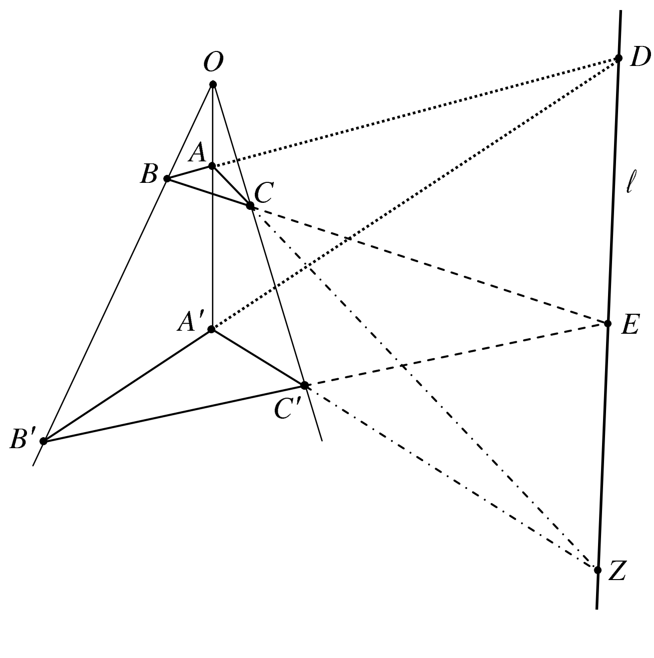
ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ Ε. ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ

ΘΕΜΑΤΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΟ ΠΜΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ



ΑΘΗΝΑ 2015
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΘΕΜΑΤΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΘΕΜΑΤΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ
Σημειώσεις για το ΠΜΣ Διδακτικής

TOPICS IN GEOMETRY
Lecture Notes for Didactics

AMS (2000) Subject Classification:
01A20, 01A55, 01A60,
51A05, 51A10, 51E15,
53A04, 53A05, 58A05
83-99

email address: evassil@math.uoa.gr
url: http://users.uoa.gr/ evassil

Πρόλογος

The Greeks were the first mathematicians who are still 'real' to us to-day. Oriental mathematics may be an interesting curiosity, but Greek mathematics is the real thing. The greeks first spoke a a language which modern mathematicians can understand . . . So greek mathematics is 'permanent', more permanent even than Greek literature. Archimedes will be remembered when Aeschylus is forgotten, because languages die and mathematical ideas do not.

G. H. Hardy [16, σελ. 80–81]

Οι σημειώσεις αυτές αποτελούν μία σειρά εισαγωγικών μαθημάτων σε μερικούς κλάδους της γεωμετρίας. Έχουν σκοπό να αποτελέσουν οδηγό για τη μελέτη θεματικών ενοτήτων θεωρητικού ενδιαφέροντος για φοιτητές/τριες του Μεταπτυχιακού Προγράμματος της Διδακτικής του ΕΚΠΑ. Αποτελούν βελτιωμένη έκδοση των προηγουμένων σημειώσεων μας με τίτλο «Γεωμετρία για τη Διδακτική», όπως είχαν διαμορφωθεί μέχρι το 2012.

Βασικός στόχος των ενοτήτων που αναφέρονται εδώ είναι να φέρουν τον/την αναγνώστη/στρια σε επαφή με διάφορες απόψεις και μεθόδους της γεωμετρίας. Οι τελευταίες μπορούν να παίξουν ένα χρήσιμο ρόλο, κυρίως από τη σκοπιά της διεύρυνσης μερικών θεμελιωδών εννοιών, οι οποίες εκτείνονται πιο πέρα από αυτές που διδάσκονται στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Είναι κοινώς αποδεκτό ότι ο/η διδάσκων/ουσα με ευρεία (και όσο το δυνατόν βαθύτερη) γνώση μπορεί να είναι πηγή έμπνευσης για τους μαθητές. Μέσα από μικρές παρεμβάσεις (ακόμη και ιστορικού περιεχομένου) μπορεί να διεγείρει τη φαντασία και το ενδιαφέρον τους, μπορεί να τους βοηθήσει να προσεγγίσουν με περισσότερη αγάπη τον ανεξάντλητο κόσμο της γεωμετρίας και των μαθηματικών γενικότερα.

Στο πρώτο κεφάλαιο, μετά από μια συνοπτική αναδρομή στη γεωμετρία πριν τον Ευκλείδη, αναλύεται η δομή των «Στοιχείων» του, γίνεται κριτική των ατελειών τους, αναφέρονται οι αρχές της σύγχρονης αξιωματικής μεθόδου και η χρήση των «μοντέλων» στον έλεγχο των σχετικών απαιτήσεών της. Τέλος, γίνεται μια σύντομη αναφορά στις μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες και παρουσιάζονται μερικά βασικά μοντέλα της Υπερβολικής και Ελλειπτικής Γεωμετρίας.

Το δεύτερο κεφάλαιο είναι αφιερωμένο σε μια στοιχειώδη εισαγωγή στην Προβολική Γεωμετρία. Αυτό γίνεται προκειμένου να δοθεί (σε πληρέστερη μορφή) ένα παράδειγμα αξιωματικού συστήματος για μια πολύ γενική μορφή μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας, θεμελιωμένο σύμφωνα με την άποψη του Hilbert. Τα βασικά συμπεράσματα του κεφαλαίου παρουσιάζονται εδώ σε αντιπαράθεση με τα αντίστοιχα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και μπορούν να ρίξουν φως στην τελευταία από μιαν άλλη οπτική γωνία. Ανάμεσα στ' άλλα, εξετάζεται και η περίπτωση πεπερασμένων επιπέδων, κάτι που συνήθως αγνοείται, και τα οποία έχουν ενδιαφέρουσες ιδιότητες. Επίσης, αναφερόμαστε στη σύγχρονη έννοια του «μορφισμού», που επεκτείνει τη συνήθη έννοια της απεικόνισης, όπως αυτή εφαρμόζεται στην περίπτωση του προβολικού επιπέδου. Τέλος, η σύντομη αναφορά στην αναλυτική πλευρά του πραγματικού προβολικού επιπέδου φέρνει τον/την αναγνώστη/στρια σε επαφή με τις ομογενείς συντεταγμένες και δίνει μια πρώτη γεύση της αλγεβροποίησης του (τυχόντος) προβολικού επιπέδου.

Το τρίτο κεφάλαιο αποτελεί εισαγωγή στη θεωρία των διαφορισίμων καμπυλών, με σκοπό να αναδειχθεί και από άλλη πλευρά η συμβολή του Διαφορικού Λογισμού στη μελέτη της γεωμετρίας. Ήδη οι διδάσκοντες/ουσες γνωρίζουν τη σημασία των παραγώγων στη γεωμετρική μελέτη του γραφήματος των (πραγματικών) συναρτήσεων μιας (πραγματικής) μεταβλητής. Εδώ επιχειρείται η διευρύνση του ρόλου των παραγώγων στη μελέτη των καμπυλών του τριδιάστατου χώρου (ειδική περίπτωση των οποίων αποτελεί το γράφημα μιας συνάρτησης, όπως προηγουμένως). Η «στρέψη» και η «καμπυλότητα» είναι τα δύο θεμελιώδη μεγέθη που χαρακτηρίζουν τις καμπύλες και, μαζί με το «συνοδεύον τρίεδρο» των Frenet-Serret, καθορίζουν ένα είδος «εσωτερικής» γεωμετρίας των καμπυλών.

Το τέταρτο κεφάλαιο, που αποτελεί και τη σημαντικότερη αλλαγή, είναι μία περιγραφική περιήγηση στη Θεωρία των Επιφανειών και την εξ αυτών (βάσει του Θεωρήματος Egregium του Gauss) απορρέουσα Θεωρία των Διαφορικών Πολλαπλοτήτων. Στόχος της αναφοράς στις τελευταίες είναι να επισημανθεί ο ρόλος τους στη διατύπωση του χωροχρόνου, όπως εμφανίζεται στην (Ειδική και Γενική) Θεωρία της Σχετικότητας του Einstein, και σε άλλους τομείς της σύγχρονης Φυσικής.

Όπως προαναφέρθηκε, το κείμενο αποτελεί ένα σύντομο βοήθημα, που έχει στόχο να καθοδηγήσει τον/την αναγνώστη/στρια στη μελέτη και άλλων πηγών, οι οποίες συνδέονται με τους σκοπούς αυτών των μεταπτυχιακών μαθημάτων, και σε καμιά περίπτωση δεν μπορούν να τις υποκαταστήσουν. Πιστεύουμε ότι, με αυτό το υπόβαθρο, οι ενδιαφερόμενοι/ες μπορούν να προχωρήσουν στη μελέτη και άλλων πιο εξειδικευκένων θεμάτων, τα οποία έχουν παραλειφθεί εδώ, σύμφωνα με τις κατευθυντήριες γραμμές και τους περιορισμούς του παρόντος βοηθήματος.

Ένα χρήσιμο εργαλείο για την κατανόηση των σχετικών εννοιών και μεθόδων αποτελούν και οι προτεινόμενες ασκήσεις. Για διευκόλυνση των αναγνωστών/στριών, στο τέλος των σημειώσεων παρατίθενται οι λύσεις των περισσοτέρων από αυτές, μερικές από τις οποίες είναι υποδειγματικά λυμένες, με αρκετές λεπτομέρειες. Οι αναγνώστες/στριες καλούνται να επιχειρήσουν να επεξεργαστούν τις ασκήσεις, πριν καταφύγουν στις λύσεις.

Στην παρούσα έκδοση, εκτός από την προσθήκη του τετάρτου κεφαλαίου, γίνεται χρήση (υπερ)συνδέσμων εντός του κειμένου, αλλά και σε τοποθεσίες του διαδικτύου, που διευκολύνουν την ηλεκτρονική ανάγνωση των σημειώσεων (μέσω υπολογιστή ή tablet). Επίσης, έχουν γίνει μερικές μικρές βελτιώσεις, και διορθώνονται διάφορες αβλεψίες προηγουμένων εκδόσεων, που ευγενώς επισημάνθηκαν από τους αναγνώστες. Ο συγγραφέας θα είναι ιδιαίτερα υποχρεωμένος σε όσους θα θελήσουν να του γνωστοποιήσουν * λάθη και ατέλειες που θα επισημάνουν και σ' αυτήν τη νέα έκδοση.

Ε.Β Αθήνα, Ιούλιος 2015.

* Ηλεκτρονική διεύθυνση: `evassil@math.uoa.gr`

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

1

Ευκλείδεια και μη Ευκλείδεια Γεωμετρία

Η υπόθεση ότι το άθροισμα των γωνιών [ενός τριγώνου] είναι μικρότερο από 180^o οδηγεί σε μια παράξενη Γεωμετρία, αρκετά διαφορετική από τη δική μας [την Ευκλείδεια] αλλά τελείως συνεπή, την οποία έχω αναπτύξει με όλη μου την ευχαρίστηση . . . Τα θεωρήματα αυτής της Γεωμετρίας φαίνονται παράδοξα και, για τον αμύητο, παράλογα· όμως ο ήρεμος, επίμονος στοχασμός αποκαλύπτει ότι δεν περιέχουν τίποτε το απίθανο

Απο γραμμα του K. F. Gauss (1824) [11, σελ. 109]

Στο κεφαλαιο αυτο γίνεται μία σύντομη αναδρομή σε μερικούς σταθμούς που σηματοδότησαν την εξέλιξη της γεωμετρίας. Αρχίζουμε με την αρχαία περίοδο και αναλύουμε την αξιωματική θεμελίωση του Ευκλείδη, η οποία έπαιξε ιδιαίτερο ρόλο στην εξέλιξη της γεωμετρίας (§§ 1.1–1.3).

Η κριτική του Ευκλειδείου συστήματος (§ 1.4) μας οδηγεί στις νεώτερες αντιλήψεις περί (γεωμετρικών) αξιωματικών συστημάτων, τη σημασία των μοντέλων στον έλεγχο των σχετικών ιδιοτήτων τους, καθώς και την κατά Hilbert αξιωματική θεμελίωση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας (§ 1.5).

Οι μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες (Υπερβολική και Ελλειπτική), δημιουργήματα μόλις του 19ου αιώνα, εξετάζονται στις §§ 1.6 και 1.7 αντιστοίχως, όπου και παρουσιάζονται σχετικά μοντέλα τους.

1.1 Η γεωμετρία πριν τον Ευκλείδη

Στην καθημερινή μας εμπειρία παρατηρούμε μια πληθώρα μορφών που, εδώ και αιώνες, τις αποκαλούμε γεωμετρικές, και αντιλαμβανόμαστε ένα είδος γεωμετρικής δομής μέσα στη φύση που μας περιβάλλει. Η αντίληψη αυτή ενισχύεται σήμερα και από την επιστήμη, η οποία μας αποκαλύπτει ότι παντού μέσα στη φύση υπάρχει μία «Γεωμετρία», η τάξη της οποίας υπόκειται της δομής όλων των πραγμάτων, από τα μόρια και τους κρυστάλλους μέχρι τους γαλαξίες, δηλαδή από τον μικρόκοσμο * μέχρι τον μακροκόσμο.

Στους αρχαιότατους χρόνους, όταν η επιστήμη ήταν ένα με τη θρησκεία και τη μαγεία, η βασική γνώση ήταν συγκεντρωμένη στα χέρια των ιερέων. Τα μαθηματικά (αριθμητική και γεωμετρία) της εποχής αυτής αποτελούσαν μέρος της μυστικής γνώσης και συχνά συνδέονταν με τον μυστικισμό. Αργότερα, η αρμονία, η οποία ενυπάρχει στις γεωμετρικές δομές, θεωρήθηκε έκφραση ενός «θεϊκού σχεδίου» που διέπει τον κόσμο (εξού και η γνωστή ρήση των Πυθαγορείων «*Αεί ο Θεός ο Μέγας γεωμετρεί*»).

Όμως, για να μπορέσει ο άνθρωπος να χειριστεί και να μελετήσει αυτές τις μορφές, είναι απαραίτητη η ιδεατή αναπαράστασή τους. Έτσι, ο κύκλος (ένα από τα αρχαιότερα σύμβολα που χάραξε ο άνθρωπος) μπορεί να θεωρηθεί ως η ιδεατή αποτύπωση του ηλιακού δίσκου και των περάτων του φυσικού ορίζοντα. Η (μαθηματική) σφαίρα παραπέμπει στον ουράνιο θόλο. Το επίπεδο της Στοιχειώδους Γεωμετρίας είναι η ιδεατή εικόνα της στάθμης του νερού που ηρεμεί κ.ο.κ.

Η αφαίρεση της καθημερινής εμπειρίας και η μεταφορά των απλών παρατηρήσεων στο επίπεδο μιας νοητικής διεργασίας αρχικά εξυπηρέτησε πρακτικές και τεχνικές ανάγκες (όπως, άλλωστε, συνέβη και στο ξεκίνημα κάθε επιστήμης). Έτσι, στην αρχαία Αίγυπτο η γεωμετρία χρησιμοποιήθηκε στην οριοθέτηση και τη *μέτρηση των γαιών*, απ᾽ όπου και ο όρος «γεωμετρία». Αυτό ήταν απαραίτητο μετά τις ετήσιες πλημμύρες του ποταμού Νείλου, προκειμένου να αποδοθούν και πάλι οι ιδιοκτησίες στους κατόχους τους και να επιμετρηθούν οι φορολογικές τους υποχρεώσεις στους Φαραώ. Αργότερα, πιο προχωρημένοι υπολογισμοί (πάντοτε εμπειρικοί και

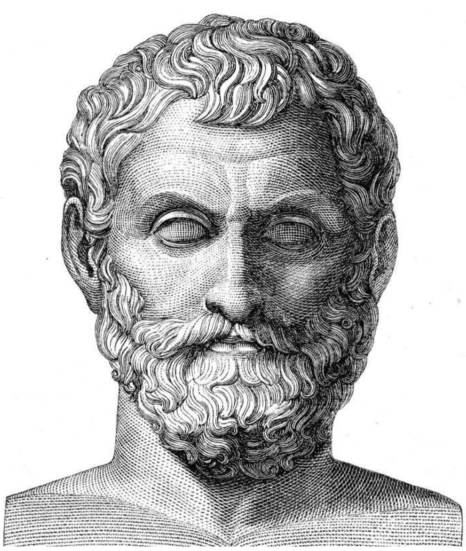
* Για την περιοχή της κβαντικής φυσικής υπάρχουν σοβαρά προβλήματα στην περιγραφή γεωμετρικών εννοιών, όπως αυτή του χώρου, λόγω των εξαιρετικά μικρών αποστάσεων που υπεισέρχονται στη μελέτη της.

πρακτικοί) χρησιμοποιήθηκαν στην οικοδόμηση των πυραμίδων. Ανάλογες πρακτικές ανάγκες εκάλυπτε η γεωμετρία και σε άλλους λαούς (Βαβυλωνίους, Κινέζους), όπως μαρτυρούν σύγχρονες αρχαιολογικές ανακαλύψεις.

Σε κάθε περίπτωση, η κατασκευή των πυραμίδων και άλλων τεχνικών έργων σηματοδοτεί μιαν αναμφισβήτητη πρόοδο. Όμως αυτή παρέμεινε καθαρά εμπειρική. Για παράδειγμα, διάφορα εμβαδά υπολογίζονταν κατά περίπτωση πρακτικά, χωρίς να υπάρχει ένας συγκεκριμένος τύπος ή αλγόριθμος για το κάθε είδος. Ομοίως και διάφοροι αριθμητικοί υπολογισμοί και πράξεις πραγματοποιούνταν κατά περίπτωση, χωρίς να ακολουθείται κάποιος κανόνας. Επομένως, οι πολιτισμοί της Αιγύπτου και της Βαβυλωνίας (στους οποίους εμφανίζονται οι παραπάνω χρήσεις της γεωμετρίας και της αριθμητικής), δεν έδωσαν στους Έλληνες, με τους οποίους ήρθαν σε επαφή, τίποτε το θεωρητικό, αλλά μια τεράστια συλλογή συγκεκριμένων μαθηματικών δεδομένων, με τη μορφή υπολογισμών ή απλών καταγραφών (βλ. τους μαθηματικούς πίνακες από τις ανασκαφές της Νινευή, τον πάπυρο Rhind και τον πάπυρο της Μόσχας). Όπως πολύ επιτυχημένα σχολιάζει ο L. Mlodinow (βλ. [26, σελ. 9]*), θα λέγαμε ότι οι Αιγύπτιοι και οι Βαβυλώνιοι μοιάζουν με τους κλασικούς βιολόγους και φυσιοδίφες, που με μεγάλη υπομονή και σχολαστικότητα καταλογογράφησαν τα είδη, και όχι με τους σύγχρονους γενετιστές που προσπαθούν να κατανοήσουν πώς αναπτύσσονται και λειτουργούν οι οργανισμοί.

Αντιθέτως, η μελέτη της γεωμετρίας, και των μαθηματικών γενικότερα, πέρα από τις πρακτικές ανάγκες, ως πνευματική αναζήτηση, ως θεωρητικό πρόβλημα, είναι κατάκτηση του αρχαίου ελληνικού πνεύματος. Είναι το αποτέλεσμα του ελληνικού ορθολογισμού, που προσπαθεί να βάλει τάξη στον περιβάλλοντα κόσμο και να τον ερμηνεύσει, αναζητώντας το «γιατί» και το «πώς» των φαινομένων.

Εδώ πρέπει να αναφερθεί πρώτα το όνομα του γεωμέτρη και φιλοσόφου Θαλή,



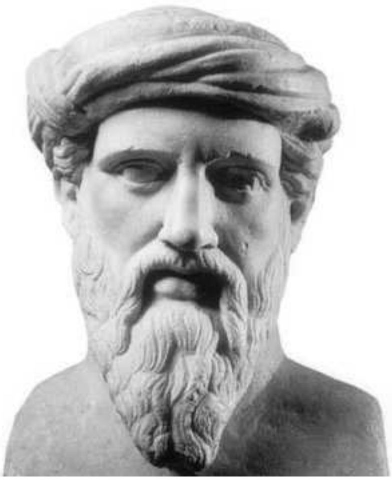
Εικονα 1. Θαλής

* Οι αριθμοί σε αγκύλες παραπέμπουν στη βιβλιογραφία.

ενός εκ των επτά Σοφών της αρχαίας Ελλάδας. Ο Θαλής, στο πλαίσιο του παραπάνω ορθολογισμού, αναζήτησε τη θεωρητική επεξήγηση των εμπειρικών δεδομένων των Αιγυπτίων. Θεωρείται ότι είναι ο πρώτος που συνέλαβε (και εφάρμοσε) την ιδέα της απόδειξης. Η χρήση των ομοίων τριγώνων τού επέτρεψε τον ακριβή υπολογισμό του ύψους των πυραμίδων (που, όπως προείπαμε, γινόταν μόνον εμπειρικά προηγουμένως). Η πρόβλεψη της έκλειψης του Ηλίου το 585 π.Χ. τον κατέστησε πρόσωπο μυθικό. Δίκαια τοποθετείται στο βάθρο του πρώτου επιστήμονα και μαθηματικού.

Ο Θαλής αναμφίβολα προετοίμασε τους Πυθαγορείους και απέδειξε πολλά θεωρήματα που περιέλαβε ο Ευκλείδης στα «Στοιχεία» του. Στον ίδιο αποδίδεται η έννοια της «ισότητας» ή «σύμπτωσης» των σχημάτων (όπως εννοείται σήμερα με τους ξενόγλωσσους όρους Kongruenz, congruence), σύμφωνα με την οποία δύο σχήματα είναι ίσα αν, με κατάλληλη κίνηση (μεταφορά και στροφή), το ένα μπορεί να συμπέσει με το άλλο. Προφανώς, οι μαθηματικές απόψεις και επιδόσεις του Θαλή δεν είναι αποκομμένες από τη φιλοσοφική του άποψη ότι η φύση έχει νόμους, τους οποίους μπορούμε να ανακαλύψουμε, ενώ μπορούμε να εξηγήσουμε τα φαινόμενα μέσω της παρατήρησης και της λογικής.

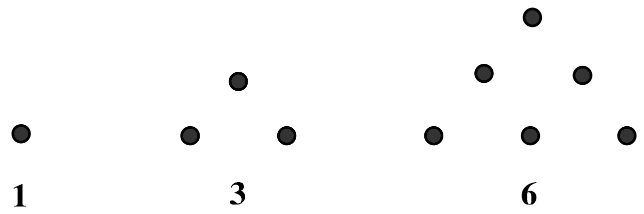
Μετά τον Θαλή, σταθμό στην εξέλιξη της μαθηματικής και φιλοσοφικής σκέψης αποτελεί το έργο του Πυθαγόρα και της Σχολής του. Εμπνευστής του πρώτου υπήρξε ο Θαλής.



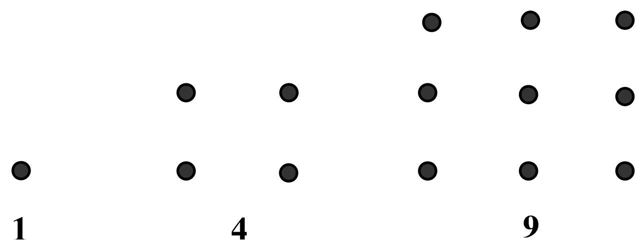
Εικονα 2. Πυθαγόρας

Ο Πυθαγόρας ανακάλυψε τους νόμους της αρμονίας και έδωσε στην αριθμητική τη μορφή θεωρητικής επιστήμης επί της οποίας στηρίχτηκε και η φιλοσοφική του διδασκαλία. Οι αριθμοί μπορούν να χωριστούν σε τριγωνικούς και τετραγωνικούς, συνδυασμοί των οποίων παράγουν ενδιαφέροντα αποτλέσματα. Αν φανταστούμε τους αριθμούς σαν τελείες ή πετραδάκια και τους τοποθετήσουμε σε κατάλληλους σχηματισμούς, μπορούμε να πάρουμε μερικές μορφές της ταξινόμησης αυτής που εμφανίζεται στην Εικόνα 3.

Στην ίδια Σχολή, μαζί με τη φιλοσοφία, τη μουσική και την αριθμητική, καλλιεργείται και η γεωμετρία : η απόδειξη του Πυθαγορείου Θεωρήματος, η μελέτη των κανονικών σχημάτων και στερεών, είναι μερικές μόνον από τις «γεωμετρικές» ενασχολήσεις της. Το Πυθαγόρειο Θεώρημα, με τη διττή του ερμηνεία, γεωμετρική και αριθμητική, εκφράζει μιαν ενότητα μεταξύ γεωμετρίας και αριθμητικής. Πριν από τους Πυθαγορείους, οι Βαβυλώνιοι είχαν καταγράψει τριάδες αριθμών (α, β, γ) που ικανοποιούν τη σχέση $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$, αλλά η γεωμετρική ερμηνεία και απόδειξη του θεωρήματος στη γενική του μορφή δόθηκε, για πρώτη φορά, από τους Πυθαγόρειους. Γενικά βλέπουμε ότι στο (μαθηματικό) πυθαγόρειο έργο υπάρχει μία σύζευξη της γεωμετρίας με την αριθμητική, κάτι που θα επαναληφθεί αργότερα –σε άλλη μορφή και με άλλο στόχο– από τον René Descartes [Καρτέσιο] (1596–1650) και τον φίλο του Pierre de Fermat (1601–1665). Φυσικά, αυτός ο συσχετισμός οδήγησε στην ανακάλυψη των ασυμμέτρων αριθμών, που ανέτρεψε τις φιλοσοφικές δοξασίες των Πυθαγορείων και οδήγησε στην παρακμή της Σχολής τους.



παραδείγματα τριγωνικών αριθμών

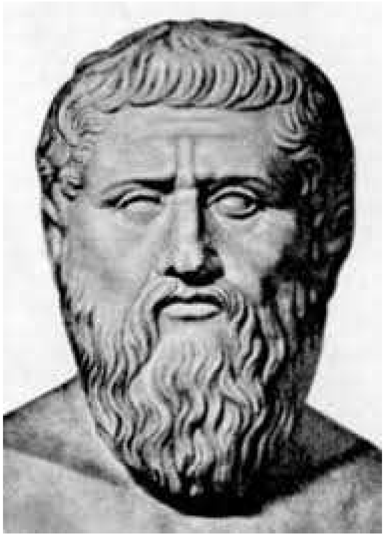


παραδείγματα τετραγωνικών αριθμών

Εικόνα 3. Πυθαγόρειοι αριθμοί

Τα Μαθηματικά, όρος που οφείλεται στους Πυθαγορείους, προφανώς σχετίζονται με τις φιλοσοφικές τους δοξασίες. Οι ίδιοι, αναζητώντας τη συμμετρία και την αρμονία του *κόσμου* (άλλος πυθαγορικός όρος κι αυτός), αναγνωρίζουν ουσιαστικά την ύπαρξη μιας γεωμετρικής δομής σ᾽ αυτόν. Όμως, η δομή αυτή συνδέεται με το *άρρητο* σχέδιο της δημιουργίας, που δεν μπορεί να γίνει αντιληπτό από τον άνθρωπο (πρβλ. «Αεί ο Θεός ο Μέγας γεωμετρεί»). Έτσι η κοσμογονία και η οντολογία των πυθαγορείων παραμένει «αριθμολογική». Άλλωστε, αιώνες αργότερα, ο L. Kronecker υποστήριξε ότι (παραφράζοντάς τον) «αεί ο Θεός γεωμετρεί και ο άνθρωπος κάνει αριθμητική».

