

ii) όταν $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$