Η γεωμετρία (και τα μαθηματικά γενικότερα) εξελίσσονται σημαντικά και στην Πλατωνική Ακαδημία. Τη σημασία που είχε η γεωμετρία για τον Πλάτωνα και τους μαθητές του περιγράφει με τον πιο εναργή τρόπο η επιγραφή, η οποία κοσμούσε την είσοδο της Ακαδημίας, το περίφημο «Μηδείς αγεωμέτρητος εισίτω».



ΕΙΚΟΝΑ 4. Πλάτων

Τα κανονικά πολύεδρα, γνωστά και ως πλατωνικά στερεά, κατέχουν ιδιαίτερη θέση στην πλατωνική φιλοσοφία και κοσμολογία. Στην Ακαδημία έδρασαν διάσημοι μαθηματικοί, όπως ο Εύδοξος ο Κνίδιος, οι αδελφοί Μέναιχμος και Δεινόστρατος, ο Θεαίτητος ο Αθηναίος, ο Ερμότιμος ο Κολοφώνιος και πολλοί άλλοι, ενώ δε φαίνεται να είχε κάποια ιδιαίτερη συμβολή στην ίδια τη γεωμετρία ο Πλάτων.

Φυσικά δεν πρέπει να παραλείψουμε και τους, εκτός της Πλατωνικής Ακαδημίας, Θεόδωρο τον Κυρηναίο (διδάσκαλο του Πλάτωνος), τον Αρχύτα τον Ταραντίνο (φίλο του Πλάτωνος), τον Φιλόλαο και τον Ιπποκράτη τον Χίο.

Για τις φιλοσοφικές θεωρήσεις της Σχολής των Πυθαγορείων και της Πλατωνικής Ακαδημίας, όπως και τη σχέση τους με τη φιλοσοφία των μαθηματικών, παραπέμπουμε στο [1].

Επειδή σκοπός αυτής της αναδρομής δεν είναι η παρουσίαση ούτε της ιστορίας της γεωμετρίας στην αρχαιότητα, ούτε των μεγάλων γεωμετρών και του έργου τους, αλλά μια απλή αναφορά σε μερικούς σταθμούς της προ-Ευκλείδειας περιόδου, θα έρθουμε αμέσως σ' αυτόν που σφράγισε την εξέλιξη της γεωμετρίας, των μαθηματικών γενικότερα καθώς και πολλών άλλων επιστημών, δηλαδή στον Ευκλείδη.

1.2 Ο Ευκλείδης και τα «Στοιχεία» του

Ο Ευκλείδης έζησε στην Αλεξάνδρεια και η ακμή του τοποθετείται περί το 300 π.Χ. Οι ημερομηνίες γέννησης και θανάτου του παραμένουν άγνωστες. Στο περίφημο έργο του *«Στοιχεία»* περιέλαβε το μεγαλύτερο μέρος της μέχρι τότε μαθηματικής γνώσης και οργάνωσε τη γεωμετρία κατά τρόπον αυστηρό, όπως απαιτούσε το πνεύμα της *λογικής* και της *ενότητας*, το οποίον του κληροδότησαν οι προηγούμενες γενιές των μαθηματικών και φιλοσόφων.

Εικονα 5. Ευκλείδης

Ο Ευκλείδης μπορεί να χαρακτηριστεί ως ο διαμορφωτής της μελέτης του 2-διάστατου χώρου μέσω της καθαρής σκέψης, χωρίς αναφορά στον φυσικό κόσμο. Το όνομά του ταυτίζεται με τη γεωμετρία. Σε πολλές προτάσεις έδωσε δικές του αποδείξεις, ενώ απλοποίησε άλλες προγενέστερες. Η ταξινόμηση της ύλης είναι υποδειγματική. Η λιτότητα και η όλη παρουσίαση δικαίως έκαναν τα «Στοιχεία» πρότυπο γραφής επιστημονικού συγγράματος.

Τα «Στοιχεία» του Ευκλείδη είναι το δεύτερο έργο που τυπώθηκε, μετά την Αγία Γραφή, και το δεύτερο παγκοσμίως σε πλήθος εκδόσεων έργο (και πάλι μετά την Αγ. Γραφή). Καθόρισε ουσιαστικά την εξέλιξη της μαθηματικής επιστήμης μέχρι τον 19ο αιώνα, χωρίς φυσικά να έχει καταργηθεί μέχρι σήμερα. Η ανακάλυψη του έργου αυτού στους Μεσαίους χρόνους εσήμανε την αφετηρία της αναγέννησης των επιστημών και του πνεύματος γενικότερα.

Τον τρόπο διατύπωσης των «Στοιχείων» μιμήθηκε στο φιλοσοφικό του έργο ο Baruch Spinoza (1632–1677). Ο Immanuel Kant (1724–1804), στο γνωστό φιλοσοφικό του έργο *«Κριτική του Καθαρού Λόγου»*, θεωρεί ότι η Ευκλειδεια Γεωμετρία είναι η μόνη γεωμετρία την οποίαν μπορεί να αντιληφθεί ο ανθρώπινος νούς, εξαιτίας της δομής του εγκεφάλου του. Αποτέλεσμα αυτού είναι ότι η γνώση του χώρου δεν είναι εμπειρική, αλλά υπάρχει a priori. Με τις διαδεδομένες αυτές απόψεις του διάσημου φιλοσόφου φοβόταν να αντιπαρατεθεί ο μεγάλος μαθηματικός Karl Friedrich Gauss (1775–1855), όταν ανακάλυψε (αρκετά μετά τον θάνατο του πρώτου) τη μη Ευκλείδεια Γεωμετρία, για τούτο –μαζί και με άλλους λόγους– δεν δημοσίευσε τίποτε σχετικό.

Πριν αναφερθούμε πιο διεξοδικά στη διάρθρωση των «Στοιχείων», ας κάνουμε ακόμη λίγα γενικά σχόλια : Η γεωμετρία αναφέρεται στην έννοια του *χώρου*, συστατικά του οποίου είναι τα *σημεία*, οι *ευθείες* και τα *επίπεδα*. Πρόκειται για έννοιες που, ενώ τις αντιλαμβανόμαστε στην καθημερινή μας εμπειρία, δεν μπορούμε να τις ορίσουμε με ακρίβεια. Επομένως δημιουργείται το εύλογο ερώτημα: πώς είναι δυνατόν να οικοδομηθεί αυστηρά η γεωμετρία, όταν τα ίδια τα δομικά στοιχεία της παραμένουν άγνωστα;

Εδώ η συμβολή του Ευκλείδη υπήρξε καταλυτική. Παρ' όλο που προσπάθησε (ανεπιτυχώς) να ορίσει τις παραπάνω έννοιες, η προσέγγισή του έκανε φανερό ότι στα μαθηματικά δεν μας ενδιαφέρει η ουσία των αντικειμένων που μας απασχολούν, αλλά *οι σχέσεις* μεταξύ αυτών (των αντικειμένων). Έτσι, αδιαφορώντας για την οντολογία των σημείων και των ευθειών, μπορούμε να ξεκινήσουμε με ένα σύστημα σχέσεων, δηλαδή με τα *αξιώματα*, των οποίων την αλήθεια δεχόμαστε εκ των προτέρων και, κατόπιν, με τη βοήθεια της λογικής (συν)επαγωγής, να προχωρήσουμε στην απόδειξη της ισχύος ή όχι κάθε άλλης γεωμετρικής σχέσης που μπορεί να διατυπωθεί.

Αυτή είναι η βασική ιδέα της *αξιωματικής θεμελίωσης* του Ευκλείδη. Τα αξιώματα βρίσκονται στην αφετηρία και είναι απαραίτητα για να μην περιπέσουν οι συλλογισμοί μας σε φαύλο κύκλο. Το σύστημα των αξιωμάτων πρέπει να καλύπτει, προφανώς, κάποιες ουσιαστικές απαιτήσεις. Θα πούμε περισσότερα για τη σύγχρονη αξιωματική μέθοδο στην § 1.4.

Ας ξαναγυρίσουμε τώρα στα «Στοιχεία». Το περιεχόμενό τους κατανέμεται σε

- *13 βιβλία* (κάτι σαν 13 κεφάλαια)

και αποτελείται από

- *23 όρους*,
- *5 αιτήματα*
- *7 (ή 9) κοινές έννοιες*,

και μέσω αυτών αποδεικνύονται

- *465 προτάσεις* (που αντιστοιχούν σε σημερινά θεωρήματα, προτάσεις, λήμματα και πορίσματα).

Τα βιβλία 1–4 περιέχουν τη βασική γεωμετρία του επιπέδου. Τα βιβλία 5–6 πραγματεύονται τη θεωρία των λόγων, ήτοι των συμμέτρων μεγεθών, και εισάγονται κατόπιν τα ασύμμετρα μεγέθη. Τα βιβλία 7–9 αναφέρονται στην αριθμητική. Στο 10ο βιβλίο ταξινομούνται γεωμετρικά οι ασύμμετροι αριθμοί. Στα βιβλία 11–12 εκτίθενται τα βασικά θεωρήματα της στερεομετρίας. Το 13ο και τελευταίο βιβλίο περιέχει την κατασκευή πέντε κανονικών πολυέδρων και την απόδειξη της μη ύπαρξης άλλων. Σημειώνουμε ότι μεταγενέστερα προστέθηκαν και άλλα δύο βιβλία, όμως αυτά δεν γράφτηκαν από τον Ευκλείδη.

Οι ***όροι*** αποτελούν ουσιαστικά τους ορισμούς εννοιών όπως σημείο, ευθεία γραμμή, γωνία, ορθή γωνία, κύκλος κλπ. Μερικοί απ' αυτούς (όπως ο κύκλος, οι παράλληλες ευθείες κλπ.) είναι ακριβείς, ενώ άλλοι (όπως το σημείο, η ευθεία κλπ.) είναι ασαφείς και χωρίς ιδιαίτερη αξία.

Όπως αναφέρθηκε και πιο πάνω, τα ***αιτήματα*** (ή ***αξιώματα***) αναφέρονται σε γεωμετρικές προτάσεις ή ιδιότητες, που συνδέουν απροσδιόριστους όρους και των οποίων η αλήθεια γίνεται δεκτή χωρίς απόδειξη. Συνήθως απορρέουν από την απλή παρατήρηση (μέσα στα στενά όρια της ανθρώπινης κλίμακας) ή από τη μελέτη ενός συγκεκριμένου παραδείγματος. Έτσι, η πρακτική διαπίστωση ότι, ανάμεσα σε δύο σημεία ενός κοινού επιπέδου, ή ενός φύλλου χαρτιού, χαράσσεται μία μόνον ευθεία, οδηγεί στη διατύπωση του πρώτου αξιώματος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας (που θα αναφέρουμε, μαζί με τα άλλα, πιο κάτω).

Οι ***κοινές έννοιες*** είναι προτάσεις των οποίων δεχόμαστε την αλήθεια (όπως και των αξιωμάτων), δεν αναφέρονται σε γεωμετρικές ιδιότητες ή σχέσεις, αλλά είναι κυρίως προτάσεις της Λογικής (για παράδειγμα: «Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα», «Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζὸν [ἐστιν]» κλπ.).

Σήμερα, χρησιμοποιούμε κυρίως τον (μεταγενέστερο) αριστοτελικό όρο αξίωμα για τα αιτήματα και τις κοινές έννοιες.

Οι ***προτάσεις*** (όπως και τα ***θεωρήματα*** κλπ.) είναι πλέον αποφάνσεις (συμπεράσματα) των οποίων η αλήθεια συνάγεται, με λογική διαδικασία, από τα αιτήματα και τις κοινές έννοιες, καθώς και από άλλα ήδη αποδειχθέντα θεωρήματα.

Στα «Στοιχεία» εφαρμόζονται οι ακόλουθες τρείς ***αποδεικτικές μέθοδοι***:

Η ***συνθετική***: Κατ᾽ αυτήν, προκειμένου να αποδείξουμε μια πρόταση, χρησιμοποιούμε τους ορισμούς, τα αξιώματα και άλλες ήδη γνωστές προτάσεις (που κι αυτές, με τη σειρά τους, απορρέουν από τα αξιώματα και τους ορισμούς) και με λογικούς συλλογισμούς καταλήγουμε στην πρός απόδειξη.

Η ***εις άτοπον απαγωγή***: Σύμφωνα μ᾽ αυτήν, αρχικά δεχόμαστε ότι αληθεύει κάποια πρόταση αντίθετη προς αυτήν που ζητούμε να αποδείξουμε. Χρησιμοποιώντας, όπως πριν, τα αξιώματα και άλλες γνωστές προτάσεις καταλήγουμε σε μία πρόταση η οποία αντιφάσκει είτε με κάποιο αξίωμα είτε με κάποιαν άλλη πρόταση, που ήδη έχει αποδειχθεί ότι αληθεύει. Η αντίφαση προκύπτει, προφανώς, επειδή ξεκινήσαμε από μια λαθεμένη υπόθεση και αίρεται αν δεχτούμε ότι αληθεύει η προς απόδειξη πρόταση. Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται ευρύτατα στα «Στοιχεία».

Η ***αναλυτική*** που βασίζεται στην εξής μεθοδολογία: Δεχόμαστε προς στιγμήν ότι η προς απόδειξη πρόταση P είναι αληθής. Απ᾽ αυτήν συνάγουμε την αλήθεια μιας πρότασης ή μιας αλυσίδας προτάσεων. Εφ᾽ όσον οι τελευταίες είναι αληθείς, τότε προφανώς είναι αληθής και η αρχική πρόταση P, καθ᾽ όσον μπορούμε συνθετικά πλέον να αναχθούμε σ᾽ αυτήν από τις προηγούμενες.

Μιλώντας κυριολεκτικά, πρέπει να κατατάξουμε την αναλυτική μέθοδο στις *ευρετικές* μεθόδους. Δεν χρησιμοποιείται εμφανώς από τον Ευκλείδη, αλλά είναι βέβαιον ότι ορισμένες (πολύπλοκες) αποδείξεις έχουν προκύψει από την εφαρμογή της, τουλάχιστον από προγενέστερους γεωμέτρες. Παρ᾽ όλο που η μέθοδος ανάγεται στους Πυθαγορείους, συστηματικός περί αυτής λόγος γίνεται στη «Συναγωγή» του Πάππου, και έχει δημιουργήσει σημαντικά προβλήματα ερμηνείας. Σχετικώς παραπέμπουμε και στο άρθρο [27].

1.3 Τα αξιώματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας

Θα διατυπώσουμε τα αξιώματα (αιτήματα) των «Στοιχείων» για να κάνουμε κατόπιν μια σύντομη κριτική, που θα δικαιολογήσει τις νεώτερες αναθεωρήσεις της θεμελίωσης του Ευκλείδη. Για διευκόλυνση, θα τα διατυπώσουμε σε μία μορφή απλούστερη από αυτήν που προκύπτει από την ακριβή μετάφραση της πρωτότυπης διατύπωσής τους. Για την αρχαιοελληνική μορφή τους και την ακριβή μετάφραση παραπέμπουμε στο [39].

Αξίωμα 1. *Από ένα σημείο άγεται σε ένα άλλο μία ευθεία γραμμή.*

Αξίωμα 2. *Κάθε πεπερασμένη ευθεία μπορεί να επεκτείνεται συνεχώς και ευθυγράμμως.*

Αξίωμα 3. *Μπορούμε να γράψουμε κύκλο με οποιοδήποτε κέντρο και οποιαδήποτε ακτίνα.*

Αξίωμα 4. *'Ολες οι ορθές γωνίες είναι ίσες.*

Αξίωμα 5. *Αν μία ευθεία, που τέμνει δύο άλλες, σχηματίζει τις εντός και επί τα αυτά γωνίες με άθροισμα μικρότερο των δύο ορθών, τότε οι δύο ευθείες, προεκτεινόμενες επ' άπειρον θα τμηθούν (συμπέσουν) και μάλιστα προς το μέρος όπου βρίσκοται οι γωνίες με το μιικρότερο των δύο ορθών άθροισμα.*

Τα δύο πρώτα αξώματα φαίνονται απλά και συμφωνούν με τη συνήθη εμπειρία. Το 3ο είναι πιο λεπτό και σημαίνει ότι δεχόμαστε πως το μήκος παραμένει αναλλοίωτο, καθώς κινούμαστε από σημείο σε σημείο κατά τη χάραξη του κύκλου. Δηλαδή δεχόμαστε ότι η απόσταση ορίζεται με τέτοιον τρόπο στο χώρο, ώστε να εξασφαλίζεται το αναλλοίωτό της. Το 4ο αξίωμα κι αυτό φαίνεται απλό και προφανές. Αλλά αν μπορεί να διαπιστωθεί «πειραματικά» στο χαρτί μας, αυτό δεν σημαίνει ότι αληθεύει και σε κάποιο άλλο σημείο του σύμπαντος (όπως μπορεί να συμβεί, άλλωστε, και με κάθε άλλο αξίωμα). Στην πραγματικότητα, το 4ο αξίωμα αποδέχεται την ομοιογένεια του χώρου. Τέλος, το 5ο αξίωμα, που είναι γνωστό και ως ***αξίωμα των παραλλήλων***, δεν φαίνεται ούτε τόσο απλό ούτε τόσο άμεσο όπως τα άλλα. Οφείλεται μάλλον αποκλειστικά στον Ευκλείδη και δεν πρέπει να περιείχετο στην προγενέστερη γεωμετρική γνώση που κατέγραψε αυτός, παρ' όλο που υποστήριζε ότι ήταν γνωστό στους Πυθαγορείους.

Η ιστορία του 5ου αξιώματος είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα. Ο ιδιος ο Ευκλείδης δεν το χρησιμοποίησε παρά μετά την 28η πρόταση. Λόγω της πολυπλοκότητας της αρχικής του διατύπωσης, οι μεταγενέστεροι μαθηματικοί το αντιμετώπισαν με κάποια αμηχανία, γι' αυτό πολλοί θεώρησαν ότι είναι απόρροια των προηγουμένων αξιωμάτων, συνεπώς είναι ένα θεώρημα. Αυτή η προσπάθεια της αναγωγής του 5ου αξιώματος στα άλλα άρχισε πολύ νωρίς μετά την εμφάνιση των «Στοιχείων» και συνεχίστηκε μέχρι τον 19ο αιώνα, οπότε τελικά αποδείχτηκε η ανεξαρτησία του [το 1868 από τον Eugenio Beltrami (1835–1900)].

Σημειώνουμε ότι όλες οι προτάσεις (μεταξύ αυτών και οι πρώτες 28 των «Στοιχείων», που μπορούν να αποδειχθούν χωρίς τη χρήση του αξιώματος των παραλλήλων, συνιστούν τη λεγόμενη ***Απόλυτη*** ή ***Ουδέτερη Γεωμετρία***.

Γνωρίζουμε σήμερα περί τις 28 απόπειρες απόδειξης του αξιώματος των παραλλήλων. Στην πραγματικότητα οδηγούν σε ισοδύναμες διατυπώσεις του, αφού όλες ξεκινούσαν με μια φαινομενικά προφανή υπόθεση, που στην ουσία της συνιστούσε ένα άλλο αξίωμα. Ας δούμε μερικές απ᾽ αυτές τις ισοδύναμες μορφές του 5ου αξιώματος.

1. *Από ένα σημείο εκτός ευθείας κείμενο άγεται προς αυτήν μία και μοναδική παράλληλη.*
2. *Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι δύο ορθές.*
3. *Υπάρχουν ζεύγη ομοίων τριγώνων.*
4. *Υπάρχει ζεύγος ευθειών που ισαπέχουν η μια της άλλης.*
5. *Δοθέντων τριών (διαφορετικών και μη συγγραμμικών) σημείων, υπάρχει κύκλος που διέρχεται δι᾽ αυτών.*
6. *Αν τρείς γωνίες ενός τετραπλέυρου είναι ορθές, τότε και η τέταρη γωνία είναι ορθή.*
7. *Αν μία ευθεία τέμνει μία από δύο δοθείσες παράλληλες ευθείες, τότε θα τέμνει και την άλλη.*

Η μορφή 1 είναι γνωστή ως αξίωμα του John Playfair (1748–1819) . Μ᾽ αυτήν αντικαθιστούμε σήμερα το 5ο αξίωμα, αφού έτσι είναι προφανώς πιο εύχρηστο. Η μορφή 3 οφείλεται στον John Wallis (1616–1703). Άλλοι γνωστοί μαθηματικοί που προσπάθησαν να αποδείξουν το 5ο αξίωμα είναι ο νεοπλατωνικός Πρόκλος ο Λύκιος ή Διάδοχος (410–485 μ.Χ.), ο Giovanni Gerolamo Saccheri (1667–1733) (που, όπως θα δούμε στη συνέχεια, μ᾽ αυτήν του την προσπάθεια ουσιαστικά έφτασε στην Υπερβολική Γεωμετρία) και ο Adrien-Marie Legendre (1752 –1833).

Η άρνηση του 5ου αξιώματος μπορεί να γίνει με δύο τρόπους:

α) *Δεχόμαστε ότι από σημείο εκτός ευθείας άγονται δύο ή και περισσότερες ευθείες παράλληλες προς τη δοθεισα.*

β) *Αρνούμαστε εξ ολοκλήρου την ύπαρξη της παραλληλίας ευθειών.*

Η άρνηση αυτή οδηγεί στη δημιουργία των λεγομένων μη Ευκλειδείων Γεωμετριών. Ακριβέστερα, η περίπτωση α) οδηγεί στην ***Υπερβολική Γεωμετρία***, ενώ η β) στην ***Ελλειπτική Γεωμετρία***. Και οι δύο δημιουργήθηκαν μόλις τον 19ο αιώνα και αποτελούν μια απο τις συναρπαστικότερες εξελίξεις στην ιστορία της γεωμετρίας. Θα επανέλθουμε σ᾽ αυτές σε επόμενες παραγράφους.

Πριν ασχοληθούμε με την κριτική της αξιωματικής θεμελίωσης του Ευκλείδη, ας αναφέρουμε συμπληρωματικά ότι, παράλληλα με την ανάπτυξη της γεωμετρίας, που ακολουθεί την εμφάνιση των «Στοιχείων», έχουμε μιαν εντυπωσιακή ανάπτυξη της αστρονομίας και της μηχανικής, αφού και οι δύο συνδέονται στενά με την πρώτη. Εδώ θα πρέπει να αναφέρουμε κυρίως τον Αρίσταρχο το Σάμιο (περίπου 310-250 π.Χ), πρόδρομο του ηλιοκεντρικού συστήματος, ο οποίος για πρώτη φορά υπολόγισε (έστω και χωρίς μεγάλη ακρίβεια) τη σχέση των αποστάσεων Ηλίου και Σελήνης απο τη Γη, τη σχέση των διαμέτρων τους κλπ., βασιζόμενος σε γεωμετρικές μεθόδους και μια μορφή πρωτόγονης τριγωνομετρίας· τον Ερατοσθένη (περίπου 275–195 π.Χ.), που μέτρησε τη διάμετρο της Γης, με εκπληκτική ακρίβεια για την εποχή του, χρησιμοποιώντας μιαν ευφυή μέθοδο· τον Ίππαρχο (2ος αιώνας π.Χ), που υπολόγισε την απόσταση και το μέγεθος του Ηλίου και της Σελήνης, και έβαλε τις βάσεις της τριγωνομετρίας· τον Πτολεμαίο Κλαύδιο (138–180 μ.Χ), που, μεταξύ των άλλων, στο έργο του «*Άπλωσις Επιφανείας*» εναφέρεται στη μελέτη προβολών για την κατασκευή χαρτών.

Ιδιαιτέρως, επίσης, πρέπει να μνημονευθεί και ο Αρχιμήδης (287–212 π.Χ.), μεγαλοφυής μαθηματικός, φυσικός και μηχανικός. Με την έξοχη «*μέθοδο της εξαντλήσεως*» υπολόγισε το εμβαδόν ποικίλων χωρίων και τον όγκο διαφόρων σωμάτων, κάνοντας κατάλληλες προσεγγίσεις μέσω εμβαδών απλών σχημάτων, θέτοντας έτσι τις βάσεις του Ολοκληρωτικού Λογισμού. Ο Αρχιμήδης θεωρείται η μεγαλύτερη μαθηματική και επιστημονική μορφή της αρχαιότητας και ένας από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς όλων των εποχών

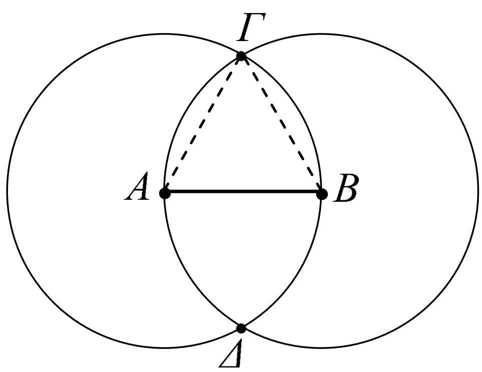
Η ανάπτυξη της γεωμετρίας συνεχίστηκε μετά το Ευκλείδη και τον Αρχιμήδη από τον Απολλώνιο (περίπου 260–200 π.Χ.), που θεωρείται ως ο τελευταίος μεγάλος γεωμέτρης της ελληνιστικής περιόδου. Στο οκτάτομο έργο του «*Κώνου Τομαί*» μελέτησε την έλλειψη, την παραβολή και την υπερβολή, τις οποίες θεώρησε τομές του κώνου με ένα επίπεδο κατάλληλης κλίσης. Η ιδέα αυτή μπορεί να θεωρηθεί και ως απαρχή της Προβολικής Γεωμετρίας (βλ. Κεφάλαιο 2), αφού οι προηγούμενες καμπύλες είναι προβολές (από την κορυφή του κώνου) της κυκλικής βάσης του στα διάφορα τέμνοντα επίπεδα.

Παρά την μετέπειτα σχετική κάμψη του ελληνικού πνεύματος, η μεγάλη γεωμετρική παράδοση συνεχίστηκε από σπουδαίους μαθηματικούς, όπως ο Νικομήδης, ο Διοκλής, ο Διόφαντος, ο Μενέλαος και ο Πάππος (με το έργο του «Συναγωγή»).

Μετά από αυτούς και, πολύ αργότερα, μετά τον τραγικό θάνατο της Υπατίας (5ος μ.Χ. αιώνας), που θεωρείται και η τελευταία μαθηματικός της αρχαίας εποχής, επήλθε η πλήρης στασιμότητα. Η αναγέννηση της γεωμετρίας άρχισε τον 16ο αιώνα με την Αναλυτική Γεωμετρία του Καρτέσιου (Descartes). Αργότερα, η εφαρμογή του Διαφορικού Λογισμού οδήγησε στη Διαφορική Γεωμετρία, η ανάπτυξη της οποίας υπήρξε ραγδαία και μαζί με τη σύγχρονη φυσική έχει αλλάξει την αντίληψή μας για τον κόσμο.

1.4 Κριτική των «Στοιχείων» και η αξιωματική θεμελίωση του D. Hilbert

Η προσεκτική μελέτη των «Στοιχείων», σε μεταγενέστερες εποχές, απεκάλυψε ότι ορισμένες αποδείξεις έχουν σημαντικές ατέλειες ή κενά, καθ' όσον βασίζονται σε διάφορες γεωμετρικές ιδιότητες, τις οποίες ο Ευκλείδης θεώρησε αυτονόητες, χωρίς όμως αυτές να μπορούν να δικαιολογηθούν ούτε από τους ορισμούς και τα αξιώματα, ούτε και να προκύπτουν από άλλες γνωστές προτάσεις.



Σχημα 1.1. Κατασκευή ισοπλεύρου τριγώνου.

Έτσι, ας πάρουμε, για παράδειγμα, την απόδειξη της Πρότασης 1 των «Στοιχείων», στην οποία κατασκευάζεται ισόπλευρο τρίγωνο με δεδομένη βάση AB. Η κορυφή του τριγώνου θα είναι μία από τις τομές του κύκλου που γράφεται με κέντρο το A και ακτίνα AB με τον κύκλο ίδιας ακτίνας και κέντρου B, όπως στο παραπάνω σχήμα. Πώς όμως εξασφαλίζεται αυτή η τομή; Προφανώς, η εμπειρική κατασκευή δεν αρκεί. Κανένα αξίωμα δεν απαγορεύει οι κύκλοι να έχουν πολύ μικρές οπές, όπως θα μπορούσε να συμβεί στην περίπτωση της γεωμετρίας που αναφέρεται σε σημεία με ρητές συντεταγμένες.

Έντονη κριτική δέχονται ακόμη: η μέθοδος της «υπέρθεσης» ή «επί-θεσης», δηλ. της μετακίνησης και τοποθέτησης ενός σχήματος επί ενός άλλου, με την οποίαν αποδεικνύεται η ισότητα δύο τριγώνων (βλ. π.χ. Πρόταση 4)· η συχνή χρήση της έννοιας «μεταξύ», που δεν ορίζεται πουθενά· η «επ' άπειρον και χωρίς όρια» επέκταση μιας γραμμής· οι ιδιότητες διαχωρισμού των σημείων και των γραμμών (δηλαδή η παραδοχή ότι ένα σημείο διαχωρίζει μια γραμμή σε δύο διακεκριμένα τμήματα, ενώ μία ευθεία χωρίζει το επίπεδο σε δύο διακεκριμένα σύνολα κλπ.).

Είναι αξιοσημείωτο ότι, παρά τις παραπάνω αδυναμίες, καμιά από τις προτάσεις των «Στοιχείων» δεν είναι λάθος (ως προς το τελικό συμπέρασμα). Όμως, χωρίς να μειώνεται στο ελάχιστο η αξία της ευκλείδειας προσέγγισης, έπρεπε να διορθωθούν οι ατέλειές της, σύμφωνα με τις απαιτήσεις της αυστηρότητας που χαρακτηρίζει (και) τα σύγχρονα μαθηματικά. Αυτό υπήρξε, περισσότερο από ποτέ, αναγκαίο μετά την ανακάλυψη των μη Ευκλειδείων Γεωμετριών, οπότε και έγινε εμφανέστερη η σημασία της τακτοποίησης του αξιωματικού συστήματος κάθε γεωμετρίας. Προς την κατεύθυνση αυτή εργάστηκαν διακεκριμένοι μαθηματικοί, όπως ο Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831–1916), ο Giuseppe Peano (1858–1932), ο David Hilbert (1862–1943) και ο George David Birkhoff (1884–1944).

Εδώ θα αναφερθούμε μόνον στην αξιωματική θεμελίωση της Ευκλείδειας Γεωμετρία από τον Hilbert (βλ. [18]), επειδή το σύστημά του είναι (παρά τον μεγάλο αριθμό αξιωμάτων) σχετικώς απλό και κοντά στο πνεύμα του Ευκλείδη.

Εικονα 6. David Hilbert

Εξ αρχής ο Hilbert θεωρεί ως πρωταρχικές έννοιες του συστήματος τις ακόλουθες ***απροσδιόριστες έννοιες***:

σημείο, ευθεία (γραμμή), επίπεδο, κείται (βρίσκεται) επί ,
μεταξύ, σύμπτωση/ισότητα (Kongruenz, congruence)

Τα αξιώματά του χωρίζονται, ανάλογα με το ρόλο τους, στις εξής κατηγορίες:

Κατηγορία I: *Αξιώματα σύνδεσης (ή συνοχής).*
Κατηγορία II: *Αξιώματα διάταξης.*
Κατηγορία III: *Αξιώματα σύμπτωσης/ισότητας (Kongruenz, congruence).*
Κατηγορία IV: *Αξίωμα της παραλληλίας.*
Κατηγορία V: *Αξιώματα συνεχείας.*

Στη συνέχεια αναφέρουμε, σε ελεύθερη μετάφραση, τα αξιώματα του Hilbert (βλ. επίση και τις σχετικες αποδόσεις των [11], [18], [39]). Ενδιαμέσως παρεμβάλλονται και μερικοί απαραίτητοι ορισμοί και συμβολισμοί.

I. Αξιώματα σύνδεσης

Τα αξιώματα της κατηγορίας αυτής συνδέουν τις απροσδιόριστες έννοιες σημείο, ευθεία και επίπεδο, δηλαδή καθορίζουν τις μεταξύ των σχέσεις.

I.1 Για κάθε δύο διαφορετικά σημεία A, B υπάρχει πάντοτε μία ευθεία ℓ που τα περιέχει. (Ισοδύναμη έκφραση: Από δύο διαφορετικά σημεία διέρχεται μία ευθεία.)

I.2 Για κάθε δύο διαφορετικά σημεία A, B υπάρχει μόνον μία ευθεία που τα περιέχει.

Η μοναδική ευθεία που περιέχει τα A, B, κατά τα προηγούμενα αξιώματα, συμβολίζεται με $\ell = AB = BA$

I.3 Κάθε ευθεία περιέχει τουλάχιστον δύο διαφορετικά σημεία. Υπάρχουν τουλάχιστον τρία διαφορετικά σημεία που δεν βρίσκονται (κείνται) στην ίδια ευθεία.

I.4 Τρία διαφορετικά σημεία A, B, C, τα οποία δεν βρίσκονται όλα στην ίδια ευθεία, ορίζουν ένα μοναδικό επίπεδο που τα περιέχει.

I.5 Αν δύο σημεία A, B μιας ευθείας ℓ βρίσκονται σε ένα επίπεδο Π, τότε και κάθε άλλο σημείο της ℓ βρίσκεται σο Π.

I.6 Αν δύο επίπεδα έχουν ένα κοινό σημείο, τότε έχουν ακόμη τουλάχιστον άλλο ένα κοινό σημείο.

I.7 Υπάρχουν τουλάχιστον τέσσερα διαφορετικά σημεία που δεν κείνται στο ίδιο επίπεδο.

II. Αξιώματα διάταξης

Τα αξιώματα αυτής της κατηγορίας καθορίζουν την έννοια του μεταξύ, μέσω της οποίας μπορεί να εισαχθεί μια έννοια διάταξης ανάμεσα στα σημεία μιας ευθείας, ενός επιπέδου ή του χώρου.

II.1 Αν ένα σημείο B κείται μεταξύ των σημείων A και C, τότε τα A, B, C είναι διαφορετικά σημεία της ίδιας ευθείας και το B βρίσκεται επίσης μεταξύ των C και A.

II.2 Για οποιαδήποτε διαφορετικά σημεία A, C, υπάρχει πάντοτε τουλάχιστον ένα σημείο B, που βρίσκεται μεταξύ των A και C.

II.3 Αν A, B, C είναι τρία διαφορετικά σημεία της ίδιας ευθείας, τότε μόνον ένα από αυτά βρίσκεται μεταξύ των δύο άλλων.

II.4 Έστω ότι A, B, C είναι τρία διαφορετικά σημεία που δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία, και ℓ είναι μία ευθεία που δεν περιέχει κανένα από τα προηγούμενα σημεία. Αν η ℓ διέρχεται από ένα σημείο του (ευθυγράμμου) τμήματος AB, τότε αυτή διέρχεται επίσης είτε από ένα σημείο του τμήματος AC, είτε από ένα σημείο του τμήματος BC.

> Το προηγούμενο αξίωμα είναι γνωστό και ως ***αξίωμα του Pasch*** [καθώς οφείλεται στον γερμανό γεωμέτρη Moritz Pasch (1843–1931)]. Για τη διατύπωσή του απαιτείται ο επόμενος ορισμός: Κάλούμε *ευθύγραμμο τμήμα AB* το σύνολο των σημείων μεταξύ των A και B. Το τμήμα AB είναι το ίδιο με το BA.

III. Αξιώματα σύμπτωσης/ισότητας (Kongruenz, congruence)

Η κατηγορία αυτών των αξιωμάτων ορίζει την έννοια της ισότητας και κατ᾽ επέκτασιν την έννοια της κίνησης, οπότε αξιωματικοποιείται η διαδικασία της μετακίνησης και υπέρθεσης, που χρησιμοποιείται στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη.

III.1 Αν A και B είναι διαφορετικά σημεία μιας ευθείας k και A' ένα σημείο μιας ευθείας ℓ, όχι κατ᾽ ανάγκην διαφορετικής της k, τότε σε μία καθορισμένη πλευρά της ℓ από το A' υπάρχει πάντοτε ένα μοναδικό σημείο B', έτσι ώστε το τμήμα AB είναι ίσο με το $A'B'$.

Το συμπέρασμα του προηγουμένου αξιώματος συμβολικά γράφεται: $AB \equiv A'B'$ (ή $AB \simeq A'B'$, ακόμη και $AB = A'B'$). Χρειαζόμαστε εδώ τους εξής ορισμούς: Μία *ημιευθεία* (ή ακτίνα) από το σημείο A προς το B αποτελείται από όλα τα σημεία C της ευθείας AB, έτσι ώστε το A να μην είναι μεταξύ των B και C. Επομένως, κάθε σημείο A μιας ευθείας ℓ ορίζει δύο ημιευθείες (της ℓ από το A), με μοναδικό κοινό σημείο το A. Μία *πλευρά* της ℓ από το A αποτελείται από όλα τα σημεία που βρίσκονται στην ίδια ημιευθεία της ℓ και είναι διαφορετικά από το A.

III.2 Αν $A'B' \equiv AB$ και $A''B'' \equiv AB$, τότε και $A'B' \equiv A''B''$.

Από τα προηγούμενα αξιώματα προκύπτει ότι η σύμπτωση (Kongruenz, congruence) είναι *σχέση ισοδυναμίας*.

III.3 Υποθέτουμε ότι A, B είναι σημεία μιας ευθείας k και A', B' σημεία μιας ευθείας ℓ (με $k = \ell$ ή $k \neq \ell$). Αν C είναι σημείο μεταξύ των A, B, και το C' σημείο μεταξύ των A', B', έτσι ώστε $AC \equiv A'C'$ και $CB \equiv C'B'$, τοτε είναι και $AB \equiv A'B'$.

Πριν τη διατύπωση των δύο επομένων αξιωμάτων δίνονται οι εξής ορισμοί: Δύο ημιευθείες h και k με κοινή αρχή (άκρο) το σημείο O, οι οποίες ανήκουν σε διαφορετικές ευθείες, λέμε ότι σχηματίζουν μία *γωνία* με *πλευρές* τις h, k, και κορυφή το O. Η γωνία αυτή συμβολίζεται με $\angle(h, k)$. Αν επί της h θεωρήσουμε ένα σημείο P και επί της k ένα σημείο Q (οπότε $h = OP$ και $k = OQ$), τότε την $\angle(h, k)$ συμβολίζουμε και με $\angle POQ$.

Από σχετική πρόταση (μέσω των ομάδων αξιωμάτων I και II) προκύπτει ότι κάθε ευθεία χωρίζει τα σημεία του επιπέδου, στο οποίο βρίσκεται, σε δύο *μέρη* ή *πλευρές* ως προς αυτήν. Χωρίς να καταφύγουμε στις τεχνικές λεπτοέρειες (που είναι αναγκαίες για την αυστηρή διατύπωση της πρότασης), είναι φανερόν ότι εδώ δικαιολογούνται πλήρως οι έννοιες του διαχωρισμού του επιπέδου σε δύο μέρη, των πλευρών μιας ευθείας στο επίπεδο κ.α., που χρησιμοποιούνται στα «Στοιχεία». Έτσι, μία γωνία χωρίζει το επίπεδο σε εσωτερικά και εξωτερικά σημεία, όπως τα αντιλαμβανόμαστε διαισθητικά (αλλά ορίζονται με κάθε αυστηρότητα στο προτεινόμενο αξιωματικό σύστημα).

Τέλος, ένα *τρίγωνο* ορίζεται από τρία διαφορετικά σημεία A, B, C και τα ευθύγραμμα τμήματα AB, BC AC. Το συμβολίζουμε με ABC.

III.4 Υποθέτουμε ότι $\angle(h, k)$ είναι μία γωνία ενός επιπέδου Π (με κορυφή O) και ℓ' ευθεία ενός επιπέδου Π' (όχι κατ᾽ ανάγκην διαφορετικού του Π). Θεωρούμε επίσης και μία καθορισμένη πλευρά του Π' ως προς την ℓ'. Αν h' είναι μία ημιευθεία της ℓ' με αρχή ένα σημείο O', τότε υπάρχει στο Π' μια μοναδική ημιευθεία k' (εκ του O'), τέτοια ώστε η $\angle(h', k')$ να είναι ίση με την $\angle(h, k)$ (συμβολικά: $\angle(h', k') \equiv \angle(h, k)$) και όλα τα εσωτρικά σημεία της $\angle(h', k')$ να βρίσκονται στην ίδια πλευρά του Π' ως προς την ℓ'.

III.5 Αν σε δύο τρίγωνα ABC και $A'B'C'$ ισχύουν οι ισότητες $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$ και $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$, τότε ισχύει επίσης και η ισότητα $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$.

IV. Αξίωμα των παραλλήλων

IV.1 (*Αξίωμα του Ευκλείδη*, με την ισοδύναμη διατύπωση του Playfair) Από ένα σημείο P εκτός ευθείας ℓ άγεται (στο επίπεδο που ορίζεται από το P και την ℓ) μία μοναδική ευθεία k παράλληλη προς την ℓ.

V. Αξιώματα συνεχείας

V.1 (*Αξίωμα του Αρχιμήδη* ή *αξίωμα της μέτρησης*) Αν AB και CD είναι δύο ευθύγραμμα τμήματα, τότε επί της ευθείας AB υπάρχει ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων A_1, $A_2, \ldots, A_\nu$, έτσι ώστε $AA_1 \equiv A_1A_2 \equiv A_2A_3 \equiv \cdots \equiv A_{\nu-1}A_\nu \equiv CD$ και το B να βρίσκεται μεταξύ των $A_{\nu-1}$ και A_ν.

V.2 (*Αξίωμα της γραμμικής πληρότητας*) Το σύστημα των σημείων μιας ευθείας, με τις σχέσεις της διάταξης και της ισότητας, δεν μπορεί να επεκταθεί (δηλ. να του επισυνάψουμε και άλλα σημεία) εις τρόπον ώστε να παραμένουν αληθείς οι σχέσεις που υφίστανται μεταξύ των στοιχείων του καθώς και οι βασικές ιδιότητες που απορρέουν από τα αξιώματα I–III και V.1.

Το αξίωμα V.1 (του Αρχιμήδη) και αξίωμα V.2 (της γραμμικής πληρότητας) ισοδυναμούν με το *αξίωμα (συνεχείας) του Dedekind* που έχει ως εξής:

> *Για κάθε διαμέριση των σημείων μιας ευθείας σε δύο μη κενά σύνολα, τέτοια ώστε κανένα σημείο του ενός να μην βρίσκεται μεταξύ δύο σημείων του άλλου, υπάρχει ένα σημείο του ενός συνόλου που βρίσκεται μεταξύ οποιουδήποτε σημείου αυτού του συνόλου και οποιουδήποτε σημείου του άλλου συνόλου.*

Για διάφορες προτάσεις που προκύπτουν από την εφαρμογή των παραπάνω αξιωμάτων και σχετικά σχόλια, παραπέμπουμε επίσης και στην ελληνική μετάφραση του [18].

Το αξιωματικό σύστημα του Hilbert είναι διατυπωμένο με τέτοιο τρόπο, ώστε να μην αναφέρεται κατ᾽ ανάγκην στον κόσμο της συνήθους εμπειρίας, προς την οποίαν ήταν περισσότερο προσανατολισμένο το σύστημα του Ευκλείδη. Έτσι τα σημεία μπορούν να αναφέρονται στα σημεία της εμπειρίας, όπως μας τα διδάσκει η Ευκλείδεια Γεωμετρία, αλλά και στα στοιχεία ενός συνόλου, τα οποία αυθαιρέτως καλούμε έτσι. Το ίδιο και για τις ευθείες, ενώ η σύμπτωση ενός σημείου και μιας ευθείας (δηλαδή το να κείται ένα σημείο επί μιας ευθείας ή όχι) περιγράφεται από μιαν αφηρημένη μαθηματική σχέση Θα τα δούμε όλα αυτά με περισσότερες λεπτομέρειες στο Κεφάλαιο 2.

Την άποψη αυτή για τη θεμελίωση της γεωμετρίας κατά τρόπο γενικό και αφηρημένο, δηλαδή χωρίς άμεση αναφορά στην εμπειρία, υποστηρίζει και ο Henri Poincaré (1854-1912) λέγοντας ότι: (βλ. [36, σελ. 161]):

Εικονα 7. Henri Poincaré

... Οι εκφράσεις «κείται επί, διέρχεται από», κλπ., δεν προορίζονται να ανακαλέσουν εικόνες· είναι απλώς συνώνυμα της λέξης προσδιορίζω. Οι λέξεις «σημείο, ευθεία και επιπέδο» αυτές καθ' εαυτές δεν πρέπει να προκαλούν στο πνεύμα καμία αισθητή παράσταση. Θα μπορούσαν αδιαφόρως να αποδίδουν αντικείμενα οποιασδήποτε φύσης, αρκεί να μπορούμε να εγκαθιδρύσουμε μεταξύ αυτών των αντικειμένων μιάν αντιστοιχία, τέτοια ώστε σε κάθε σύστημα δύο αντικειμένων, που καλούνται σημεία, να αντιστοιχεί ένα από τα αντικείμενα που καλούνται ευθείες, και ένα μόνον.

... Τοιουτοτρόπως, ο Κος Hilbert, για να το πούμε έτσι, προσπάθησε να θέσει τα αξιώματα σε μία τέτοια μορφή, που να μπορούν να εφαρμοστούν από οποιονδήποτε που δεν θα αντιλαμβανόταν το νόημά τους, γιατί δεν θα είχε δεί ποτέ ούτε σημεία, ούτε ευθεία, ούτε επίπεδο.

... Θα μπορούμε έτσι να κατασκευάσουμε όλη τη γεωμετρία, δεν θα έλεγα ακριβώς χωρίς να καταλαβαίνουμε τίποτε, αφού θα συλλάβουμε τη λογική αλληλουχία των προτάσεων, αλλά το λιγότερο χωρίς να βλέπουμε τίποτε σ' αυτήν. Θα μπορούσαμε να εμπιστευθούμε τα αξιώματα σε μία λογική μηχανή, για παράδειγμα στο «λογικό πιάνο» του Stanley Jevons, και θα βλέπαμε να βγαίνει απ' αυτό όλη η γεωμετρία.

Το ακριβές κείμενο στα γαλλικά έχει ως εξής:

... Les expressions "être situé sur, passer par", etc., ne sont pas destinées à évoquer des images; elles sont simplement des synonymes du mot déterminer. Les mots "point, droite et plan" eux-mêmes ne doivent provoquer dans l' esprit aucune représentation sensible. Ils pourraient indifféremment désigner des objets d' une nature quelconque, pourvu qu' on pût établir entre ces objets une correspondance telle qu' à tout système de deux objets appelés points correspondît un des objets appelés droites et un seul.

... Ainsi M. Hilbert a, pour ainsi dire, cherché à mettre les axiomes sous une forme telle qu' ils puissent être appliquées par quelqu' un qui n' en comprendrait pas le sens, parce qu' il n' aurait jamais vu ni points, ni droite, ni plan.

... On pourra ainsi construire toute la géométrie, je ne dirais pas précisement sans y rien comprendre, puisqu' on saisira l' enchaînement logique des propositions, mais tout au moins sans y rien voir. On pourrait confier les axiomes à une machine à raisoner, par example au "piano raisoneur" de Stanley Jevons, et on en verrair sortir toute la géométrie.

1.5 Τα σύγχρονα γεωμετρικά συστήματα

Όπως προκύπτει απ' όσα αναφέραμε μέχρις εδώ, ένα σύγχρονο αξιωματικό σύστημα για τη θεμελίωση μιας γεωμετρίας περιέχει τα εξής στοιχεία:

- Απροσδιόριστους όρους (δηλαδή μη οριζόμενες αρχικές έννοιες, όπως σημείο, ευθεία κλπ.).
- Ορισμούς (όπως παραλληλία ευθειών, κύκλος, τρίγωνο κλπ.).
- Αξιώματα (όπως τα αξιώματα του Ευκλείδη, του Hilbert).
- Ένα λογικό σύστημα (όπως αυτό της Αριστοτέλειας Λογικής).
- Θεωρήματα, Προτάσεις κλπ. (που συνάγονται από τα τρία πρώτα στοιχεία, μεσω του λογικού συστήματος).

Ταυτόχρονα, πρέπει το σύστημα να ικανοποιεί και τις ακόλουθες απαιτήσεις:

1. Να είναι ***συνεπές*** (consistent), δηλαδή να μην υπάρχουν αξιώματα ή θεωρήματα που αντιφάσκουν μεταξύ τους. Η σημασία της συνέπειας είναι προφανής. Ποιά αξία θα είχε ένα σύστημα στο οποίο θα μπορούσαν να ισχύουν ταυτόχρονα ένα συμπέρασμα και η άρνησή του;
2. Να είναι ***ανεξάρτητο*** (independent), δηλαδή κανένα αξίωμα να μην προκύπτει (αποδεικνύεται) από άλλα αξιώματα. Τέτοια αξιώματα καλούνται επίσης *ανεξάρτητα*.
3. Να είναι ***πλήρες*** (complete), δηλαδή, για κάθε πρόταση που μπορεί να διατυπωθεί με τους όρους και τα αξιώματα του συστήματος, θα πρέπει να μπορούμε να αποφανθούμε για την ισχύ ή όχι της πρότασης. Αυτό, ισοδύναμα, σημαίνει ότι δεν είναι δυνατόν να προσθέσουμε στο σύστημα κι ένα άλλο ανεξάρτητο αξίωμα.

Ο άμεσος έλεγχος των παραπάνω απαιτήσεων είναι κάτι εξαιρετικά δύσκολο, αν όχι αδύνατο. Ιδιαιτέρως η δυνατότητα της πληρότητας τίθεται υπό αμφισβήτηση πλέον, μετά την απόδειξη [από τον Kurt Gödel(1906–1978)] της μη πληρότητας της Αριθμητικής, αλλά και κάθε άλλου αξιωματικού συστήματος που περιέχει αποτελέσματα της στοιχειώδους Θεωρίας Αριθμών.

Για τον έλεγχο της συνέπειας και ανεξαρτησίας ενός συστήματος καταφεύγουμε στα (γεωμετρικά) ***μοντέλα***. Ακριβέστερα, ένα μοντέλο για ένα (γεωμετρικό) αξιωματικό σύστημα προκύπτει όταν στους απροσδιόριστους όρους του συστήματος δώσουμε μια συγκεκριμένη ερμηνεία, έτσι ώστε τα αξιώματα να είναι τώρα αληθείς προτάσεις για τα αντικείμενα της ερμηνείας. Τα μοντέλα μπορεί να αναφερονται είτε στον φυσικό κόσμο είτε σε άλλα αξιωματικά συστήματα.

Η ύπαρξη μοντέλου για ένα αξιωματικό σύστημα συνεπάγεται τη συνέπεια του τελευταίου. Αυτό είναι προφανές, αρκεί να σκεφτούμε ότι η ασυνέπεια μεταξύ αξιωμάτων θα οδηγούσε σε αντίφαση αληθών (στο μοντέλο) προτάσεων. Ομοίως και οποιαδήποτε αντίφαση αξιωμάτων με θεωρήματα ή αντίφαση μεταξύ θεωρημάτων. Φυσικά, αν μια πρόταση αληθεύει σε ένα μοντέλο, δεν σημαίνει ότι είναι και θεώρημα του αντίστοιχου αξιωματικού συστήματος.

Απ' το άλλο μέρος, η ανεξαρτησία ενός συστήματος οδηγεί, προφανώς, στην επιλογή του ελαχίστου αριθμού αξιωμάτων που είναι απαραίτητα. Βέβαια, όσο πιο λίγα είναι τα αξιώματα, τόσο δυσκολότερες είναι οι αποδείξεις (τουλάχιστον ενός αρχικού αριθμού βασικών προτάσεων) και τόσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός των προς απόδειξη προτάσεων.

Μια συνήθης διαδικασία ελέγχου της ανεξαρτησίας ενός αξιωματικού συστήματος (μέσω μοντέλων) είναι η εξής: Έστω ότι θέλουμε να ελέγξουμε την ανεξαρτησία του αξιώματος X στο αξιωματικό σύστημα $\mathcal{S}$. Θεωρούμε το αύστημα $\mathcal{S}'$ που προκύπτει από το $\mathcal{S}$, όταν στη θέση του X βάλουμε την άρνησή του, και προσπαθούμε να κατασκευάσουμε ένα μοντέλο $\mathcal{M}'$ για το $\mathcal{S}'$. Αν κατασκευάζεται ένα $\mathcal{M}'$, τότε το X είναι ανεξάρτητο, επειδή τα αξιώματα του $\mathcal{S}'$ είναι αληθείς προτάσεις στο $\mathcal{M}'$. Πράγματι, αν το X ήταν εξηρτημένο, θα ήταν ένα θεώρημα που θα προέκυπτε από τα υπόλοιπα αξιώματα του $\mathcal{S}$, συνεπώς θα ήταν και μία αληθής πρόταση στο $\mathcal{M}'$, πράγμα που δεν μπορεί να συμβεί αφού στο ίδιο το $\mathcal{M}'$ αληθεύει η άρνηση του X. Προφανώς μια τέτοια διαδικασία είναι επίπονη και θα πρέπει να κατασκευαστούν τόσα μοντέλα, όσος είναι ο αριθμός των αξιωμάτων του συστήματος.

Στη συνέχεια θα δούμε μερικά μοντέλα μη Ευκλειδείων Γεωμετριών, ενώ στο Κεφάλαιο 2 θα δούμε μοντέλα του συσχετισμένου και του προβολικού επιπέδου.

1.6 Η Υπερβολική Γεωμετρία

Είπαμε πιο πάνω ότι οι μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες, στις οποίες ανήκει η Υπερβολική Γεωμετρία που θα εξετάσουμε με συντομία εδώ, είναι δημιούργημα του 19ου αιώνα. Προέκυψαν από τη συστηματική μελέτη της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, ιδιαιτέρως από τις προσπάθειες απόδειξης του 5ου αξιώματος του Ευκλείδη (αξίωμα των παραλλήλων). Επειδή πολλά συμπεράσμα τους ήσαν παράξενα, σε σχέση με αυτά της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, συνάντησαν την άρνηση. Παρά το γεγονός ότι ο φιλόσοφος I. Kant είχε πεθάνει από το 1808, οι απόψεις του επί της γεωμετρίας εξακολουθούσαν να επηρεάζουν πολλούς, εξού και η πολεμική τους κατά της νέας γεωμετρίας που εμφανίστηκε σχεδόν μια εικοσαετία αργότερα.

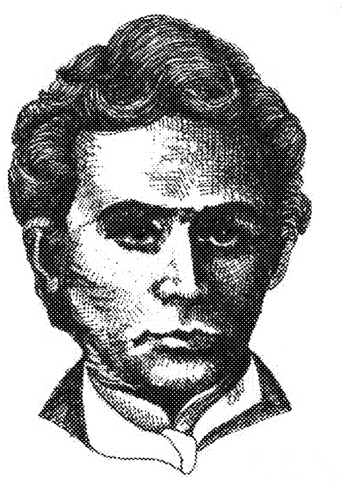
Όπως επίσης αναφέραμε στην Παράγραφο 1.3, το ερώτημα της ανεξαρτησίας του 5ου αξιώματος επιλύθηκε οριστικά το 1868 από τον E. Beltrami, οποίος κατεσκεύασε ένα μοντέλο της Υπερβολικής Γεωμετρίας (βλ. πιο κάτω τα περί ψευδόσφαιρας).

Η σχετική διαδικασία γίνεται όπως περιγράφεται στην προηγούμενη παράγραφο: Το αξιωματικό σύστημα $\mathcal{S}'$ της Υπερβολικής Γεωμετρίας προκύπτει από το σύστημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας $\mathcal{S}$ με την αντίστοιχη άρνηση του 5ου αξιώματος. Για το $\mathcal{S}'$ κατασκευάζεται ένα μοντέλο (ψευδόσφαιρα) στο οποίον αληθεύουν, ως θεωρήματα πλέον, τα αξιώματα του $\mathcal{S}'$, επομένως, όπως εξηγήσαμε, το 5ο αξίωμα είναι ανεξάρτητο.

Η κατανόηση των μη Ευκλειδείων Γεωμετριών (ιδιαίτερα της Ελλειπτικής) ήταν αρκετά δύσκολη μέχρι την ανακάλυψη μερικών απλών μοντέλων, τα οποία θα περιγράψουμε στη συνέχεια.

Υπενθυμίζουμε ότι (βλ. σελίδα 11) η Υπερβολική Γεωμετρία προκύπτει όταν, στη θέση του 5ου αξιώματος, δεχτούμε ότι ισχύει το

> ***Υπερβολικό αξίωμα:*** *Από σημείο εκτός ευθείας άγονται προς αυτήν δύο ή περισσότερες παράλληλες,*



Εικονα 8. Janos Bolyai

ενώ διατηρούνται τα υπόλοιπα τέσσερα αξιώματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Η αλλαγή αυτή δεν επηρεάζει ολόκληρο το οικοδόμημα της τελευταίας. Πολλές προτάσεις της εξακολουθούν να ισχύουν (εφ' όσον δεν βασίζονται στο 5ο αξίωμα, άρα αποτελούν μέρος της Απόλυτης Γεωμετρίας). Τα περισσότερα όμως συμπεράσματα της Ευκλειδειας Γεωμετρίας ανατρέπονται και οδηγούν σε περίεργα (για την ανθρώπινη εμπειρία) συμπεράσματα, όπως ότι «το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι μικρότερο των δύο ορθών», «δύο τρίγωνα με ίσες γωνίες είναι ίσα» και πολλά άλλα.

Θεωρούμε δημιουργούς της Υπερβολικής Γεωμετρίας τον Ούγγρο Janos W. Bolyai (1802–1860) και τον Ρώσο Nikolai I. Lobachewsky (1793–1856), οι οποίοι δημοσίευσαν τα αποτελέσματά τους (ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλον) το 1829 και 1832 αντίστοιχα.

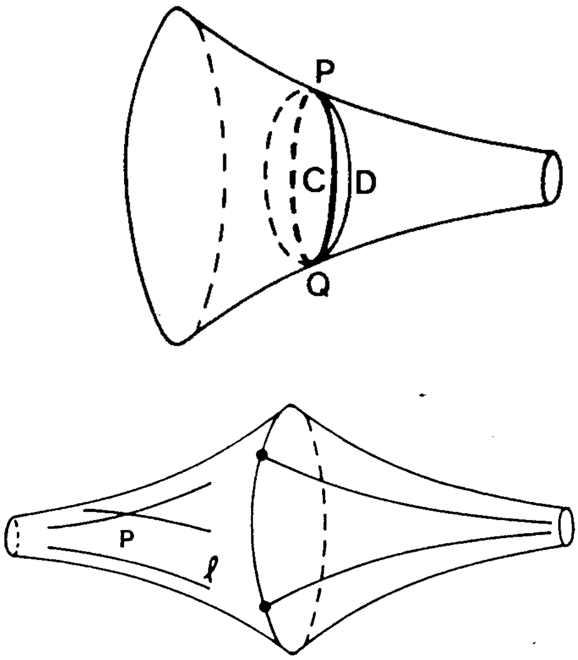
ΕΙΚΟΝΑ 9. Nikolai I. Lobachewsky

Επίσης και ο μεγάλος μαθηματικός K. F. Gauss (1775–1855) είχε ανακαλύψει αυτή τη γεωμετρία πριν τις δημοσιεύσεις των άλλων, όπως μαρτυρούν διάφορες επιστολές του, καθώς και τα ημερολόγιά του, που είδαν το φώς της δημοσιότητας περίπου σαράντα χρόνια μετά τον θάνατό του. Όμως ο Gauss δεν δημοσίευσε τίποτε, αφ' ενός μεν φοβούμενος τις «φωνές των Βοιωτών», δηλαδή τις αντιδράσεις αυτών που δεν θα μπορούσαν να κατανοήσουν τη νέα γεωμετρία, αφ' ετέρου δε λόγω της επιθυμίας του οι εργασίες του να είναι άψογες από κάθε άποψη, γι' αυτό και οι δημοσιεύσεις του είναι λίγες, σε σχέση με την πληθώρα των αποτελεσμάτων που περιέγραφε στα ημερολόγιά του. Για λεπτομέρειες σχετικές με τη ζωή και τις δραστηριότητες των προηγουμένων παραπέμπουμε π.χ. στους [8], [11], [15] και [20].

Εδώ πρέπει να αναφέρουμε ότι ένας σημαντικός αριθμός αποτελεσμάτων της Υπερβολικής Γεωμετρίας είχαν ανακαλυφθεί και από τον Ιταλό Gerolamo Saccheri (1667–1773), σχεδόν εκατό χρόνια πριν την επίσημη εμφάνισή της. Αυτά προέκυψαν από την προσπάθειά του να αποδείξει ότι το 5ο αξίωμα του Ευκλείδη δεν ήταν ανεξάρτητο! Υποθέτοντας λοιπόν το αντίθετο, κατέληξε (μέσω διαφόρων σκέψεων για το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου, που στο πλαίσιο της Απόλυτης Γεωμετρίας δεν μπορεί να υπερβαίνει τις δύο ορθές) σε συμπεράσματα ριζικά αντίθετα από αυτά της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Επειδή αυτό συνιστούσε, κατά την άποψή του, αντίφαση (αφού μέχρι τότε ήταν εδραιωμένη η πεποίθηση ότι η Ευκλείδεια Γεωμετρία ήταν η μόνη δυνατή), θα έπρεπε να δεχθεί την εξάρτηση του αξιώματος και, κατά συνέπεια, την ισχύ της Απόλυτης Γεωμετρίας. Κατ' αυτόν τον τρόπο ο Saccheri όχι μόνον υπέπεσε σε λογικό λάθος, αλλά έχασε και την ευκαιρία να θεωρηθεί ο πατέρας της Υπερβολικής Γεωμετρίας, αφού τα συμπεράσματά της, στα οποία έφτασε, τα απέρριψε ως «απεχθή».

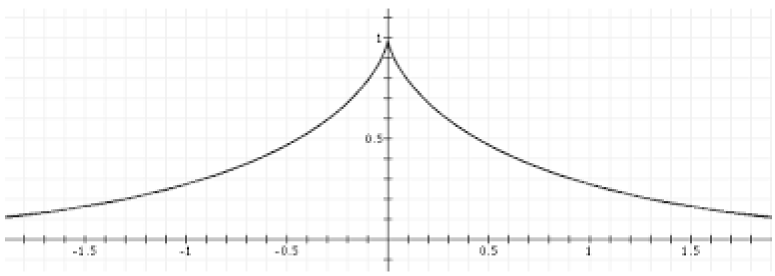
Επίσης ο Γερμανός Μαθηματικός Johann Lambert (1728–1777) είχε πλησιάσει πολύ στην ανακάλυψη της Υπερβολικής Γεωμετρίας, αφού διεπίστωσε ότι η άρνηση του αξιώματος των παραλλήλων οδηγεί σε τρίγωνα με άθροισμα γωνιών διαφορετικό από τις 180°, καθώς και στην ανυπαρξία ομοίων τριγώνων. Απέρριψε όμως τα συμπεράσματα αυτά, θεωρώντας ότι οδηγούν σε αντιφάσεις. Σχετικές λεπτομέρειες αναφέρονται στο [32].

Το πρώτο μοντέλο Υπερβολικής Γεωμετρίας αποτελεί η ***ψευδόσφαιρα*** (pseudosphere) που πρότεινε ο E. Beltrami το 1868. Πρόκειται για την επιφάνεια που αποτελείται από μία ή δύο χοάνες, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



Σχημα 1.2. Όψεις της ψευδόσφαιρας (από το βιβλίο [11]).

Η ψευδόσφαιρα παράγεται από την περιστροφή (εδώ) περί τον άξονα των x της καμπύλης που καλείται ***έλκουσα*** (tractrix) και απεικονίζεται στο επόμενο σχήμα.



Σχημα 1.3. Η έλκουσα (από το http://Tractrix)

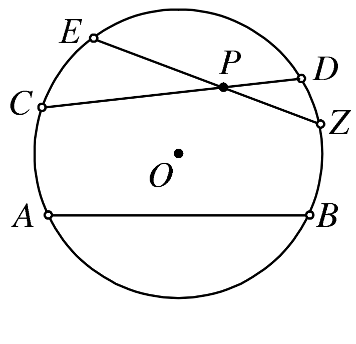
Πολύ περιγραφικά η έλκουσα παράγεται ως εξής: Υποθέτουμε ότι στο σημείο $(0, 1)$ τοποθετείται ένα αντικείμενο, ενώ στην αρχή των αξόνων στέκεται ένας παρατηρητής που συνδέεται με το αντικείμενο με μία αλυσίδα μήκους 1. Καθώς ο παρατηρητής κινείται στον άξονα των x κατά τη θετική φορά, το αντικείμενο (κινούμενο εκτός του άξονος των y) διαγράφει το δεξιό τμήμα της καμπύλη. Ανάλογα σχηματίζεται και το αριστερό τμήμα. Χαρακτηριστικό της έλκουσας είναι το ότι το μήκος της εφαπτομένης, από το σημείο επαφής μέχρι το σημείο τομής της με τον άξονα των x, είναι σταθερά 1.

Στη Διαφορική Γεωμετρία των Επιφανειών αποδεικνύεται ότι η ψευδόσφαιρα έχει σταθερή *αρνητική καμπυλότητα Gauss*, αντίθετα από τη συνήθη σφαίρα του τριδιάστατου χώρου, που έχει σταθερή θετική καμπυλότητα (για την έννοια της καμπυλότητας παραπέμπουμε στις Σημειώσεις μας [7]).

Στην περίπτωση αυτού του μοντέλου θεωρούμε ως σημεία της Υπερβολικής Γεωμετρίας τα σημεία της επιφάνειας της ψευδόσφαιρας, ενώ ως ευθείες θεωρούμε τις λεγόμενες ***γεωδαισιακές γραμμές*** της ίδιας επιφάνειας. Οι τελευταίες είναι το ανάλογο των ευθειών του (Ευκλειδείου) επιπέδου για μια επιφάνεια. Ακριβέστερα, μία γεωδαισιακή είναι η καμπύλη, η οποία έχει το μικρότερο μήκος από όλες τις καμπύλες που συνδέουν δύο σημεία, συνεπώς μετρά την απόσταση μεταξύ σημείων της επιφάνειας. Οι γεωδαισιακές της ψευδόσφαιρας είναι καμπύλες όπως η ℓ και οι δύο καμπύλες που περνούν από το P (βλ. το δεύτερο σχήμα). Στο ίδιο σχήμα φαίνεται ότι από το σημείο P, που βρίσκεται εκτός της ℓ, διέρχονται περισσότερες της μιας ευθείες που δεν τέμνουν την ℓ.

Όμως το μοντέλο αυτό δεν είναι ένα πλήρες μοντέλο της Υπερβολικής Γεωμετρίας με την έννοια οτι δεν ισχύουν όλα τα αξιώματα της. Πράγματι, δεν ίσχύει το αξίωμα 2, καθ᾽ όσον μια γεωδαισιακή, όπως η ℓ, δεν μπορεί να επεκταθεί «ομαλά» πάνω από τα σημεία επαφής των δύο χοανών. Με τον όρο ομαλά εννοούμε ότι η καμπύλη έχει εφαπτόμενες σε όλα τα σημεία της, πράγμα που δεν συμβαίνει στα σημεία επαφής των χοανών. Στα ίδια σημεία η επιφάνεια δεν διαθέτει εφαπτόμενα επίπεδα (βλ. και [7]). Επίσης πρέπει να τονιστεί ότι κύκλοι όπως ο C του σχήματος δεν είναι γεωδαισιακές, όπως μπορεί να φανεί εκ πρώτης όψεως.

Επομένως, η ψευδόσφαιρα δεν αποδεικνύει τη συνέπεια της Υπερβολικής Γεωμετρίας. Αργότερα ο Hilbert απέδειξε ότι οι επιφάνειες αρνητικής καμπυλότητας *δεν* μπορούν να δημιουργήσουν μοντέλα της Υπερβολικής Γεωμετρίας. Σε κάθε περίπτωση όμως το μοντέλο του Beltrami βοήθησε τη διάδοση της γεωμετρίας αυτής και την αναζήτηση ακριβέστερων μοντέλων.



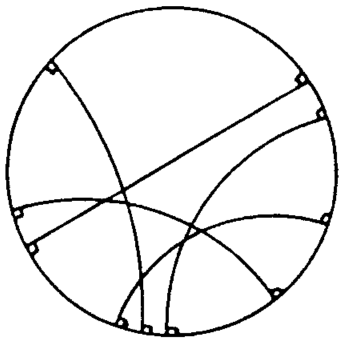
Σχημα 1.4. Ο δίσκος των Klein-Beltrami (από το βιβλίο [5])

Τα πράγματα έγιναν απλούστερα με τον ***δίσκο των Klein-Beltrami***, που εμφανίζεται στο προηγούμενο σχήμα. Πρόκειται για το πρώτο πραγματικό μοντέλο της Υπερβολικής Γεωμετρίας, που πρότειναν οι δύο αναφερόμενοι μαθηματικοί (ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλον) το 1871.

Εδώ ως σημεία της Υπερβολικής Γεωμετρίας θεωρούμε τα σημεία του εσωτερικού του δίσκου και ως ευθείες τις (ανοιχτές) χορδές, δηλαδή τις χορδές χωρίς τα επί της περιφερείας άκρα τους. Προφανώς, από το σημείο P του σχήματος άγονται άπειρες παράλληλες προς τη χορδή AB (χωρίς τα σημεία A, B). Το μοντέλο αυτό χρησιμοποιείται επίσης για να αποδειχθεί ότι η Υπερβολική Γεωμετρία είναι υποσύστημα (Υπογεωμετρία) της Προβολικής Γεωμετρίας, για την οποίαν γίνεται λόγος στο επόμενο κεφάλαιο.

Για την επαλήθευση του δευτέρου αξιώματοςεισάγεται ένας κατάλληλος τύπος για το μήκος ευθείας, βάσει του οποίου αποδεικνύεται ότι, καθώς προχωρούμε προς τα άκρα μιας χορδής, το μήκος της απειρίζεται. Ομοίως ορίζονται με κατάλληλο τρόπο και οι γωνίες (οπότε αποδεικνύεται ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι μικρότερο των 180^o).

Ένα άλλο μοντέλο Υπερβολικής Γεωμετρίας αποτελεί ο ***δίσκος του Poincaré***



Σχημα 1.5. Ο δίσκος του Poincaré (από το βιβλίο [11])

Στην περίπτωση αυτή ως σημεία θεωρούμε τα σημεία του εσωτερικού του δίσκου (όπως και στην προηγούμενη περίπτωση), ενώ ως ευθείες θεωρούμε του κύκλους που είναι κάθετοι στον κύκλο του δίσκου καθώς και τις διαμέτρους του πρώτου. Δυο κύκλοι λέγονται κάθετοι αν έχουν κάθετες εφαπτόμενες στα σημεία τομής τους. Η αξία του μοντέλου αυτού είναι ιστορικά σημαντική γιατί χρησιμοποιήθηκε για την απόδειξη της συνέπειας της Υπερβολικής Γεωμετρίας. Για μια λεπτομερή παρουσίαση του μοντέλου του Poincaré και τη επαλήθευση των αξιωμάτων της Υπερβολικής Γεωμετρίας σ' αυτό, παραπέμπουμε στο [11, σελ. 164–170].

1.7 Η Ελλειπτική Γεωμετρία

Η Ελλειπτική Γεωμετρία είναι πιο πολύπλοκη στη θεμελίωσή της και οφείλεται στον Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866). Όπως αναφέρεται στη σελιδα 11, το είδος αυτής της γεωμετρίας προκύπτει όταν αρνούμαστε καθ' ολοκληρίαν την ύπαρξη παραλλήλων ευθειών. Όμως, αν κρατήσουμε τα αξιώματα 1, 2, 3, 4 της

Εικονα 9. Bernhard Riemann

Ευκλείδειας Γεωμετρίας και αντικαταστήσουμε απλώς το 5ο αξίωμα της με το

Ελλειπτικό αξίωμα: *Δύο ευθείες (γραμμμές) τέμνονται πάντοτε,*

τότε, μέσω του 2ου αξιώματος και μερικών προτάσεων που συνάγονται απ' αυτό, καταλήγουμε στην απόδειξη της ύπαρξης παραλλήλων! Επομένως, για να θεμελιωθεί μία γεωμετρία χωρίς παράλληλες, θα πρέπει να διατηρηθούν τα αξιώματα 1, 3, 4 της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, να αντικατασταθεί το 5ο αξίωμα με το ελλειπτικό αξίωμα, και να αντικατασταθεί το 2ο αξίωμα με το

Αξίωμα 2′: *Ένα πεπερασμένο ευθύγραμμο τμήμα μπορεί να επεκταθεί σε ευθεία. Η ευθεία αυτή μπορεί να είναι χωρίς όρια, όχι όμως απαραιτήτως και απείρου μήκους.*

Αλλά και μ' αυτήν την αλλαγή, μετά από αρκετά βήματα διαπιστώνεται και πάλι ότι υπάρχουν παράλληλες! Όπως δείχνει η προσεκτική έρευνα του πράγματος, για την επίτευξη του σκοπού μας θα πρέπει να καταργήσουμε τη μία από τις δύο επόμενες προτάσεις S_1 και S_2, αφού η ταυτόχρονη ισχύς τους μοιραία οδηγεί στην ύπαρξη παραλλήλων:

S_1: *Μία ευθεία χωρίζει το επίπεδο.*

S_2: *Δύο (διαφορετικά) σημεία ορίζουν μία μοναδική ευθεία.*

Έτσι,

> τα αξιώματα 1, 2′, 3, 4, το ελλειπτικό αξίωμα και η άρνηση της S_1 με ταυτόχρονη διατήρηση της S_2 οδηγούν στην ***απλή ελλειπτική γεωμετρία***,

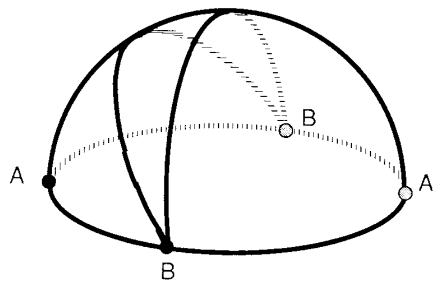
ενώ

> τα αξιώματα 1, 2′, 3, 4, το ελλειπτικό αξίωμα και η άρνηση της S_2* με ταυτόχρονη διατήρηση της S_1 οδηγούν στην ***διπλή ελλειπτική γεωμετρία***.

Και στις δύο περιπτώσεις παίρνουμε μια γεωμετρία εντελώς διαφορετική από την Ευκλείδεια, στην οποίαν δεν ισχύει κανένα από τα συμπεράσματα της τελευταίας (σε αντίθεση με την Υπερβολική Γεωμετρία που διασώζει μερικά από αυτά).

* δηλαδή η άρνηση της μοναδικότητας, αφού ορίζεται ευθεία, κατά το αξίωμα 1.

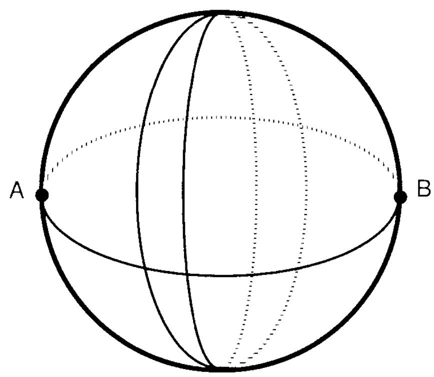
Η ακριβής διατύπωση ενός συνεπούς συστήματος αξιωμάτων της Ελλειπτικής Γεωμετρίας είναι πιο πολύπλοκη από την παράπανω (για χάρη της απλούστευσης) βασική περιγραφή. Για την πληρότητα περιγράφουμε δύο μοντέλα. Το πρώτο (Σχήμα 1.6) αναφέρεται στην *απλή* Ελλειπτική Γεωμετρία



Σχημα 1.6. Μοντέλο απλής Ελλειπτικής Γεωμετρίας (από το βιβλίο [10])

Ως σημεία της απλής Ελλειπτικής Γεωμετρίας παίρνουμε όλα τα σημεία της επιφάνειας ενός ημισφαιρίου (στον Ευκλειδειο χώρο $\mathbb{R}^3$), εφ' οσον αυτά δεν βρίσκονται επί της γραμμής του ισημερινού, καθώς και όλα τα ζεύγη αντιδιαμετρικών σημείων του ισημερινού. Δηλαδή, ένα ζεύγος αντιδιαμετρικών σημείων του ισημερινού θεωρείται ένα σημείο της γεωμετρίας αυτής. Ως ευθείες θεωρούμε τους μισούς μέγιστους κύκλους και τον ισημερινό. Το μήκος είναι το μήκος με την Ευκλείδεια έννοια, λαμβάνοντας όμως υπόψη τις προηγούμενες απαιτήσεις. Τέλος, ως μέτρον γωνίας παίρνουμε αυτό της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

Αντίθετα, στο μοντέλο της *διπλής* Ελλειπτικής Γεωμετρίας, που απεικονίζεται στο Σχήμα 1.7, θεωρούμε όλα τα σημεία ολόκληρης της σφαιρικής επιφάνειας και (όλους) τους ολόκληρους μέγιστους κύκλους. Να σημειωθεί ότι οι μέγιστοι κύκλου της σφαίρας αποτελούν τις γεωδαισιακές της (βλ. σχετικώς τα αναφερόμενα στην ψευδόσφαιρα), συνεπώς υλοποιούν την απόσταση μεταξύ δύο σημείων.



Σχημα 1.7. Μοντέλο διπλής Ελλειπτικής Γεωμετρίας (από το βιβλίο [10])

Μέσω των προηγουμένων μοντέλων, μπορούμε να διαπιστώσουμε εύκολα μερικές ιδιότητες της αντίστοιχης Ελλειπτικής Γεωμετρίας. Για παράδειγμα, έχουμε:

Απλή Ελλειπτική Γεωμετρία	**Διπλή Ελλειπτική Γεωμετρία**
• Μία ευθεία δεν χωρίζει το επίπεδο	• Μία ευθεία χωρίζει το επίπεδο
• Από δύο (διαφορετικά) σημεία διέρχεται μία μοναδική ευθεία	• Από δύο (διαφορετικά) σημεία διέρχεται τουλάχιστον μία ευθεία
• Δύο (διαφορετικές) ευθείες τέμνονται ακριβώς σε ένα σημείο	• Δύο (διαφορετικές) ευθείες τέμνονται ακριβώς σε δύο σημεία
• Όλες οι ευθείες έχουν το ίδιο μήκος	• Όλες οι ευθείες έχουν το ίδιο μήκος
• Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερο των δύο ορθών	• Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερο των δύο ορθών

Τα δύο τελευταία μοντέλα, επειδή ανήκουν στη Σφαιρική Γεωμετρία, μας κάνουν πολλές φορές να χρησιμοποιούμε τον τελευταίο όρο στη θέση της Ελλειπτικής Γεωμετρίας. Πολλές ιδιότητες των τριγώνων της Σφαιρικής Γεωμετρίας ήσαν γνωστές και πριν την ανάπτυξη της Ελλειπτικής Γεωμετρίας και είχαν χρησιμοποιηθεί στην κατασκευή (γεωγραφικών) χαρτών. Όμως, η ερμηνεία της Σφαιρικής Γεωμετρίας ως ενός διδιάστατου ελλειπτικού χώρου έγινε από τον Riemann στην περίφημη επί Υφηγεσίᾳ διάλεξή του (στο Πανεπιστήμιο του Gẗtingen το 1854) με τίτλο *"Uber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen* (: Επί των υποθέσεων οι οποίες βρίσκονται στα θεμέλια της γεωμετρίας).

Από τα προηγούμενα παραδείγματα μοντέλων της Υπερβολικής και Ελλειπτικής Γεωμετρίας γίνεται τώρα εντελώς κατανοητή η συνηγορεία του Poincaré (σελ. 18), που με τόση θέρμη υποστηρίζει την άποψη του Hilbert, ότι απροσδιόριστοι όροι σημείο και ευθεία μπορούν να έχουν οποιαδήποτε ερμηνεία (συγκρίνατε π.χ. τα σημεία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας με τα σημεία της Ελλειπτικής Γεωμετρίας, τις ευθείες τις πρώτης με τις ευθείες του δίσκου του Poincaré ή τους μέγιστους κύκλους της Σφαιρικής Γεωμετρίας κλπ.).

Κλείνοντας τα περί μη Ευκλειδείων Γεωμετριών θα πρέπει να προσθέσουμε ότι οι πιο ριζοσπαστικές αντιλήψεις για τη Γεωμετρία και την έννοια του χώρου βρίσκονται στην προαναφερόμενη διάλεξη επί Υφηγεσίᾳ του Riemann, ο οποίος φαντάστηκε ένα χώρο *καμπυλωμένο*, με αυθαίρετη διάσταση, ο οποίος μόνον τοπικά (δηλ. στην περιοχή του κάθε σημείου του) είναι ευκλείδειος. Έτσι, ο Riemann συνέλαβε την έννοια της *Πολλαπλότητας* (manifold), η οποία είχε τεράστια σημασία για τη σύγχρονη εξέλιξη των μαθηματικών και της φυσικής. Η *Θεωρία της Σχετικότητας* του Albert Einstein (1878–1955) βρήκε στη γεωμετρία του Riemann το αναγκαίο μαθηματικό υπόβαθρο για τη διατύπωση και την παραπέρα μελέτη της. Στη θεωρία αυτή, μέσω της ταύτισης της *καμπυλότητας* (που είναι ιδιότητα και μέγεθος γεωμετρικό) με τη *βαρύτητα* (που είναι εκδήλωση της ύλης και μέγεθος φυσικό), καταλήγουμε σε μία γεωμετρική ερμηνεία του μακροκόσμου. Περισσοτερα θα αναπτυχθούν στην § 4.3.

Όπως είναι φυσικό, η προηγουμένη σύντομη περιήγηση σε μερικές από τις ιδέες της γεωμετρίας δεν μπορεί να εξαντλήσει τις πολυάριθμες λεπτομέρειες από τις συναρπαστικές κατακτήσεις, που πραγματοποιήθηκαν στη μακραίωνη πορεία της. Συμπληρωματικά, ο αναγνώστης μπορεί να συμβουλευτεί, ανάμεσα σε μια πλούσια βιβλιογραφία, και τις εξής πηγές: J. N. Cederberg [10], R. L. Faber [15], Χ. Στράντζαλος [41] (για την αξιωματική μέθοδο και τη θεμελίωση της Ευκλείδειας και μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας)· M. Spivak [38] [για μια μετάφραση, στα Αγγλικά, της διάλεξης του Riemann (: Επί των υποθέσεων οι οποίες βρίσκονται στα θεμέλια της γεωμετρίας), στην οποίαν περιέχονται οι αντιλήψεις του τελευταίου για τον χώρο και τη γεωμετρία]· H. Poincaré [36] (για ποικίλλες σκέψεις του γύρω από τη γεωμετρία, τα μαθηματικά και τη φυσική). Επίσης, για διάφορα ιστορικά στοιχεία, σχετικά με την εξέλιξη της γεωμετρίας, τη ζωή και το έργο διαφόρων μαθηματικών, παραπέμπουμε και στους E. T. Bell [8], S. Hollingdale [19], L. Mlodinov [26], M. Μπρίκα [28], R. Osserman [32], J. Pierpont [35], D. J. Struik [42], και I. M. Yaglom [45].

Σημείωση. Για τη συγγραφή του κεφαλαίου αυτού χρησιμοποιήθηκαν κυρίως οι πηγές [8], [10], [11], [32] και [39], όπου παραπέμπουμε για περισσότερες λεπτομέρειες και συμπληρώσεις.

1.8 Ασκήσεις

1. Να μελετηθεί η προσέγγιση του Saccheri (βλ. [11, σελ. 104–107]).

2. Να μελετηθούν οι λεπτομέρειες της επαλήθευσης των αξιωμάτων της Υπερβολική Γεωμετρίας στο μοντέλο του Poincaré (βλ. [11, σελ. 164–170]).

3. Να μελετηθούν οι λεπτομέρειες της Σφαιρικής Γεωμετρίας (βλ. [11, σελ. 138–139 και 143–162]).

4. Να αναζητηθεί η ιστορία της έλκουσας (σελ. 23) και η παραμετρική μορφή της.

5. Να αποδειχθεί ισχυρισμός της σελ. 16, ότι η σύμπτωση (Kongruenz, congruence), που ορίζεται από τα αξιώματα της ομάδας III του Hilbert, είναι σχέση ισοδυναμίας.

6. Να περιγραφεί ένα (αριθμητικό) μοντέλο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

2

Συσχετισμένα και προβολικά επίπεδα

Η αιφνιδία άνοδος της συνθετικής Προβολικής Γεωμετρίας κατά τον 17ο αιώνα εμφανίζεται τώρα σαν μία καθυστερημένη αναβίωση του ελληνικού πνεύματος . . . Όμως, ήταν μόνον με το εκκεντρικό «Πρόχειρο Σχέδιο» (συντετμημένος τίτλος) του Desargues στα 1639, που η συνθετική Προβολική Γεωμετρία αναπτύχθηκε σε νέο και ανεξάρτητο κλάδο της γεωμετρίας.

E. T. Bell [8, σελ. 158]

Μετα απο μια συντομη εισαγωγή στη δημιουργία της Προβολικής Γεωμετρίας, στις §§ 2.1–2.2 του κεφαλαίου παρουσιάζεται η κατά Hilbert αξιωματική θεμελίωση του *συσχετισμένου* και του *προβολικού* επιπέδου αντιστοίχως. Επισημαίνονται οι βασικές διαφορές τους και συνάγονται τα πρώτα, απαραίτητα για την συνέχεια συμπεράσματα.

Η § 2.3 αναφέρεται στην αρχή του *δυϊσμού*. Σύμφωνα μ' αυτήν, για κάθε συμπέρασμα που ισχύει στο προβολικό επίπεδο, ισχύει και το δυϊκό του, χωρίς να χρειάζεται να γίνει η απόδειξη του τελευταίου.

Οι *στοιχειώδεις απεικονίσεις* (§ 2.4) είναι αμφιμονοσήμαντες απεικονίσεις μεταξύ απλών σχηματισμών (όπως σημειοσειρών, δεσμών ευθειών) και επιτρέπουν τη σύγκριση του πλήθους των στοιχείων των προηγουμένων σχηματισμών.

Στην § 2.5 συνδέονται τα συσχετισμένα με τα προβολικά επίπεδα. Από ένα συσχετισμένο επίπεδο, με την προσθήκη των *ιδεατών* (ή *κατ' εκδοχήν*) σημείων και της *ιδεατής ευθείας*, οδηγούμαστε σε ένα προβολικό επίπεδο. Αντιστρόφως, η αφαίρεση μιας ευθείας του προβολικού επιπέδου οδηγεί σε ένα συσχετισμένο επίπεδο.

Τέλος, η § 2.6 αφιερώνεται στην έννοια του *μορφισμού* μεταξύ προβολικών επιπέδων. Ένας μορφισμός αποτελείται από ένα ζεύγος απεικονίσεων, που αντανακλούν με κατάλληλο τρόπο τη δομή του προβολικού επιπέδου.

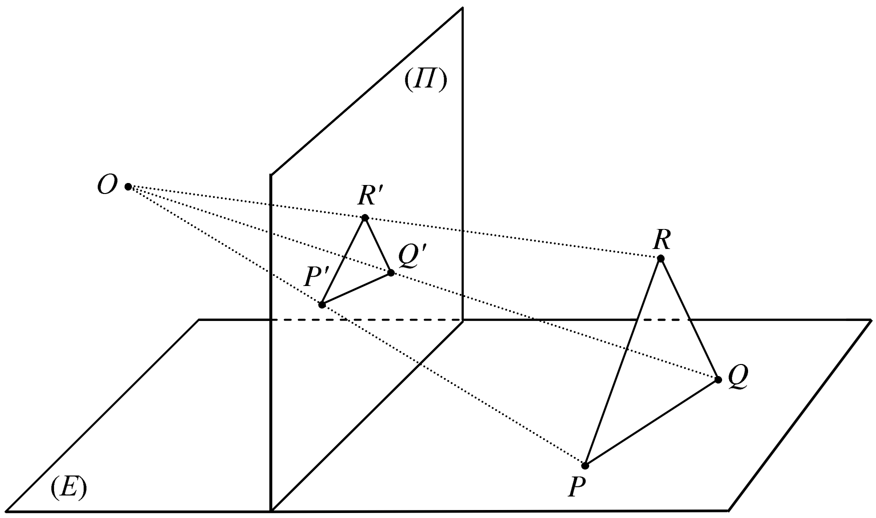
2.0 Εισαγωγή

Η Προβολική Γεωμετρία είναι μία μη Ευκλείδεια Γεωμετρία, αφού σ' αυτήν δεχόμαστε ότι δεν ορίζεται η έννοια της παραλληλίας.

Όπως και η Ευκλείδεια Γεωμετρία, έτσι και η Προβολική προέκυψε από μιαν ανάγκη. Ανάγκη όχι πρακτική, αλλά *αισθητική*. Πρόκειται για την προσπάθεια να αποτυπωθούν τα αντικείμενα του τριδιάστατου χώρου στο διδιάστατο ζωγραφικό πίνακα, με τρόπο που να δημιουργείται η αίσθηση του βάθους (προοπτική).

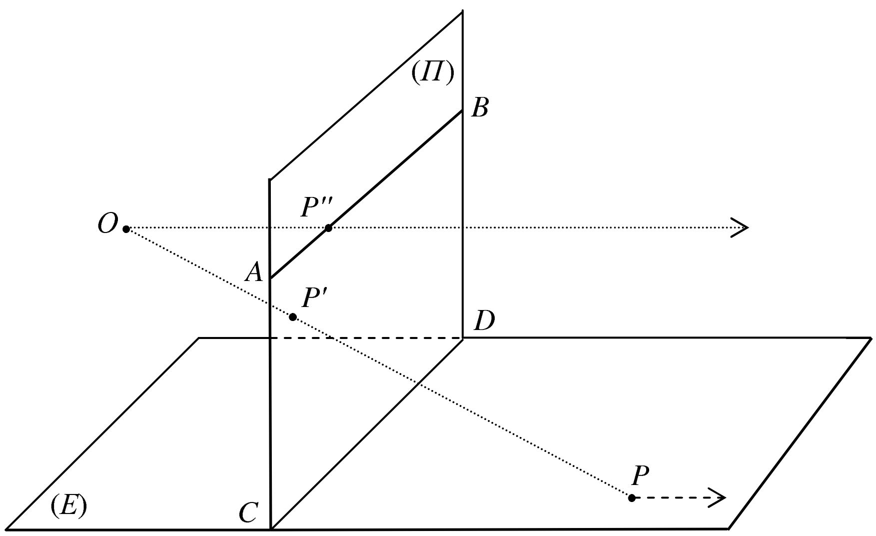
Παρ' όλο που η επίλυση του προηγουμένου αισθητικού προβλήματος είχε απασχολήσει τους αρχαίους Έλληνες ζωγράφους, και αργότερα τους Βυζαντινούς, θα λέγαμε ότι οι κανόνες της προοπτικής συστηματοποιήθηκαν κυρίως στην περίοδο της Αναγέννησης από καλλιτέχνες όπως οι Filippo Brunelleschi (1377–1446), Paolo Uccello (1379–1475), Leone Battista Alberti (1404–1472), Pierro de la Francesca (1416–1492), Sandro Botticelli (1445–1510), Leonardo da Vinci (1452–1519), Albrecht Dürer (1471–1528), Michelangelo Buonarroti (1475–1564), Raffaello Santi Sanzio (1483–1520) κ.α. Αξίζει σχετικώς να αναφέρουμε ότι πολλοί από τους μεγάλους ζωγράφους και γλύπτες της περιόδου αυτής είχαν σοβαρές γνώσεις μαθηματικών και μηχανικής, για τούτο και οι κανόνες της προοπτικής είχαν μαθηματικό υπόβαθρο και απετέλεσαν τη βάση για τη μεταγενέστερη ανάπτυξη της Προβολικής Γεωμετρίας σε αυτοτελή κλάδο των μαθηματικών.

Ας δούμε, με συντομία, τη διαδικασία αποτύπωσης των εικόνων στο ζωγραφικό πίνακα. Για ευκολία, υποθέτουμε ότι ο τελευταίος [που συμβολίζεται με (Π) στο επόμενο σχήμα] είναι διαφανής (γυάλινος) και κάθετος στο οριζόντιο επίπεδο (E), επάνω στο οποίο στέκεται ο ζωγράφος. Η εικόνα ενός σημείου P του επιπέδου (E) είναι το σημείο P', τομή της οπτικής ακτίνας OP (αν O συμβολίζει τον οφθαλμό του ζωγράφου) με το επίπεδο του πίνακα (Π). Παρόμοια προσδιορίζεται στον πίνακα και η εικόνα R' οποιουδήποτε σημείου R του χώρου.



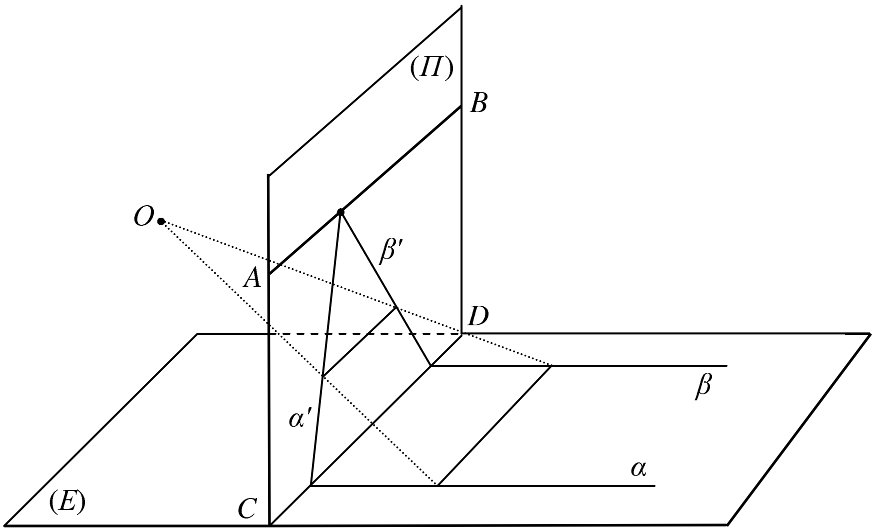
Σχημα 2.1

Εξάλλου, από την εμπειρία μας γνωρίζουμε ότι, καθώς τα σημεία P του χώρου ή του επιπέδου (E) απομακρύνονται από το επίπεδο (Π), οι αντίστοιχες εικόνες P' πλησιάζουν προς την ευθεία AB (βλ. Σχήμα 2.2), που είναι η τομή του (Π) με ένα νοητό επίπεδο, το οποίο διέρχεται από το O και είναι παράλληλο προς το επίπεδο (E). Η ευθεία AB αποτυπώνει στον πίνακα του ζωγράφου τον οπτικό ορίζοντα, τα σημεία του οποίου φαίνονται να βρίσκονται σε «άπειρη» απόσταση από τον ζωγράφο («επ᾽ άπειρον» σημεία).



Σχημα 2.2

Παρόμοια, δύο ευθείες α και β [του (E) ή του χώρου], οι οποίες είναι παράλληλες μεταξύ τους, αποτυπώνονται στον πίνακα σε δύο ευθείες α' και β' τεμνόμενες σε ένα σημείο της γραμμής του ορίζοντα AB (βλ.το επόμενο σχήμα).



Σχημα 2.3

Επομένως, στο ζωγραφικό πίνακα εμφανίζεται ένα άλλο είδος γεωμετρίας, στο οποίο δεν υπάρχουν παράλληλες ευθείες (εκτός από αυτές που απεικονίζουν τις ευθείες τις παράλληλες προς την CD, άρα και την AB· αλλά κι αυτές θεωρούμε ότι τέμνονται στο άπειρο, πραγμα που φαινομενικά θα συμβεί αν κάνουμε μια μικρή στροφή του πίνακα).

Επίσης, όπως φαίνεται πάλι στο Σχήμα 2.3, ανατρέπονται και οι μετρικές ιδιότητες της Ευκλείδειας Γεωμετρίας: η απόσταση των παραλλήλων α και β φυσικά δεν διατηρείται στις τεμνόμενες πλέον εικόνες α' και β'. Όσο προχωρούμε προς τη γραμμή του ορίζοντα, η απόσταση αυτή μικραίνει για να μηδενιστεί επί της AB.

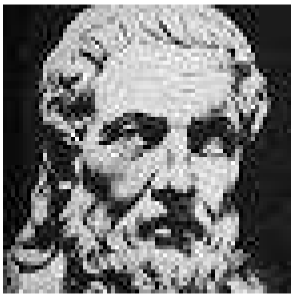
Στην επόμενη σελίδα εμφανίζονται δύο ζωγραφικοί πίνακες. Ο πρώτος, του Giovanni Antonio Canal, γνωστού και ως Canaletto (1697–1768), απεικονίζει το κανάλι της Βενετίας. Είναι ένα τυπικό παράδειγμα ζωγραφικού πίνακα στον οποίον ακολουθούνται οι κανόνες της προοπτικής. Το ύψος των κτιρίων μειώνεται καθώς η ματιά κινείται προς τη γραμμή του ορίζοντα, ενώ οι πλευρές του καναλιού πλησιάζουν. Έτσι δημιουργείται η εντύπωση του βάθους και η αίσθηση ότι έχουμε να κάνουμε με ένα τριδιάστατο αντικείμενο

Στο δεύτερο πίνακα, που οφείλεται στον Andrea Mantegna (1431;–1506) απεικονίζεται ο νεκρός Χριστός. Εδώ ο ζωγράφος, για να προσδώσει μεγαλύτερη δραματικότητα, καταργεί (ή αντιστρέφει) την προοπτικότητα. Έτσι, αντίθετα από τον συνήθη κανόνα της προοπτικής, τα μεγέθη αυξάνουν καθώς κινούμεθα προς την κεφαλή του Ιησού, όπου και εστιάζεται ο Θείος πόνος και οι γραμμές συγκλινουν προς τον θεατή.

Εικονα 10. Canaetto: Το κανάλι της Βενετίας

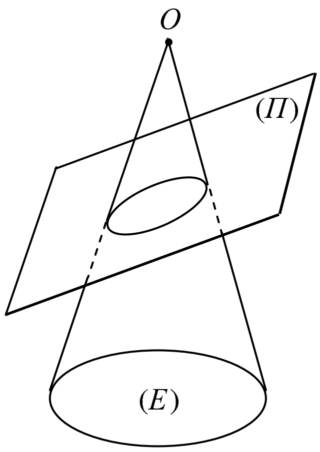
Εικονα 11. Mantegna: Ο Θρήνος του Χριστού

Ένα άλλο παράδειγμα κατασκευής προοπτικών σχημάτων μας παρέχουν οι κωνικές τομές, που μελετήθηκαν από τον μεγάλο γεωμέτρη Απολλώνιο (βλ. σχετικά σχόλια και στη σελ. 12).



Εικονα 12. Απολλώνιος

Αν στην κορυφή O ενός κώνου βρίσκεται ο οφθαλμός του ζωγράφου, ο κύκλος της βάσης θα αποτυπώνεται στον πίνακα (Π) σαν κύκλος, έλλειψη, παραβολή ή υπερβολή, ανάλογα με την κλίση του (Π) ως προς το επίπεδο της βάσης (E). Κι εδώ διαπιστώνεται η μη διατήρησης των αποστάσεων κατά τη διαδικασία της προβολής [δηλαδή κατά τη διαδικασία της αποτύπωσης της εικόνας των σημείων του κύκλου επί του (Π)]. Στο Σχήμα 2.4 απεικονίζεται, για παράδειγμα, η περίπτωση της έλλειψης.

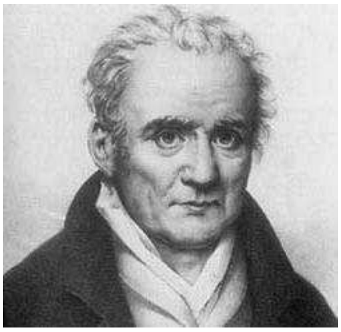


Σχημα 2.4

Στην §2.5 θα δούμε με αυστηρό τρόπο πώς από το σύνηθες επίπεδο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, με την επισύναψη των «επ' άπειρον» (ή «κατ' εκδοχήν») σημείων, αναγόμαστε στο επίπεδο της Προβολικής Γεωμετρίας, δηλαδή στο επίπεδο που μαθηματικοποιεί το ζωγραφικό πίνακα.

Η πλήρης μαθηματικοποίηση των κανόνων της προοπτικής έγινε μόλις τον 17ο αιώνα. Μετά την κυριαρχία της Ανάλυσης κατά τον 18ο αιώνα, άρχισε η αναγέννηση της γεωμετρίας, μέσα στην οποίαν πρωτεύουσα θέση κατέχει η Προβολική Γεωμετρία. Η συστηματική ανάπτυξή της είναι ένα από τα πιο σημαντικά μαθηματικά επιτεύγματα του 19ου αιώνα.

Μετά τις πρόδρομες εργασίες των Girard Desargues (1591–1661), Blaise Pascal (1623–1662), Philippe de la Hire (1640–1718) κ.α., αποφασιστική για την εξέλιξη της Προβολικής Γεωμετρίας ήταν η συμβολή των Gaspar Monge (1746–1818), Jean-Victor Poncelet (1788–1867), Charles Brianchon (1785–1864), August Ferdinand Möbius (1790–1868), Jacob Steiner (1796–1863), Julius Plücker (1801–1868) και Karl Georg Christian von Staudt (1798–1867).



Εικονα 13. G. Monge, J.V. Poncelet, J. Steiner

Στην πορεία περίπου δύο αιώνων κυριάρχησαν δύο βασικές απόψεις: η *συνθετική* και η *αναλυτική*. Η πρώτη βασίζεται σε καθαρά γεωμετρικές μεθόδους, με σημείον εκκίνησης τα αξιώματα. Η δεύτερη στηρίζεται κυρίως σε αλγεβρικές μεθόδους. Μεταξύ των εκπροσώπων των δύο μεθοδολογικών απόψεων σημειώθηκαν, πολλές φορές, σημαντικές αντιδικίες για το κατά πόσον η μία υπερτερεί της άλλης, ή κατά πόσον η γεωμετρία θα πρέπει να είναι απαλλαγμένη από την άλγεβρα.

Σε μεταγενέστερη περίοδο, θεμελιώδης υπήρξεν η ιδέα να χαρακτηριστεί μία Γεωμετρία από την αντίστοιχη *ομάδα των μετασχηματισμών* που διατηρούν αναλλοίωτες της βασικές ιδιότητές της. Η συμβολή των Sophus Lie (1842–1899), Henrie Poincaré (1854–1912) και, ιδιαιτέρως, του Christian Felix Klein (1849–1925) κατέχει πρωτεύουσα θέση.

2.1 Το συσχετισμένο επίπεδο

Στην παράγραφο αυτή, έχοντας ως «υπόδειγμα» τα αξιώματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, ορίζουμε, μέσω τριών βασικών αξιωμάτων, το λεγόμενο *συσχετισμένο επίπεδο*. Με τη συμπλήρωση των αξιωμάτων του συσχετισμένου επιπέδου, έτσι ώστε να είναι δυνατή η σύγκριση, η διάταξη και η μέτρηση, οδηγούμαστε στη θεμελίωση ενός επιπέδου, του οποίου παράδειγμα είναι το (σύνηθες) επίπεδο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Όμως, δεν θα προχωρήσουμε προς την κατεύθυνση αυτή, αφού κύριος στόχος του κεφαλαίου είναι το προβολικό επίπεδο. Η σύντομη μελέτη του συσχετισμένου επίπεδου γίνεται προκειμένου να αποσαφηνιστούν οι βασικές διαφορές ανάμεσα στην (προ)Ευκλείδεια και την Προβολική Γεωμετρία.

Ακολουθώντας τις ιδέες του D. Hilbert [18] θεωρούμε:

- Ενα σύνολο $\mathcal{P} \neq \emptyset$, του οποίου τα στοιχεία καλούμε ***σημεία*** (points) και τα συμβολίζουμε με κεφαλαία γράμματα
$$A, B, C, \ldots, P, Q, \ldots, \Gamma, \Delta, \ldots, X, Y.$$
- Ενα σύνολο $\mathcal{L} \neq \emptyset$, του οποίου τα στοιχεία καλούμε ***ευθείες*** (lines) και τα συμβολίζουμε με μικρά γράμματα
$$a, b, c \ldots, k, \ell, \ldots, \alpha, \beta, \ldots, x, y.$$
- Μία σχέση $\mathcal{I}$ μεταξύ των $\mathcal{P}$ και $\mathcal{L}$, δηλαδή $\mathcal{I} \subset \mathcal{P} \times \mathcal{L}$, την οποίαν καλούμε ***σχέση σύμπτωσης*** ή απλώς ***σύμπτωση*** (incidence).

Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι τα σημεία και οι ευθείες είναι έννοιες που δεν ορίζονται. Απλώς αποτελούν την *αυθαίρετη* ονομασία των στοιχείων δύο αντιστοίχων συνόλων.

Όπως στη στοιχειώδη γεωμετρία, τα σημεία και οι ευθείες διαφέρουν κατά τη φύση τους. Αυτό το εκφράζουμε αυστηρά με τη σχέση
$$\mathcal{P} \cap \mathcal{L} = \emptyset.$$

Η σχέση της σύμπτωσης μας επιτρέπει, για ένα ζεύγος $(P, k) \in \mathcal{P} \times \mathcal{L}$, να αποφανθούμε ότι $(P, k) \in \mathcal{I}$ ή $(P, k) \notin \mathcal{I}$.

Ο συμβολισμός
$$(P, k) \in \mathcal{I}$$
αποδίδεται λεκτικά με τις (ισοδύναμες) εκφράσεις:

— *το σημείο P ανήκει (ή περιέχεται) στην ευθεία k,*

— *το P είναι σημείο της k,*

— *η ευθεία k διέρχεται από το P.*

Οι εκφράσεις αυτές προέρχονται από την αντίστοιχη σύμπτωση σημείου και ευθείας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και ανταποκρίνονται στη συνήθη εμπειρία. Φυσικά, οι προηγούμενες εκφράσεις θα αποδίδονταν καλλίτερα με τον συμβολισμό $P \in k$. Αυτό όμως θα σήμαινε ότι μία ευθεία είναι σύνολο σημείων (σημειοσειρά), γεγονός που δεν προκύπτει από τους πιο πάνω αφηρημένους ορισμούς της ευθείας και του σημείου. Κάτι τέτοιο επιτυγχάνεται μέσω κατάλληλης ισομορφίας, όπως θα δείξουμε πολύ αργότερα (βλ. Θεώρημα 2.6.8, για την περίπτωση του προβολικού επιπέδου, που μας ενδιαφέρει εδώ).

Θα χρειαστούμε ακόμη και την ορολογία του επόμενου ορισμού.

2.1.1 Ορισμός. Υποθέτουμε ότι $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ είναι μία τριάδα όπως προηγουμένως. Τρία ή και περισσότερα σημεία $P_i \in \mathcal{P}$ λέγονται ***συγγραμμικά*** (collinear), αν υπάρχει ευθεία $k \in \mathcal{L}$, τέτοια ώστε

$$(P_i, k) \in \mathcal{I}, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots$$

Αναλόγως, τρείς ή περισσότερες ευθείες $k_i \in \mathcal{L}$ ***διέρχονται από το*** (ή ***τέμνονται*** ή ***συγκλίνουν στο) ίδιο σημείο*** (concurrent lines) αν υπάρχει $P \in \mathcal{P}$, τέτοιο ώστε

$$(P, k_i) \in \mathcal{I}, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots$$

Τέλος, δύο ευθείες $k, \ell \in \mathcal{L}$ λέγονται ***παράλληλες*** (parallel), οπότε συμβολικά γράφουμε ότι $k /\!/ \ell$, αν συμβαίνει ένα από τα επόμενα:
— είτε $k = \ell$,
— είτε $k \neq \ell$ και *δεν* υπάρχει $P \in \mathcal{P} : (P, k) \in \mathcal{I} \ni (P, \ell)$.

2.1.2 Ορισμός. Ένα ***συσχετισμένο επίπεδο*** (affine plane) είναι μια τριάδα της μορφής $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, η οποία ικανοποιεί τα επόμενα αξιώματα:

(ΣΕ 1) *Από δύο διαφορετικά σημεία διέρχεται ακριβώς μία ευθεία (ή δύο διαφορετικά σημεία ορίζουν μία μοναδική ευθεία).* Συμβολικά, το αξίωμα διατυπώνεται και με τη μορφή:

$$[\,\forall\ (P, Q) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P} : P \neq Q\,] \ \Rightarrow\ [\,\exists!\ k \in \mathcal{L} : (P, k) \in \mathcal{I} \ni (Q, k)\,].$$

(ΣΕ 2) ***(Ευκλείδειον αίτημα)***. *Από ένα σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μία μοναδική ευθεία παράλληλη προς τη δοθείσα.* Συμβολικά,

$$[\,\forall\ (P, k) \in \mathcal{P} \times \mathcal{L} : (P, k) \notin \mathcal{I}\,] \ \Rightarrow\ [\,\exists!\ \ell \in \mathcal{L} : (P, \ell) \in \mathcal{I},\ k /\!/ \ell\,].$$

(ΣΕ 3) *Υπάρχουν τουλάχιστον τρία σημεία, τα οποία είναι διαφορετικά μεταξύ τους και μη συγγραμμικά.*

Το αξίωμα (ΣΕ 2), όπως ήδη γνωρίζουμε, οφείλεται στον J. Playfair και αποτελεί ισοδύναμη διατύπωση του 5ου αιτήματος (αξιώματος) του Ευκλείδη. Η διατύπωση του τελευταίου σε αρχαία ελληνικά βρίσκεται, για παράδειγμα στο [39].

2.1.3 Παραδείγματα. 1) Το επίπεδο της Στοιχειώδους (Ευκλείδειας) Γεωμετρίας είναι συσχετισμένο επίπεδο. Αποτελείται από τα σημεία και τις ευθείες, όπως ορίζονται στην Ευκλείδεια Γεωμετρία και αντιλαμβανόμαστε στην καθημερινη εμπειρία μας, ενώ η $\mathcal{I}$ είναι η συνήθης σύμπτωση, που εδώ εκφράζεται με τη συνολοθεωρητική σχέση "$\in$" (ανήκει). Δηλαδή,

$$(P, \ell) \in \mathcal{I} \iff P \in \ell.$$

2) Αν θεωρήσουμε τα σύνολα

$$\mathcal{P} := \{A, B, C, D\},$$
$$\mathcal{L} := \{\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{C, D\}\}$$

και ως $\mathcal{I}$ τη σχέση "$\in$", τότε ελέγχουμε αμέσως ότι η τριάδα $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ είναι συσχετισμένο επίπεδο.

Το παράδειγμα αυτό δείχνει ότι υπάρχουν συσχετισμένα επίπεδα με *πεπερασμένο* πλήθος σημείων και ευθειών, σε αντίθεση με το επίπεδο της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

3) (*Αντιπαράδειγμα*) Ο δίσκος των Klein-Beltrami, που αναφέραμε στη σελιδα 24.

2.1.4 Ορισμός. Η μονοσήμαντα ορισμένη ευθεία k του αξιώματος (ΣΕ 1) λέγεται ***ένωση*** (join) των σημείων P, Q και συμβολίζεται με

$$\boxed{k = P \vee Q = Q \vee P}$$

Η δεύτερη ισότητα είναι προφανής συνέπεια του (ΣΕ 1).

- Στο υπόλοιπο της παραγράφου θεωρούμε ότι δίνεται ένα συσχετισμένο επίπεδο $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$

2.1.5 Πρόταση. *Αν A, B, C είναι τρία διαφορετικά συγγραμμικά σημεία και ℓ η κοινή τους ευθεία, τότε*

$$\ell = A \vee B = A \vee C = B \vee C.$$

Απόδειξη. Από τον Ορισμό 2.1.1 έχουμε τις σχέσεις

$$(A, \ell) \in \mathcal{I} \quad \text{και} \quad (B, \ell) \in \mathcal{I}.$$

Επειδή $A \neq B$, από το (ΣΕ 1) ορίζεται και η ευθεία $A \vee B$ και ισχύουν οι σχέσεις

$$(A, A \vee B) \in \mathcal{I} \quad \text{και} \quad (B, A \vee B) \in \mathcal{I}.$$

Επομένως, από το μονοσήμαντο του (ΣΕ 1), προκύπτει ότι $\ell = A \vee B$. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύονται και οι άλλες ισότητες. □

2.1.6 Πρόταση. *Δύο διαφορετικές ευθείες k, ℓ έχουν το πολύ ένα* ***κοινό σημείο****, δηλαδή ένα σημείο P που ικανοποιεί τις σχέσεις $(P, k) \in \mathcal{I}$ και $(P, \ell) \in \mathcal{I}$.*

Απόδειξη. Αν οι ευθείες k, l είναι παράλληλες ($k /\!/ \ell$), τότε (αφού $k \neq \ell$) δεν υπάρχει κανένα κοινό σημείο P, άρα αληθεύει το συμπέρασμα.

Αν $k \not\parallel \ell$, τότε οπωσδήποτε υπάρχει κοινό σημείο P (γιατί αλλιώς οι ευθείες θα ήσαν παράλληλες). Ας υποθέσουμε τώρα ότι υπάρχει κι ένα άλλο κοινό σημείο Q, δηλαδή $(Q, k) \in \mathcal{I} \ni (Q, \ell)$. Θα δείξουμε ότι $P = Q$. Πραγματικά, αν ήταν $P \neq Q$, τότε κατά το (ΣΕ 1) ορίζεται η ευθεία $P \vee Q$. Απ' το άλλο μέρος, επειδή τα P, Q είναι και σημεία των k και ℓ, πάλι από το (ΣΕ 1) και το μονοσήμαντό του, προκύπτει ότι

$$k = P \vee Q = \ell,$$

πράγμα που αντίκειται στην υπόθεση $k \neq \ell$. Επομένως, κατ' ανάγκην, καταλήγουμε στη σχέση $P = Q$. □

2.1.7 Ορισμός. Αν k και ℓ είναι δύο μη παράλληλες διαφορετικές ευθείες, τότε το μονοσήμαντα ορισμένο κοινό σημείο τους (Πρόταση 2.1.6) λέγεται ***τομή*** (intersection) των k, ℓ και συμβολίζεται με

$$\boxed{P = k \wedge \ell = \ell \wedge k}$$

2.1.8 Πρόταση. *Στο συσχετισμένο επίπεδο η παραλληλία ορίζει μία σχέση ισοδυναμίας.*

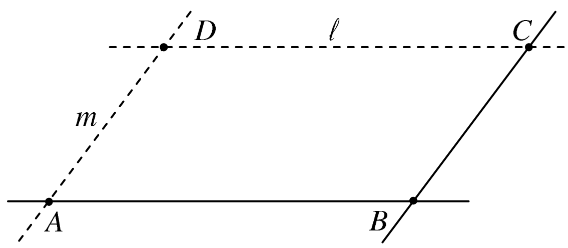
Απόδειξη. Η αυτοπαθής και η συμμετρική ιδιότητα είναι άμεσες συνέπειες του ορισμού. Για την απόδειξη της μεταβατικής ιδιότητας, υποθέτουμε ότι $k /\!/ \ell$ και $\ell /\!/ m$. Αν $k = m$, τότε έχουμε το συμπέρασμα. Αν $k \neq m$, τότε αναγκαίως $k /\!/ m$, γιατί αν υπήρχε κοινό σημείο P (δηλ. $P = k \wedge m$), θα είχαμε ότι

$$\begin{aligned} (P, k) &\in \mathcal{I}, \qquad \text{όπου} \quad k /\!/ \ell, \\ (P, m) &\in \mathcal{I}, \qquad \text{όπου} \quad m /\!/ \ell. \end{aligned}$$

Όμως $(P, \ell) \notin \mathcal{I}$ (επειδή $\ell /\!/ k$ και $\ell /\!/ m$). Επομένως, από το σημείο P, που δεν βρίσκεται στην ℓ, διέρχονται δύο ευθείες παράλληλες προς αυτήν (οι k και m). Το συμπέρασμα αυτό αντιβαίνει στο (ΣΕ 2), άρα $k /\!/ m$. □

2.1.9 Θεώρημα. *Σε κάθε συσχετισμένο επίπεδο υπάρχουν τουλάχιστον τέσσερα διαφορετικά σημεία, τα οποία ανά τρία είναι μη συγγραμμικά.*

Απόδειξη. Το (ΣΕ 3) εξασφαλίζει ότι υπάρχουν τρία διαφορετικά σημεία A, B, C, που δεν είναι συγγραμμικά, άρα ορίζονται οι ευθείες $A \vee B$ και $B \vee C$. Επειδή τα σημεία είναι μη συγγραμμικά, ισχύει ότι $(C, A \vee B) \notin \mathcal{I}$. Επομένως, κατά το (ΣΕ 2), υπάρχει μοναδική ευθεία $\ell \in \mathcal{L}$ με $(C, \ell) \in \mathcal{I}$ και $\ell /\!/ A \vee B$. Παρόμοια βρίσκουμε και μιά $m \in \mathcal{L}$, με $(A, m) \in \mathcal{I}$ και $m /\!/ B \vee C$.



Σχημα 2.5

Παρατηρούμε ότι $\ell \neq m$. Πραγματικά, αν ήταν $\ell = m$, τότε το A (ως σημείο της m) θα ανήκε και στην ℓ, πράγμα που είναι άτοπο, αφού $\ell /\!/ A \vee B$. Επίσης, $\ell \not\parallel m$. Πραγματικά, αν ήταν $\ell /\!/ m$, επειδή και $\ell /\!/ A \vee B$, θα είχαμε ότι $m /\!/ A \vee B$, λόγω της συμμετρικής και μεταβατικής ιδιότητας της παραλληλίας. Αυτό είναι άτοπο, επειδή το A είναι κοινό σημείο των m και $A \vee B$. Συνεπώς, αφού οι ℓ και m είναι διάφορες και μη παράλληλες, ορίζεται το μοναδικό σημείο $D = \ell \wedge m$ (βλ. Πρόταση 2.1.6 και Ορισμό 2.1.7). Στο επόμενο Σχήμα 2.5 απεικονίζεται, για ευκολία, η παραπάνω διαδικασία στο (συσχετισμένο) επίπεδο της Στοιχειώδους Γεωμετρίας.

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, θα πρέπει να δείξουμε ότι το D είναι διαφορετικό από τα A, B, C και δεν είναι συγγραμμικό με οποιαδήποτε δύο από αυτά. Για το πρώτο συμπέρασμα αρκεί να δείξουμε ότι $D \neq A$ (παρόμοια εργαζόμαστε και για τα B, C). Αυτό αληθεύει γιατί, αν ήταν $D = A$, τότε οι παράλληλες και διαφορετικές ευθείες $A \vee B$ και ℓ θα είχαν κοινό το σημείο $A = D$ (άτοπο).

Τέλος, ας υποθέσουμε ότι το D είναι συγγραμμικό με δύο άλλα σημεία, ας πούμε τα A και B. Τότε, από την Πρόταση 2.1.5, έχουμε ότι η κοινή ευθεία των A, B, D είναι ακριβώς η $A \vee B$. Άρα, το D θα ήταν κοινό σημείο των ℓ και $A \vee B$ (άτοπο, όπως προηγουμένως). Παρόμοια δείχνουμε ότι το D δεν είναι συγγραμμικό και με οποιαδήποτε άλλα δύο σημεία, οπότε η απόδειξη είναι πλήρης. □

2.1.10 Παρατηρήσεις. 1) Από το Θεώρημα 2.1.9 προκύπτει ότι το μικρότερο πλήθος σημείων ενός συσχετισμένου επιπέδου είναι 4. Αυτό σημαίνει ότι

η ελαχίστη ισχύς *του συσχετισμένου επιπέδου είναι 4*

και δικαιολογεί την επιλογή των τεσσάρων σημείων στο Παράδειγμα 2.1.3(2).

2) Μία άλλη θεμελίωση του συσχετισμένου επιπέδου, με αλγεβρική γλώσσα, γίνεται στη Γραμμική (ή Συσχετισμένη) Γεωμετρία (βλ. [3]). Εκεί, ξεκινώντας από άλλα αξιώματα (αλγεβρικής υφής), αποδεικνύονται, ως συμπεράσματα πλέον, τα αξιώματα της προηγούμενης θεμελίωσης.

2.1.11 Ασκήσεις.

1. Να αποδειχθούν οι ισχυρισμοί των Παραδειγμάτων 2.1.3(1) και 2.1.3(2).

2. Κάθε ευθεία του συσχετισμένου επιπέδου διαθέτει τουλάχιστον δύο διαφορετικά σημεία.

3. Από κάθε σημείο του συσχετισμένου επιπέδου διέρχονται τουλάχιστον τρεις διαφορετικές ευθείες.

4. Δίνονται οι διαφορετικές ευθείες k, ℓ, m ενός συσχετισμένου επιπέδου με $k /\!/ \ell$. Αν η m τέμνει τη μία από τις δύο παράλληλες ευθείες, τότε θα τέμνει και την άλλη.

2.2 Το προβολικό επίπεδο

Όπως και στο συσχετισμένο επίπεδο, θεωρούμε μία τριάδα $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, όπου $\mathcal{P}$ και $\mathcal{L}$ είναι σύνολα διάφορα του κενού, τέτοια ώστε $P \cap \mathcal{L} = \emptyset$, και $\mathcal{I} \subset \mathcal{P} \times \mathcal{L}$ είναι μία ***σχέση σύμπτωσης***. Τα στοιχεία των $\mathcal{P}$ και $\mathcal{L}$ ονομάζουμε, όπως πριν, ***σημεία*** και ***ευθείες*** αντιστοίχως. Η έννοια της συγγραμμικότητας σημείων και της σύγκλισης ευθειών είναι όπως στον Ορισμό 2.1.1.

2.2.1 Ορισμός. Ένα ***προβολικό επίπεδο*** (projective plane) είναι μία τριάδα $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, που ικανοποιεί τα επόμενα αξιώματα:

(ΠΕ 1) *Για οποιαδήποτε σημεία $P, Q \in \mathcal{P}$, με $P \neq Q$, υπάρχει ακριβώς μία ευθεία $\ell \in \mathcal{L}$, τέτοια ώστε $(P, \ell) \in \mathcal{I} \ni (Q, \ell)$.*

(ΠΕ 2) *Για οποιεσδήποτε ευθείες $k, \ell \in \mathcal{L}$, με $k \neq \ell$, υπάρχει σημείο $P \in \mathcal{P}$, τέτοιο ώστε $(P, k) \in \mathcal{I} \ni (P, \ell)$.*

(ΠΕ 3) *Υπάρχουν τουλάχιστον τέσσερα σημεία διαφορετικά μεταξύ τους, τα οποία είναι ανά τρία μη συγγραμμικά.*

2.2.2 Παρατηρήσεις. 1) Από το (ΠΕ 1) βλέπουμε ότι υπάρχει μία μοναδική ευθεία, η οποία διέρχεται (ή περιέχει, ή ορίζεται) από δύο διαφορετικά σημεία. Επομένως, το (ΠΕ 1) συμπίπτει με το (ΣΕ 1). Αντιθέτως, από το (ΠΕ 2) προκύπτει ότι δύο οποιεσδήποτε διαφορετικές ευθείες έχουν πάντοτε κοινό σημείο. Επομένως:

Στο προβολικό επίπεδο δεν υπάρχει έννοια παραλληλίας.

2) Όπως και στο συσχετισμένο επίπεδο, τη μονοσήματα ορισμένη ευθεία ℓ του (ΠΕ 1) ονομάζουμε ***ένωση*** των P, Q και τη συμβολίζουμε με

$$\ell = P \vee Q = Q \vee P.$$

3) Επίσης, όπως θα δείξουμε στην παρακάτω Πρόταση 2.2.4, και το κοινό σημείο P του (ΠΕ 2) είναι μονοσήμαντα ορισμένο. Το καλούμε ***τομή*** των k, ℓ και το συμβολίζουμε με

$$P = k \wedge \ell = \ell \wedge k.$$

2.2.3 Παραδείγματα. 1) Θεωρούμε τα σύνολα:

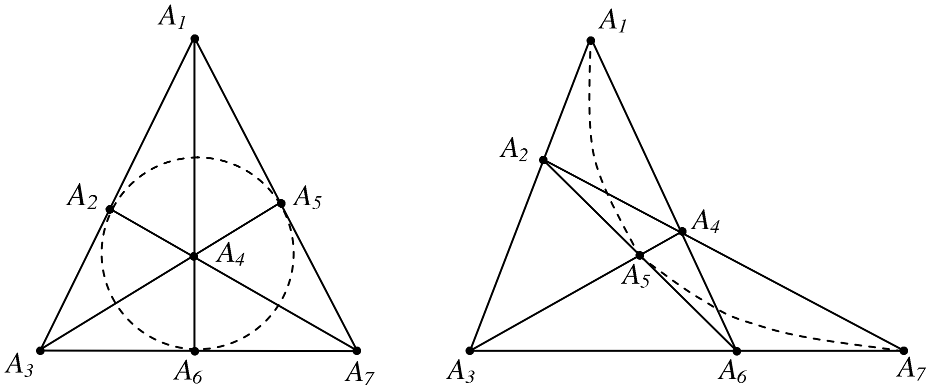
$$\mathcal{P} := \{A_i | i = 1, \ldots, 7\},$$
$$\mathcal{L} := \{\ell_1 = \{A_1, A_2, A_3\}, \ell_2 = \{A_1, A_4, A_6\}, \ell_3 = \{A_1, A_5, A_7\},$$
$$\ell_4 = \{A_2, A_4, A_7\}, \ell_5 = \{A_2, A_5, A_6\}, \ell_6 = \{A_3, A_4, A_5\}, \ell_7 = \{A_3, A_6, A_7\}\}$$

και τη σύμπτωση $\mathcal{I}$ που ορίζει η συνολοθεωρητική σχέση "$\in$".

Είναι πολύ εύκολο να διαπιστώσουμε ότι η τριάδα $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \in)$ είναι προβολικό επίπεδο. Το επίπεδο αυτό λέγεται και ***προβολικό επίπεδο των επτά σημείων*** και αποτελεί παράδειγμα προβολικού επιπέδου με *πεπερασμένο* πλήθος σημείων (και ευθειών).

Όπως θα δείξουμε αρκετά πιο κάτω [βλ. Παρατήρηση 2.4.9 (2)] η *ελαχίστη ισχύς του προβολικού επιπέδου είναι 7*. Αυτό δικαιολογεί και την επιλογή των 7 σημείων του προηγουμένου παραδείγματος.

Μερικούς τρόπους απεικόνισης (στο *ευκλείδειο* επίπεδο!) των σημείων και των ευθειών του παραδείγματος παρουσιάζονται στα παρακάτω σχήματα.



(α) (β)

Σχημα 2.6

Ας σημειωθεί ότι οι ευθείες των σχημάτων (συνεχείς και διακεκομμένες) δεν έχουν καμιά σχέση με τις συνήθεις ευθείες του ευκλειδείου επιπέδου, αλλά σχεδιάζονται για να υποδηλώσουν τις αντίστοιχες τριάδες σημείων, οι οποίες ορίζουν τις ευθείες του παραπάνω προβολικού επιπέδου.

Η σύμπτωση των σημείων και ευθειών του ιδίου παραδείγματος περιγράφεται και στον επ·ομενο πίνακα, του οποίου η ερμηνεία είναι προφανής. Τέτοιοι πίνακες είναι ιδιαιτέρως χρήσιμοι, όταν θέλουμε να περιγράψουμε τη σχέση της σύμπτωσης προβολικών επιπέδων με σχετικώς μεγάλο (αλλά πεπερασμένο) πλήθος σημείων και ευθειών.

	ℓ_1	ℓ_2	ℓ_3	ℓ_4	ℓ_5	ℓ_6	ℓ_7
A_1	•	•	•				
A_2	•			•	•		
A_3	•					•	•
A_4		•		•		•	
A_5			•		•	•	
A_6		•			•		•
A_7			•	•			•

2) Στο διανυσματικό (γραμμικό) χώρο $\mathbb{R}^3$ ορίζουμε τα σύνολα:

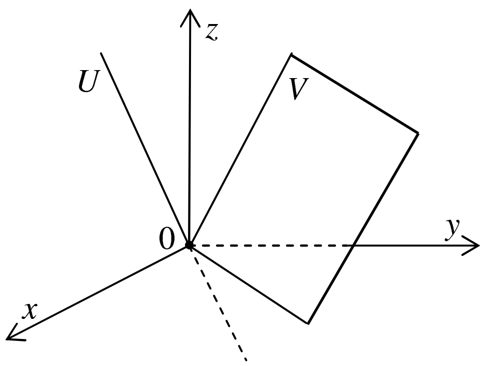
$$\mathcal{P} := \{P \equiv U \leq \mathbb{R}^3 \ : \ \dim U = 1\},$$

$$\mathcal{L} := \{\ell \equiv V \leq \mathbb{R}^3 \ : \ \dim V = 2\},$$

όπου $U \leq \mathbb{R}^3$ σημαίνει ότι ο U είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ (παρόμοια και για τον $V \leq \mathbb{R}^3$). Επίσης, ορίζουμε τη σχέση σύμπτωσης $\mathcal{I} \subset \mathcal{P} \times \mathcal{L}$ με

$$(P, \ell) \in \mathcal{I} \ \Leftrightarrow \ U \leq V, \quad \text{αν} \quad P = U \quad \text{και} \quad \ell = V.$$

Είναι φανερόν ότι τα σημεία του $\mathbb{P}_2$ είναι ακριβώς οι ευθείες του $\mathbb{R}^3$, οι οποίες διέρχονται από το $0 \equiv (0, 0, 0)$, ενώ οι ευθείες του $\mathbb{P}_2$ είναι ακριβώς τα επίπεδα του $\mathbb{R}^3$, που διέρχονται επίσης από το 0.



Σχημα 2.7

Ελέγχουμε αμέσως ότι το $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ αποτελεί προβολικό επίπεδο, που ονομάζεται ***πραγματικό προβολικό επίπεδο διάστασης 2*** και συμβολίζεται με $\mathbb{P}_2$.

• Τα δύο προηγούμενα παραδείγματα αποτελούν *μοντέλα* προβολικών επιπέδων (το πρώτο με πεπερασμένο πλήθος σημείων και ευθειών, το δεύτερο με άπειρο πλήθος). Εδώ οι απροσδιόριστοι όροι (σημεία και ευθείες) αποκτούν συγκεκριμένη υπόσταση (δυάδες/τριάδες στοιχείων, γραμμικοί υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$ κλπ.), μέσω της οποίας επαληθεύουμε την ισχύ των αξιωμάτων (ΠΕ 1) – (ΠΕ 3).

Ας δούμε τώρα μερικές άμεσες συνέπειες των αξιωμάτων ενός προβολικού επιπέδου $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$.

2.2.4 Πρόταση. *Το σημείο P του αξιώματος (ΠΕ 2) είναι μονοσήμαντα ορισμένο.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει κι ένα άλλο σημείο, τέτοιο ώστε $Q \neq P$ με $(Q, k) \in \mathcal{I} \ni (Q, \ell)$. Τότε, επειδή τα P, Q είναι σημεία των k και ℓ, από το (ΠΕ 1) προκύπτει ότι

$$k = P \vee Q = \ell,$$

που είναι άτοπο, επειδή έχουμε υποθέσει ότι $k \neq \ell$. □

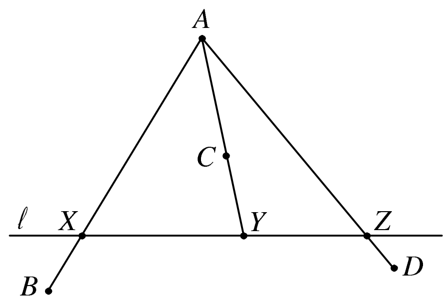
2.2.5 Πρόταση. *Αν A, B, C είναι συγγραμικά σημεία ενός προβολικού επιπέδου, διαφορετικά μεταξύ τους, και ℓ η κοινή ευθεία που τα περιέχει, τότε*

$$\ell = A \vee B = B \vee C = A \vee C.$$

Απόδειξη. Η ίδια με την απόδειξη της Πρότασης 2.1.5. □

2.2.6 Πρόταση. *Κάθε ευθεία ενός προβολικού επιπέδου περιέχει τουλάχιστον τρία διαφορετικά σημεία.*

Απόδειξη. Έστω ℓ μία οποιαδήποτε ευθεία του προβολικού επιπέδου. Σύμφωνα με το (ΠΕ 3), υπάρχουν τέσσερα σημεία που είναι μεταξύ τους διαφορετικά και ανά τρία μη συγγραμμικά. Ας τα καλέσουμε A, B, C, D, και ας υποθέσουμε πρώτα ότι *κανένα απ' αυτά δεν ανήκει στην* ℓ. Ορίζουμε τις ευθείες $A \vee B$, $A \vee C$ και $A \vee D$, οι οποίες είναι μεταξύ τους διαφορετικές [: αν δύο απ' αυτές συνέπιπταν, θα είχαμε ότι τρία από τα παραπάνω σημεία θα ήσαν συγγραμμικά (άτοπο)]. Επίσης οι ίδιες ευθείες είναι διαφορετικές από την ℓ [: αν ήταν, π.χ., $A \vee B = \ell$, τότε $(A, \ell) \in \mathcal{I}$ (άτοπο)].



Σχημα 2.8

Επομένως, ορίζονται μονοσήμαντα τα σημεία (της ℓ)

$$X = \ell \wedge (A \vee B), \quad Y = \ell \wedge (A \vee C), \quad Z = \ell \wedge (A \vee D).$$

Παρατηρούμε ότι $X \neq Y \neq Z \neq X$. Πραγματικά, αν ήταν, π.χ., $X = Y$, τότε

$$A \vee B = A \vee X = A \vee Y = A \vee C,$$

(βλ. Πρόταση 2.2.5) που είναι άτοπο, αφού δείξαμε ότι $A \vee B \neq A \vee C$.

Αν υποθέσουμε ότι ένα ή δύο σημεία από τα A, B, C, D ανήκουν στην ℓ, τότε αρκεί να εξασφαλίσουμε αντιστοίχως την ύπαρξη ακόμη δύο ή ενός σημείων, ακολουθώντας παρόμοια διαδικασία. □

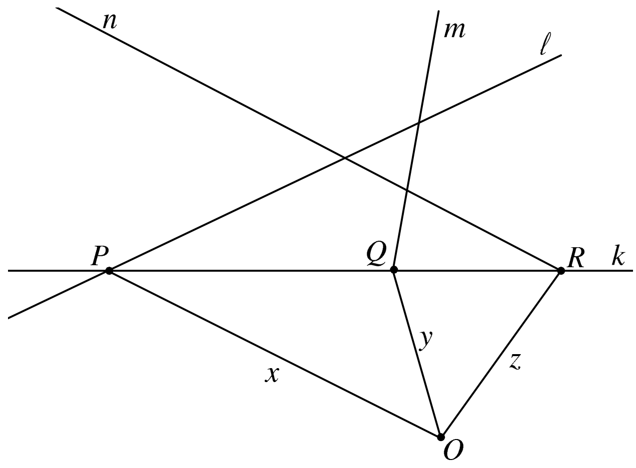
2.2.7 Πρόταση. *Κάθε προβολικό επίπεδο έχει τουλάχιστον τέσσερις διαφορετικές ευθείες, οι οποίες ανά τρεις δεν διέρχονται από το ίδιο σημείο.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τα τέσσερα σημεία A, B, C, D του αξιώματος (ΠΕ 3). Ορίζουμε τις ευθείες $A \vee B$, $B \vee C$, $C \vee D$ και $D \vee A$. Βλέπουμε αμέσως ότι είναι διαφορετικές μεταξύ τους [: αλλιώς θα βρίσκαμε τριάδες συγγραμμικών σημείων από τα A, B, C, D (άτοπο)].

Οι προηγούμενες ευθείες δεν διέρχονται ανά τρεις από το ίδιο σημείο. Πραγματικά, ας υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι υπάρχει σημείο $O \in \mathcal{P}$ από το οποίο διέρχονται οι $A \vee B$, $B \vee C$ και $C \vee D$. Τότε, λόγω του μονοσήμαντου της τομής των διαφορετικών ευθειών $A \vee B$ και $B \vee C$, θα ήταν $B = O$. Αναλόγως, από τις $B \vee C$ και $C \vee D$, θα ήταν και $C = O$, οπότε θα καταλήγαμε στο άτοπο συμπέρασμα ότι $B = O = C$. □

2.2.8 Πρόταση. *Από κάθε σημείο O ενός προβολικού επιπέδου διέρχονται τουλάχιστον τρεις διαφορετικές ευθείες.*

Απόδειξη. Σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση, υπάρχουν τέσσερις ευθείες k, ℓ, m, n, οι οποίες είναι διάφορες μεταξύ τους και ανά τρεις δεν διέρχονται από το ίδιο σημείο.



Σχημα 2.9

Ας υποθέσουμε πρώτα ότι καμία απ' αυτές δεν διέρχεται από το O. Τότε ορίζονται τα σημεία $P = k \wedge \ell$, $Q = k \wedge m$ και $R = k \wedge n$ (βλ. Σχήμα 2.9), που είναι διαφορετικά μεταξύ τους [: αν δύο απ' αυτά συνέπιπταν, τότε τρεις από τις παραπάνω ευθείες θα διέρχονταν από το ίδιο σημείο (άτοπο)].

Επίσης, τα προηγούμενα σημεία δεν συμπίπτουν με το O [: αν, για παράδειγμα, $O = P$, τότε το O θα ανήκε στην k (άτοπο)]. Επομένως, ορίζονται μονοσήμαντα οι ευθείες

$$x = O \vee P, \quad y = O \vee Q, \quad z = O \vee R.$$

Παρατηρούμε ότι $x \neq y \neq z \neq x$: αν, π.χ., ήταν $x = y$, τότε

$$P = k \wedge x = k \wedge y = Q,$$

που είναι άτοπο, αφού δείξαμε ότι $P \neq Q$.

Αν τώρα υποθέσουμε ότι από το O διέρχονται μία ή δύο από τις ευθείες k, ℓ, m, n, τότε αρκεί να εξασφαλίσουμε ότι διέρχονται ακόμη δύο ή μία ευθείες αντιστοίχως, εφαρμόζοντας ακριβώς την προηγούμενη διαδικασία. □

2.2.9 Ασκήσεις.

1. Έστω ότι μία τριάδα $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ ικανοποιεί τα αξιώματα:

(ΠΕ 1′) Αν $P, Q \in \mathcal{P}$ με $P \neq Q$, τότε υπάρχει ευθεία $k \in \mathcal{L}$, τέτοια ώστε $(P, k) \in \mathcal{I} \ni (Q, k)$.

(ΠΕ 2′) Αν $k, \ell \in \mathcal{L}$ με $k \neq \ell$, τότε υπάρχει *ακριβώς ένα* σημείο $P \in \mathcal{I}$, τέτοιο ώστε $(P, k) \in \mathcal{I} \ni (Q, k)$.
(ΠΕ 3′) = (ΠΕ 3).

α) Να αποδειχθεί ότι η k του (ΠΕ 1′) είναι μονοσήμαντα ορισμένη.
β) Τί συμπέρασμα προκύπτει για την τριάδα $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$;

2. Σε κάθε προβολικό επίπεδο υπάρχει ευθεία ℓ και σημείο P με την ιδιότητα: $(P, \ell) \notin \mathcal{I}$. Ισχύει το ίδιο συμπέρασμα και σ' ένα συσχετισμένο επίπεδο;

3. Δίνεται μία ευθεία ℓ ενός προβολικού επιπέδου. Τότε υπάρχει σημείο P με $(P, \ell) \notin \mathcal{I}$. Αναλόγως, αν *δίνεται* το P, υπάρχει ευθεία ℓ με την ίδια ιδιότητα, όπως προηγουμένως.

4. Αν k και ℓ είναι δύο διαφορετικές ευθείες ενός προβολικού επιπέδου, τότε υπάρχει ένα σημείο του επιπέδου, που δεν ανήκει σε καμία από τις ευθείες αυτές. Να αποδειχθεί το ανάλογο του συσχετισμένου επιπέδου.

5. Έστω $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ η μοναδιαία σφαίρα του $\mathbb{R}^3$ με κέντρο το $0 \equiv (0, 0, 0)$. Για κάθε $a = (x, y, z) \in S^2$, συμβολίζουμε με $-a = (-x, -y, -z)$ το αντιδιαμετρικό του σημείο. Θεωρούμε τα σύνολα

$$\mathcal{P} := \left\{ P = (a, -a) \,\middle|\, a \in S^2 \right\},$$
$$\mathcal{L} := \left\{ S^1 \,\middle|\, S^1 \text{ μέγιστος κύκλος της } S^2 \right\}.$$

Αν $\mathcal{I}$ είναι η σχέση σύμπτωσης που ορίζεται με την ισοδυναμία

$$(P, S^1) \in \mathcal{I} \quad \Leftrightarrow \quad (a, -a) \in S^1, \quad \text{αν} \quad P = (a, -a),$$

τότε η τριάδα $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ αποτελεί προβολικό επίπεδο. Πώς συνδέεται το τελευταίο με το $\mathbb{P}_2$;

2.3 Η αρχή του δυϊσμού

Συγκρίνοντας τις Προτάσεις 2.2.6 και 2.2.8, βλέπουμε ότι η μία προκύπτει από την άλλη, αν εναλλάξουμε τις έννοιες σημείο, ευθεία, ανήκει (περιέχεται) αντιστοίχως με τις έννοιες ευθεία, σημείο, διέρχεται.

$$\begin{array}{ccc} \text{Σημείο} & \text{Ευθεία} & \text{ανήκει (περιέχεται)} \\ \downarrow\uparrow & \downarrow\uparrow & \downarrow\uparrow \\ \text{Ευθεία} & \text{Σημείο} & \text{διέρχεται} \end{array}$$

Σχήμα 2.10

Το ίδιο διαπιστώνουμε συγκρίνοντας και τις αποδείξεις των ιδίων προτάσεων καθώς επίσης και το αξίωμα (ΠΕ 3) με την Πρόταση 2.2.7.

Στις περιπτώσεις αυτές λέμε ότι η Πρόταση 2.2.8 είναι ***δυϊκή*** (dual) της 2.2.6 και αντιστρόφως. Ομοίως και η Πρόταση 2.2.7 είναι ένα συμπέρασμα δυϊκό του αξιώματος (ΠΕ 3).

Όπως θα δείξουμε στη συνέχεια, στην Προβολική Γεωμετρία ισχύει η ***αρχή του δυϊσμού*** (principle of duality), σύμφωνα με την οποία, για κάθε συμπέρασμα που ισχύει (αληθεύει) στο προβολικό επίπεδο, ισχύει ταυτόχρονα και το δυϊκό του, δηλαδή αυτό που προκύπτει με την παραπάνω εναλλαγή του Σχήματος 2.10.

Την πατρότητα της αρχής αυτής διεκδίκησαν οι γεωμέτρες J. V. Poncelet (1788–1867) και J. D. Gergonne (1771–1859), πράγμα που τους οδήγησε σε μία μακροχρόνια και θλιβερή διαμάχη, ίσως χειρότερη από αυτήν μεταξύ των I. Newton (1642–1727) και G. W. Leibniz (1646–11716) για την πατρότητα του Διαφορικού Λογισμού.

Για την απόδειξη της αρχής του δυϊσμού θεωρούμε ένα προβολικό επίπεδο $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ και την τριάδα

$$(\mathcal{P}^*, \mathcal{L}^*, \mathcal{I}^*), \quad \text{όπου} \quad \mathcal{P}^* = \mathcal{L}, \;\; \mathcal{L}^* = \mathcal{P},$$

και η $\mathcal{I}^*$ ορίζεται ως εξής: για ένα $(P^*, \ell^*) \in \mathcal{P}^* \times \mathcal{L}^*$ θα είναι

$$(P^*, \ell^*) \in \mathcal{I}^* \;\;\Leftrightarrow\;\; (Q, k) \in \mathcal{I},$$

αν $P^* = k$ και $\ell^* = Q$, με $(Q, k) \in \mathcal{P} \times \mathcal{L}$.

Δηλαδή, η τριάδα $(\mathcal{P}^*, \mathcal{L}^*, \mathcal{I}^*)$ έχει προκύψει από το αρχικό προβολικό επίπεδο με την εναλλαγή που περιγράψαμε πιο πάνω.

2.3.1 Πρόταση. *Η τριάδα $(\mathcal{P}^*, \mathcal{L}^*, \mathcal{I}^*)$ αποτελεί προβολικό επίπεδο, το οποίον καλείται **δυϊκό** του $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι ισχύουν τα αξιώματα (ΠΕ 1) – (ΠΕ 3). Για την απόδειξη του (ΠΕ 1) θεωρούμε τα $P^*, Q^* \in \mathcal{P}^*$ με $P^* \neq Q^*$. Επομένως, θα υπάρχουν ευθείες $k, m \in \mathcal{L}$ με $k \neq m$ και τέτοιες ώστε $P^* = k$ και $Q^* = m$. Άρα, κατά το (ΠΕ 2) και την Πρόταση 2.2.4 [για το $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$], ορίζεται μονοσήμαντα το σημείο $k \wedge m$. Θέτοντας $\ell^* := k \wedge m$, παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}(k \wedge m, k) \in \mathcal{I} \;\;&\Leftrightarrow\;\; (P^*, \ell^*) \in \mathcal{I}^*,\\ (k \wedge m, m) \in \mathcal{I} \;\;&\Leftrightarrow\;\; (Q^*, \ell^*) \in \mathcal{I}^*.\end{aligned}$$

Επομένως, η ℓ^* είναι ευθεία του $\mathcal{L}^*$ που περιέχει τα P^* και Q^*. Η ℓ^* είναι και η μοναδική με αυτήν την ιδιότητα, γιατί αν υπήρχε και μια $x^* = X \in \mathcal{L}^*$ με την ίδια ιδιότητα, τότε

$$\begin{aligned}(P^*, x^*) \in \mathcal{I}^* \;\;&\Leftrightarrow\;\; (X, k) \in \mathcal{I},\\ (Q^*, x^*) \in \mathcal{I}^* \;\;&\Leftrightarrow\;\; (X, m) \in \mathcal{I},\end{aligned}$$

οπότε θα είχαμε ότι $X = k \wedge m$ (εφ' όσον $k \neq m$), δηλαδή $x^* = \ell^*$.

Για το (ΠΕ 2), αναλόγως προς τα προηγούμενα, θεωρούμε τις διαφορετικές ευθείες $k^*, \ell^* \in \mathcal{L}^*$. Μπορούμε να θέσουμε $k^* = Q$ και $\ell^* = R$ (με $Q \neq R$). Επομένως, κατά το (ΠΕ 1) για το επίπεδο $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, ορίζεται η $Q \vee R \in \mathcal{L}$, οπότε το $P^* := Q \vee R$ είναι το (μοναδικό) κοινό σημείο των k^*, ℓ^*.

Τέλος, για το (ΠΕ 3) παρατηρούμε τα εξής. Σύμφωνα με την Πρόταση 2.2.7, υπάρχουν ευθείες $k_i \in \mathcal{L}$ $(i = 1, \ldots, 4)$ οι οποίες είναι διαφορετικές μεταξύ τους και ανά τρεις δεν διέρχονται από το ίδιο σημείο. Επομένως, θέτοντας $P_i^* = k_i$, βρίσκουμε τέσσερα διαφορετικά σημεία του $\mathcal{P}^*$. Τα σημεία αυτά δεν βρίσκονται ανά τρία σε κοινή ευθεία. Πραγματικά, αν υπήρχε ευθεία $\ell^* \in \mathcal{L}^*$ που να περιείχε τρία εξ αυτών, τότε οι αντίστοιχες ευθείες k_i θα διέρχονταν από ένα κοινό σημείο του $\mathcal{P}$, αυτό που ορίζει η ℓ^* (άτοπο). Άρα ισχύει και το (ΠΕ 3). $\square$

Από την προηγούμενη απόδειξη γίνεται φανερόν ότι τα αξιώματα του προβολικού επιπέδου $(\mathcal{P}^*, \mathcal{L}^*, \mathcal{I}^*)$ είναι δυϊκές εκφράσεις αξιωμάτων του αρχικού επιπέδου $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$. Ακριβέστερα, αν (ΠΕ* N) (N $= 1, 2, 3$) συμβολίζει άξίωμα του δυϊκού προβολικού επιπέδου, και (ΠΕ N)* το δυϊκό του αξιώματος (ΠΕ N), τότε έχουμε την επόμενη αντιστοιχία:

$$(\text{ΠΕ}^*\ 1) = (\text{ΠΕ}\ 2)^*, \quad (\text{ΠΕ}^*\ 2) = (\text{ΠΕ}\ 1)^*, \quad (\text{ΠΕ}^*\ 3) = \text{ΠΡΟΤΑΣΗ 2.2.7} = (\text{ΠΕ}\ 3)^*.$$

2.3.2 Λήμμα. *Υποθέτουμε ότι S είναι μία πρόταση που ισχύει σε ένα προβολικό επίπεδο $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$. Τότε η δυϊκή πρόταση S^* ισχύει στο δυϊκό επίπεδο $(\mathcal{P}^*, \mathcal{L}^*, \mathcal{I}^*)$.*

Απόδειξη. Αφού η S ισχύει στο $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ σημαίνει ότι προκύπτει από τα αξιώματα (ΠΕ 1) – (ΠΕ 3). Η απόδειξη της δυϊκής πρότασης S^* γίνεται αν εφαρμόσουμε την εναλλαγή του Σχήματος 2.10 στην απόδειξη της S, άρα προκύπτει από τα δυϊκά των αξιωμάτων του $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$. Επομένως, η απόδειξη της S^*, τελικά, προκύπτει από τα αξιώματα του $(\mathcal{P}^*, \mathcal{L}^*, \mathcal{I}^*)$, άρα η S^* αληθεύει στο $(\mathcal{P}^*, \mathcal{L}^*, \mathcal{I}^*)$. $\square$

Μπορούμε τώρα να δείξουμε το επόμενο βασικό

2.3.3 Θεώρημα (Αρχή του δυϊσμού). *Στην κατηγορία των προβολικών επιπέδων ισχύει η αρχή του δυϊσμού. Δηλαδή, αν S είναι μία πρόταση, η οποία αληθεύει σε κάθε προβολικό επίπεδο, τότε αληθεύει και δυϊκή της πρόταση S^*, επίσης σε κάθε προβολικό επίπεδο.*

Απόδειξη. Αφού η S αληθεύει σε κάθε προβολικό επίπεδο $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ (δηλαδή είναι μια γενική ιδιότητα των προβολικών επιπέδων), θα αληθεύει και σε κάθε δυϊκό επίπεδο $(\mathcal{P}^*, \mathcal{L}^*, \mathcal{I}^*)$. Επομένως, κατά το Λήμμα 2.3.2, η S^* αληθεύει και στο δυϊκό του τελευταίου επιπέδου, δηλαδή στο $((\mathcal{P}^*)^*, (\mathcal{L}^*)^*, (\mathcal{I}^*)^*)$. Επειδή $(\mathcal{P}^*)^* = \mathcal{P}$, $(\mathcal{L}^*)^* = \mathcal{L}$, και η $(\mathcal{I}^*)^*$ ταυτίζεται με την $\mathcal{I}$, καταλήγουμε στο συμπέρασμα. $\square$

Όπως προκύπτει από τα προηγούμενα, η αρχή του δυϊσμού παρέχει μία σημαντική διευκόλυνση στη μελέτη της Προβολικής Γεωμετρίας, αφού μαζί με κάθε συμπέρασμα (που αποδεικνύουμε) ισχύει και ένα νέο, το δυϊκό του, χωρίς να χρειάζεται να το αποδείξουμε. Άλλωστε, και η διαδικασία της απόδειξης του δυϊκού συμπεράσματος είναι δυϊκή της απόδειξης του αρχικού συμπεράσματος, δηλαδή προκύπτει από την αρχική απόδειξη με τη γνωστή εναλλαγή του Σχήματος 2.10.

Επίσης, η ίδια αρχή δείχνει ότι οι (μη οριζόμενες) έννοιες της ευθείας και του σημείου έχουν ανάλογες (συμμετρικές) ιδιότητες, ενώ επιβεβαιώνεται –ακόμη μια φορά– η αυθαιρεσία της ονοματολογίας. Έτσι, κάποια στοιχεία που αποτελούν τα σημεία ενός επιπέδου μπορούν να είναι ευθείες ενός άλλου κ.ο.κ.

2.3.4 Ασκήσεις.

1. Ποιο είναι το δυϊκό του προβολικού επιπέδου των 7 σημείων;

2. Να δικαιολογηθεί γιατί *δεν* ισχύει η αρχή του δυϊσμού στην κατηγορία των συσχετισμένων επιπέδων.

3. Είναι το σύστημα των αξιωμάτων (ΠΕ 1) – (ΠΕ 3) αυτοδυϊκό; Δηλαδή, αν πάρουμε τα δυϊκά τους, τότε παραμένουμε εντός του συστήματος; Με ποια προσθήκη μπορούμε να δημιουργήσουμε ένα αυτοδυϊκό σύνολο αξιωμάτων και προτάσεων;

2.4 Στοιχειώδεις απεικονίσεις

Στην παράγραφο αυτή θα εξετάσουμε μερικές απλές απεικονίσεις, με τις οποίες συγκρίνουμε το πλήθος των σημείων που ανήκουν σε διάφορες ευθείες, το πλήθος των ευθειών που διέρχονται από διάφορα σημεία ενός προβολικού επιπέδου και άλλα σχετικά ερωτήματα.

- Θεωρούμε πάντοτε ένα προβολικό επίπεδο $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$.

2.4.1 Ορισμός. Αν m είναι ευθεία του προβολικού επιπέδου, καλούμε ***σημειοσειρά*** ή ***δέσμη σημείων*** (pencil of points) της m το σύνολο

$$J(m) = \{P \in \mathcal{P} \ : \ (P, m) \in \mathcal{I}\}.$$

Η ευθεία m καλείται επίσης ***άξονας*** (axis) της σημειοσειράς.

Αντιστοίχως, αν O είναι σημείο του προβολικού επιπέδου, καλούμε ***δέσμη ευθειών*** (pencil of lines) του O (ή από το O) το σύνολο

$$J(O) = \{\ell \in \mathcal{L} \ : \ (O, \ell) \in \mathcal{I}\}.$$

Το O καλείται και ***κέντρο*** (center) της δέσμης.

Προφανώς, οι δύο έννοιες είναι δυϊκές μεταξύ τους. Στην περίπτωση της Στοιχειώδους Γεωμετρίας, η σημειοσειρά της m αποτελείται από όλα τα σημεία της, ενώ τη δέσμη του O αποτελούν όλες οι ευθείες που διέρχονται από το O. Ο Ορισμός 2.4.1 γενικεύει την κατάσταση της Στοιχειώδους Γεωμετρίας στο δικό μας πλαίσιο, στο οποίον οι έννοιες «ανήκει», «διέρχεται» κλπ. ορίζονται μέσω της σύμπτωσης $\mathcal{I}$ και οι ευθείες δεν είναι κατ᾽ ανάγκην σημειοσειρές.

2.4.2 Πρόταση. *Αν $k, \ell \in \mathcal{L}$, τότε ισχύει η ισοδυναμία*

$$[\, k = \ell \,] \;\Leftrightarrow\; [\, J(k) = J(\ell) \,].$$

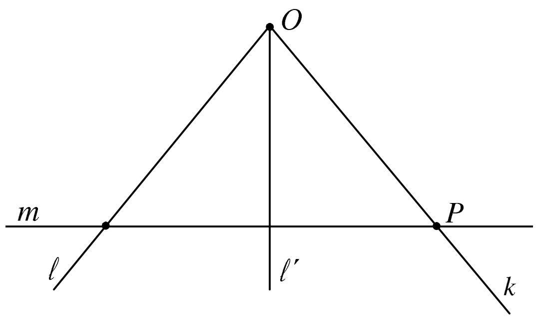
Απόδειξη. Αν $k = \ell$, τότε η ισότητα των δύο σημειοσειρών είναι προφανής. Αντιστρόφως, ας υποθέσουμε ότι $J(k) = J(\ell)$. Λόγω της Πρότασης 2.2.6, η k διαθέτει τουλάχιστον τρία διαφορετικά σημεία A, B, C, οπότε $k = A \vee B$. Επίσης, από τον Ορισμό 2.4.1, προκύπτει ότι $A, B, C \in J(k) = J(\ell)$, άρα και $\ell = A \vee B$. Επομένως

$$k = A \vee B = \ell. \qquad \square$$

Για να συγκρίνουμε τις σημειοσειρές και τις δέσμες ευθειών χρειαζόμαστε και τον επόμενο ορισμό.

2.4.3 Ορισμός. Έστω $O \in \mathcal{P}$ και $m \in \mathcal{L}$ με $(O, m) \notin \mathcal{I}$ (ισοδύναμα: $O \notin J(m)$). Ονομάζουμε ***στοιχειώδη απεικόνιση*** (elementary correpondence), από τη δέσμη $J(O)$ στη σημειοσειρά $J(m)$, την απεικόνιση

$$\delta : J(O) \longrightarrow J(m) : \ell \mapsto \ell \wedge m.$$



Σχημα 2.11

Αν έχουμε πολλές στοιχειώδεις απεικονίσεις, γράφουμε και

$$\delta = \delta_{O,m}\,, \tag{2.4.1}$$

προκειμένου να διευκρινίσουμε ότι η δ απεικονίζει τη δέσμη του σημείου O στη σημειοσειρά της ευθείας m.

2.4.4 Πρόταση. *Η απεικόνιση $\delta = \delta_{O,m}$ είναι καλά ορισμένη, 1–1 και επί.*

Απόδειξη. Για κάθε $\ell \in J(O)$, θα είναι $\ell \neq m$, σύμφωνα με την Πρόταση 2.4.2. Άρα (βλ. και Πρόταση 2.2.4 το σημείο $\ell \wedge m$ είναι μονοσήμαντα ορισμένο και η δ είναι καλά ορισμένη.

Για να δείξουμε ότι η δ είναι $1-1$, ας υποθέσουμε ότι $\delta(\ell) = \delta(\ell')$, δηλαδή $\ell \wedge m = \ell' \wedge m$. Επειδή $O \notin J(m)$, θα είναι $\ell \wedge m \neq O \neq \ell' \wedge m$, οπότε (βλ. και Σχήμα 2.11)

$$\ell = O \vee (\ell \wedge m) = O \vee (\ell' \wedge m) = \ell',$$

που αποδεικνύει τον ισχυρισμό.

Τέλος, η δ είναι επί: πραγματικά, για τυχόν $P \in J(m)$, θα είναι $P \neq O$. Συνεπώς ορίζεται η $k = P \vee O$. Παρατηρούμε ότι $k \in J(O)$ και

$$\delta(k) = (P \vee O) \wedge m = P,$$

όπως ζητούσαμε. □

2.4.5 Συμβολισμός. Την ***ισχύ*** (cardinality), δηλαδή το πλήθος των στοιχείων της δέσμης $J(O)$ [αντίστ. της σημειοσειράς $J(m)$] συμβολίζουμε με $|J(O)|$ (αντίστ. $|J(m)|$). Ένας άλλος συμβολισμός για την ισχύ *πεπερασμένης* δέσμης (αντίστ. σημειοσειράς), που δεν ακολουθείται εδώ, είναι και $\# J(O)$ [αντίστ. $\# J(m)$].

Άμεση συνέπεια της Πρότασης 2.4.4 είναι τώρα τα επόμενα συμπεράσματα.

2.4.6 Πόρισμα. *Για οποιοδήποτε ζεύγος $(O, m) \in \mathcal{P} \times \mathcal{L}$ με $(O, m) \notin \mathcal{I}$, ισχύει η σχέση*

$$|J(O)| = |J(m)|.$$

2.4.7 Πόρισμα. *Για οποιεσδήποτε ευθείες $k, \ell \in \mathcal{L}$ ισχύει η σχέση*

$$|J(k)| = |J(\ell)|.$$

Απόδειξη. Αν $k = \ell$, η σχέση είναι προφανής. Αν $k \neq \ell$, τότε [βλ. Άσκηση 2.2.9 (4)] υπάρχει $O \in \mathcal{P}$ με $(O, k) \notin \mathcal{I}$ και $(O, \ell) \notin \mathcal{I}$. Εφαρμόζοντας το Πόρισμα 2.4.6, έχουμε ότι

$$|J(k)| = |J(O)| = |J(\ell)|.$$

□

Ένας συσχετισμός μεταξύ του πλήθους των σημείων μιας ευθείας (που είναι το ίδιο για όλες τις ευθείες, κατά το Πόρισμα 2.4.7) και του πλήθους των σημείων ενός ***πεπερασμένου*** προβολικού επιπέδου (δηλ. με πεπερασμένο πλήθος σημείων) δίνεται στην επόμενη

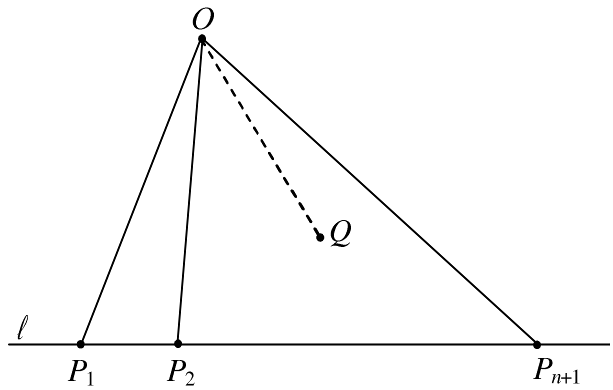
2.4.8 Πρόταση. *Υποθέτουμε ότι ℓ είναι μία ευθεία του προβολικού επιπέδου με $n + 1$ ($n \geq 2$) το πλήθος διαφορετικά σημεία. Τότε το προβολικό επίπεδο διαθέτει ακριβώς $n^2 + n + 1$ σημεία.*

Απόδειξη. Θεωρούμε ένα σημείο $O \in \mathcal{P}$ με $(O, \ell) \notin \mathcal{I}$ [βλ. Άσκηση 2.2.9 (3)] και καλούμε P_i ($i = 1, \dots, n+1$) τα σημεία της ℓ (βλ. και το Σχήμα 2.12 στην επόμενη σελίδα).

Επειδή $O \neq P_i$ [αφού $O \notin J(\ell)$], ορίζονται οι ευθείες $O \vee P_i$ ($i = 1, \dots, n+1$), που είναι όλες διαφορετικές από την ℓ, σύμφωνα με την Πρόταση 2.4.2. Επίσης, $O \vee P_i \neq O \vee P_j$ (για όλους τους δείκτες i, j με $i \neq j$), γιατί αν ήταν $O \vee P_i = O \vee P_j$ (για κάποιους δείκτες i, j), τότε θα είχαμε ότι

$$P_i = \ell \wedge (O \vee P_i) = \ell \wedge (O \vee P_j) = P_j,$$

που είναι άτοπο. Επομένως, από το O διέρχονται οι $n + 1$ διαφορετικές ευθείες



Σχημα 2.12

$O \vee P_i$ και κάθε μία απ᾽ αυτές έχει $n+1$ το πλήθος σημεία διαφορετικά (αφού $|J(\ell)| = |J(O \vee P_i)|$, κατά το Πόρισμα 2.4.7). Άρα, η κάθε μία έχει n το πλήθος διαφορετικά μεταξύ τους σημεία και διαφορετικά από το O. Κατά συνέπειαν, θεωρώντας όλα τα σημεία τους εκτός του O, από τις ευθείες αυτές λαμβάνουμε $(n+1) \cdot n = n^2 + n$ σημεία. Υπολογίζοντας τώρα και το O, λαμβάνουμε τελικώς $n^2 + n + 1$ διαφορετικά σημεία του προβολικού επιπέδου.

Ισχυριζόμαστε ότι δεν υπάρχουν άλλα σημεία στο επίπεδο εκτός απ᾽ αυτά που πήραμε με την προηγούμενη διαδικασία. Πραγματικά, ας υποθέσουμε ότι υπάρχει κι ένα σημείο Q, διαφορετικό από τα προηγούμενα. Τότε θα ορίζεται και η ευθεία $O \vee Q$, η οποία θα είναι διαφορετική από όλες τις $O \vee P_i$, αφού το Q δεν ανήκει σε καμιά τους [αλλιώς η $O \vee P_i$, που θα περιείχε το Q, θα είχε $n+2$ διαφορετικά σημεία (άτοπο)]. Άρα, από το O θα διέρχονται $n+2$ διαφορετικές ευθείες (οι $O \vee P_i$ και η $O \vee Q$). Δηλαδή θα είναι $|J(O)| = n+2$, που είναι επίσης άτοπο, γιατί $|J(O)| = |J(\ell)| = n+1$ (βλ. Πόρισμα 2.4.6). Επομένως αληθεύει ο παραπάνω ισχυρισμός και αποδεικνύεται η πρόταση. □

2.4.9 Παρατηρήσεις. 1) Ο περιορισμός $n \geq 2$ στην εκφώνηση της Πρότασης 2.4.8 είναι (προφανώς) συνέπεια της Πρότασης 2.2.6.

2) Για $n = 2$, το πλήθος των σημείων του προβολικού επιπέδου είναι 7, άρα κάθε προβολικό επίπεδο έχει τουλάχιστον 7 διαφορετικά σημεία [συγκρίνατε με το (ΠΕ 3)]. Επομένως,

η ελαχίστη ισχύς *του προβολικού επιπέδου ειναι 7*

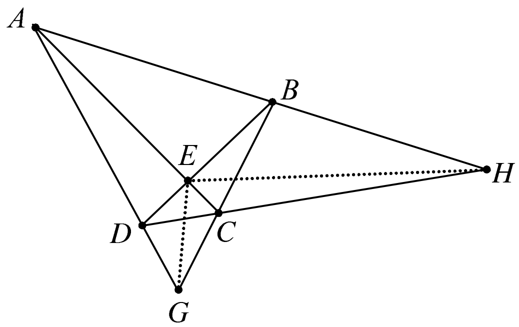
και αυτό δικαιολογεί το Παράδειγμα 2.2.3 (1).

3) Μπορούμε να δείξουμε το συμπέρασμα της προηγούμενης παρατήρησης αμέσως από το (ΠΕ 3), χωρίς τη χρήση της Πρότασης 2.4.8, ως εξής: ας ξεκινήσουμε με τα τέσσερα σημεία A, B, C, D, τα οποία ορίζονται κατά το (ΠΕ 3). Σύμφωνα με το (ΠΕ 1) ορίζονται οι ευθείες

$$A \vee B, \quad A \vee C, \quad A \vee D, \quad B \vee C, \quad B \vee D, \quad C \vee D \tag{2.4.2}$$

οι οποίες είναι διαφορετικές μεταξύ τους, άρα τέμνονται κατά ζεύγη. Επομένως, εκτός των A, B, C, D, ορίζονται και τα σημεία

$$E = (A \vee C) \wedge (B \vee D), \;\; G = (A \vee D) \wedge (B \vee C), \;\; H = (A \vee B) \wedge (D \vee C),$$



Σχημα 2.13

δηλαδή τελικώς έχουμε 7 διαφορετικά σημεία. Για την πληρότητα ας παρατηρήσουμε ότι, εκτός από τις ευθείες (2.4.2), υπάρχει και άλλη μία: η ευθεία που περιέχει τα σημεία G, E, H και σημειώνεται στο Σχήμα 2.13 με διάστικτη μορφή.

Εδώ διευκρινίζουμε ότι, όπως σχολιάσαμε και μετά το Παράδειγμα 2.2.3(1), οι ευθείες που προκύπτουν τελικώς είναι τριάδες της μορφής $\{A, B, H\}$, $\{A, D, G\}$, $\{G, E, H\}$ κλπ. και δεν έχουν καμία σχέση με τις συνήθεις γραμμές (που περιέχουν τα αντίστοιχα σημεία) του Σχήματος 2.13. Το τελευταίο σχήμα γίνεται στο σύνηθες επίπεδο, για διευκόλυνση, και δεν αποδίδει ακριβώς την αντίστοιχη κατάσταση στο (αφηρημένο) προβολικό επίπεδο. Αυτό φαίνεται ακόμη περισσότερο στην απεικόνιση της ευθείας $\{G, E, H\}$.

4) Αν οι ευθείες ενός (πεπερασμένου) προβολικού επιπέδου περιέχουν $n + 1$ (διαφορετικά) σημεία, λέμε ότι το επίπεδο έχει ***τάξη*** (order) n. Έτσι, το επίπεδο των 7 σημείων έχει τάξη 2, ενώ το επίπεδο τάξης 3 είναι αυτό των 13 σημείων κ.ο.κ.

Ένα δύσκολο πρόβλημα είναι να αποφανθούμε αν υπάρχει ή όχι προβολικό επίπεδο με δεδομένη τάξη. Είναι γνωστόν ότι υπάρχουν προβολικά επίπεδα τάξης n, για όλα τα $n = p^k$, όπου p είναι πρώτος αριθμός, αλλά αγνοούμε αν είναι και οι μόνες δυνατές τάξεις πεπερασμένων προβολικών επιπέδων. Για παράδειγμα, γνωρίζουμε ότι δεν υπάρχουν προβολικά επίπεδα τάξης 6, 10, 14, 21, 22, κ.α., ενώ παραμένει ανοιχτό το πρόβλημα για $n = 12, 15, 18$ κ.α. Για περισσότερες λεπτομέρειες βλ. [10, σελ. 12] και [25, σελ. 105].

2.4.10 Ασκήσεις.

1. Αναλόγως προς τη $\delta_{O,m}$, ορίζεται η απεικόνιση

$$\delta' = \delta_{m,O} : J(m) \longrightarrow J(O) : P \mapsto P \vee O.$$

Να αποδειχθούν τα εξής:

α) Η δ' είναι μία καλά ορισμένη απεικόνιση, $1-1$ και επί.
β) Η δ' είναι αντίστροφη της δ.

2. Να αποδειχθεί ότι, για οποιαδήποτε σημεία $P, Q \in \mathcal{P}$ με $P \neq Q$, είναι

$$|J(P)| = |J(Q)|.$$

3. Αν $(A, \ell) \in \mathcal{P} \times \mathcal{L}$ και $(A, \ell) \in \mathcal{I}$, να εξεταστεί αν ισχύει η σχέση

$$|J(A)| = |J(\ell)|.$$

Να συσχετιστεί το αποτέλεσμα με το Πόρισμα2.4.6.

4. Γιατί ένα επίπεδο που έχει περισσότερα από 7 σημεία θα έχει αναγκαστικά τουλάχιστον 13 διαφορετικά σημεία; Τι συμβαίνει με τις ευθείες ενός τέτοιου επιπέδου;

5. Να οριστεί η έννοια της σημειοσειράς και της δέσμης ευθειών σε ένα *συσχετισμένο* επίπεδο και να αποδειχθεί το ανάλογο της Πρότασης 2.4.2.

6. Ισχύουν σε ένα *συσχετισμένο* επίπεδο η Πρόταση 2.4.4 και τα Πορίσματα 2.4.6, 2.4.7; Ποιά είναι τα ανάλογα συμπεράσματα στην περίπτωση αυτή;

7. Αν μια ευθεία ℓ ενός *συσχετισμένου* επιπέδου διαθέτει n ($n \geq 2$) το πλήθος διαφορετικά σημεία, τότε το επίπεδο έχει ακριβώς n^2 διαφορετικά σημεία.

8. Με τις υποθέσεις της προηγούμενης άσκησης, να αποδειχθεί ότι από κάθε σημείο του επιπέδου διέρχονται $n+1$ διαφορετικές ευθείες. [Υπόδειξη: Να εξεταστούν δύο περιπτώσεις: το σημείο να βρίσκεται α) επί της ℓ, και β) εκτός αυτής.]

2.5 Σχέση προβολικών και συσχετισμένων επιπέδων

Στην παράγραφο αυτή θα δείξουμε ότι, μέσω της διαδικασίας της *πλήρωσης*, από ένα συσχετισμένο επίπεδο κατασκευάζεται ένα προβολικό και αντιστρόφως, μέσω της *αποπλήρωσης*, από ένα προβολικό επίπεδο κατασκευάζεται ένα συσχετισμένο.

Θεωρούμε πρώτα δεδομένο ένα *συσχετισμένο* επίπεδο $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$. Υπενθυμίζουμε ότι, σύμφωνα με τους ορισμούς της Παραγράφου 2.4 [βλ. ιδιαιτέρως την Πρόταση 2.4.2 και την Άσκηση 2.4.10(5)], για ένα συσχετισμένο/προβολικό επίπεδο $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ ισχύει η ισοδυναμία

$$(P, \ell) \in \mathcal{I} \;\Leftrightarrow\; P \in J(\ell), \qquad \forall\, (P, l) \in \mathcal{P} \times \mathcal{L}.$$

Όπως είδαμε στην Πρόταση 2.1.8, η παραλληλία ορίζει μία σχέση ισοδυναμίας. Αν $\ell^{\bullet} := [\,\ell\,]$ συμβολίζει την κλάση ισοδυναμίας μιας ευθείας ℓ του συσχετισμένου επιπέδου, θέτουμε

$$\mathcal{E}_{\infty} := \{\ell^{\bullet} \mid \ell \in \mathcal{L}\},$$

δηλαδή το $\mathcal{E}_\infty$ είναι το σύνολο-πηλίκο $\mathcal{L}/\sim$ του $\mathcal{L}$ ως προς τη σχέση ισοδυναμίας που εισάγει η παραλληλία.

Ορίζουμε και το σύνολο (σημείων)

$$\mathcal{P}^+ := \mathcal{P} \cup \mathcal{E}_\infty = \mathcal{P} \cup \{\ell^\bullet \mid \ell \in \mathcal{L}\}.$$

Αν συμβολίσουμε, γενικά, με P^+ τα σημεία του $\mathcal{P}^+$, τότε εισάγουμε την επόμενη ορολογία.

2.5.1 Ορισμός. Ένα σημείο $P^+ \in \mathcal{P}^+$ θα λέγεται ***πραγματικό*** (αντιστ. ***ιδεατό*** ή ***κατ' εκδοχήν***) αν υπάρχει $P \in \mathcal{P}$ (αντιστ. $\ell \in \mathcal{L}$) έτσι ώστε $P^+ = P$ (αντιστ. $P^+ = \ell^\bullet$).

Παρατηρούμε ότι στο $\mathcal{P}^+$ έχει έννοια η ένωση

$$\ell^* := J(\ell) \cup \{\,\ell^\bullet\,\}$$

αφού $J(\ell) \subset \mathcal{P} \subset \mathcal{P}^+$ και $\ell^\bullet \in \mathcal{E}_\infty \subset \mathcal{P}^+$. Επομένως, μπορούμε να ορίσουμε και το σύνολο (ευθειών)

$$\mathcal{L}^+ = \{\ell^* \mid \ell \in \mathcal{L}\} \cup \{\mathcal{E}_\infty\}.$$

Συμβολίζοντας τις ευθείες του $\mathcal{L}^+$ γενικά με ℓ^+, θα είναι είτε $\ell^+ = \ell^*$, για κάποια $\ell \in \mathcal{L}$, είτε $\ell^+ = \mathcal{E}_\infty$, οπότε έχουμε την ακόλουθη ορολογία.

2.5.2 Ορισμός. Κάθε ευθεία της μορφής ℓ^* θα λέγεται ***πραγματική***, ενώ η $\mathcal{E}_\infty$ λέγεται ***ιδεατή*** (ή ***κατ' εκδοχήν***).

> Συνοψίζοντας, βλέπουμε ότι το $\mathcal{P}^+$ προκύπτει αν στα σημεία του $\mathcal{P}$ επισυνάψουμε (προσθέσουμε) τα ιδεατά σημεία του επιπέδου. Επίσης, κάθε πραγματική ευθεία ℓ^* αποτελείται από τη σημειοσειρά της $\ell \in \mathcal{L}$ και το αντίστοιχο ιδεατό σημείο $\ell^\bullet$, ενώ η ιδεατή ευθεία $\mathcal{E}_\infty$ αποτελείται από τα ιδεατά σημεία και μόνον αυτά. Η τελευταία ευθεία, στον κόσμο της εμπειρίας μας ή στον ζωγραφικό πίνακα, αντιστοιχεί στη γραμμή του ορίζοντα.

Ορίζουμε ακόμη μία σχέση σύμπτωσης $\mathcal{I}^+ \subset \mathcal{P}^+ \times \mathcal{L}^+$ με τον εξής τρόπο: για ένα ζεύγος $(P^+, \ell^+) \in \mathcal{P}^+ \times \mathcal{L}^+$, θα είναι $(P^+, \ell^+) \in \mathcal{I}^+$ τότε και μόνον τότε αν ισχύει μία από τις επόμενες συνθήκες:

i) $P^+ = k^\bullet$ $(k \in \mathcal{L})$ και $\ell^+ = \mathcal{E}_\infty$ [οπότε $k^\bullet \in \mathcal{E}_\infty$].

ii) $P^+ = P \in \mathcal{P}$, $\ell^+ = \ell^*$ και $P \in J(\ell)$ [ισοδύναμα: $(P, \ell) \in \mathcal{I}$].

iii) $P^+ = k^\bullet$, $\ell^+ = \ell^*$ και $k /\!/ \ell$ [οπότε $k^\bullet = \ell^\bullet$].

Από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει ότι:

• Κάθε ιδεατό σημείο ανήκει (με την έννοια της $\mathcal{I}^+$) στην ιδεατή ευθεία.
• Ένα πραγματικό σημείο ανήκει σε μία πραγματική ευθεία ℓ^*, αν είναι σημείο της αρχικής ευθείας ℓ από την οποίαν προέρχεται η ℓ^*.

• Ένα ιδεατό σημείο $k^{\bullet}$ ανήκει σε μία πραγματική ευθεία ℓ^{*}, αν οι αντίστοιχες ευθείες k και ℓ (από τις οποίες προέρχονται το σημείο και η ευθεία) είναι παράλληλες.
• Δεν ορίζεται σύμπτωση μεταξύ πραγματικών σημείων και της ιδεατής ευθείας, δηλαδή

$$(P^{+},\ell^{+}) \notin \mathcal{I}^{+} \quad \text{αν} \quad P^{+} = P \in \mathcal{P} \quad \text{και} \quad \ell^{+} = \mathcal{E}_{\infty}.$$

Με τους προηγούμενους συμβολισμούς αποδεικνύεται τώρα το

2.5.3 Θεώρημα. *Η τριάδα $(\mathcal{P}^{+},\mathcal{L}^{+},\mathcal{I}^{+})$ αποτελεί ένα προβολικό επίπεδο, το οποίον καλείται **πλήρωση** (completion) του συσχετισμένου επιπέδου $(\mathcal{P},\mathcal{L},\mathcal{I})$.*

Απόδειξη. Θα επαληθεύσουμε τα αξιώματα του προβολικού επιπέδου.

(ΠΕ 1): Θεωρούμε δύο διαφορετικά σημεία P^{+} και Q^{+}. Αναλόγως με το είδος των σημείων (πραγματικά ή ιδεατά) εμφανίζονται οι επόμενες περιπτώσεις:

α) Τα P^{+} και Q^{+} είναι και τα δύο πραγματικά σημεία, δηλαδή $P^{+} = P$ και $Q^{+} = Q$. Τότε, σύμφωνα με το (ΣΕ 1), ορίζεται η ευθεία $\ell = P \vee Q$ (του συσχετισμένου επιπέδου), οπότε η $\ell^{+} := \ell^{*} \in \mathcal{L}^{+}$ είναι μια ευθεία που περιέχει τα P^{+} και Q^{+}.

Η ευθεία αυτή είναι μονοσήμαντα ορισμένη. Πραγματικά, αν υποθέσουμε ότι υπάρχει και μία άλλη ευθεία m^{+}, που περιέχει τα ίδια σημεία, τότε θα είναι αναγκαίως $m^{+} = m^{*} = J(m) \cup \{m^{\bullet}\}$ (η περίπτωση $m^{+} = \mathcal{E}_{\infty}$ αποκλείεται, αφού τα P^{+}, Q^{+} είναι πραγματικά σημεία). Συνεπώς, επειδή $P, Q \in J(m)$, πάλι από το (ΣΕ 1) προκύπτει ότι $m = \ell$ και $m^{+} = \ell^{+}$.

β) Τα P^{+} και Q^{+} είναι ιδεατά, δηλαδή $P^{+} = k^{\bullet}$ και $Q^{+} = \ell^{\bullet}$, για κάποιες ευθείες $k, \ell \in \mathcal{L}$. Επειδή $k^{\bullet}$, $\ell^{\bullet} \in \mathcal{E}_{\infty}$, προφανώς η $\mathcal{E}_{\infty}$ είναι και η μοναδική ευθεία που περιέχει τα P^{+} και Q^{+} (βλ. τον ορισμό της $\mathcal{I}^{+}$ και τα σχετικά σχόλια).

γ) Το ένα σημείο είναι πραγματικό και το άλλο ιδεατό. Για παράδειγμα, αν υποθέσουμε ότι $P^{+} = P$ και $Q^{+} = k^{\bullet}$, τότε διακρίνουμε δύο υποπεριπτώσεις:

$$\gamma_1) \;\; P \in J(k) \quad \text{και} \quad \gamma_2) \;\; P \notin J(k).$$

Στη γ_1) παρατηρούμε ότι η ευθεία $k^{+} := k^{*} = J(k) \cup \{k^{\bullet}\}$ περιέχει τα P^{+}, Q^{+}. Η ευθεία αυτή είναι και μοναδική. Πραγματικά, ας υποθέσουμε ότι υπάρχει και μία άλλη ευθεία $m^{+} \neq k^{+}$, που περιέχει τα ίδια σημεία. Τότε, επειδή το P^{+} είναι πραγματικό σημείο, η m^{+} αποκλείεται να είναι η $\mathcal{E}_{\infty}$, άρα θα έχει τη μορφή $m^{+} = m^{*} = J(m) \cup \{m^{\bullet}\}$. Επίσης, επειδή η m^{+} περιέχει το $k^{\bullet}$, αναγκαστικά θα είναι και $k^{\bullet} = m^{\bullet}$ (αφού υπάρχει μόνον ένα κατ᾽ εκδοχήν σημείο επί της m^{*}), οπότε $k /\!/ m$. Το τελευταίο συμπέρασμα όμως είναι άτοπο επειδή k, m έχουν το P κοινό σημείο (προφανώς $k \neq m$, διαφορετικά θα ήταν $k^{+} = m^{+}$).

Στη γ_2), σύμφωνα με το (ΣΕ 2), υπάρχει μία μοναδική $\ell \in \mathcal{L}$ με $\ell /\!/ k$ και $(P,\ell) \in \mathcal{I}$. Επομένως, θέτοντας $\ell^{+} := \ell^{*} = J(\ell) \cup \{\ell^{\bullet}\}$, έχουμε ότι $(P^{+},\ell^{+}) \in \mathcal{I}^{+}$. Επίσης, λόγω της προηγουμένης παραλληλίας, θα είναι $Q^{+} = k^{\bullet} = \ell^{\bullet}$, άρα $(Q^{+},\ell^{+}) \in \mathcal{I}^{+}$ και η ζητουμένη ευθεία είναι η ℓ^{+}. Για το μονοσήμαντο της ℓ^{+} παρατηρούμε ότι, αν υπάρχει και μία $m^{+} \neq \ell^{+}$ που περιέχει τα P^{+} και Q^{+}, τότε [εργαζόμενοι αναλόγως προς την γ_1)] έχουμε ότι $m^{\bullet} = k^{\bullet} = \ell^{\bullet}$, άρα $m /\!/ k /\!/ \ell$. Όμως το P ανήκει στις m και ℓ $(m \neq \ell)$. Άρα, από το P διέρχονται δύο παράλληλες προς την k (άτοπο).

Επομένως, σε κάθε περίπτωση, υπάρχει μία μοναδική ευθεία του $\mathcal{L}^+$ που περιέχει τα P^+ και Q^+, οπότε αποδεικνύεται το (ΠΕ 1).

(ΠΕ 2): Θεωρούμε δύο διαφορετικές ευθείες k^+, ℓ^+ και θα δείξουμε ότι διαθέτουν κοινό σημείο. Προφανώς, εμφανίζονται δύο περιπτώσεις:

α) και οι δύο ευθείες είναι πραγματικές,

β) μία απ' αυτές είναι η ιδεατή ευθεία.

Στην περίπτωση α) θα είναι $k^+ = k^*$ και $\ell^+ = \ell^*$. Παρατηρούμε ότι, αναγκαίως, $k \neq \ell$ [αν ήταν $k = \ell$, τότε θα ήταν και $k^* = \ell^*$ (άτοπο)]. Επομένως, προκύπτουν δύο υποπεριπτώσεις:

$$\alpha_1)\ \ k /\!/ \ell \quad \text{και} \quad \alpha_2)\ \ k \not\parallel \ell.$$

Στην πρώτη υποπερίπτωση, το $P^+ := k^\bullet = \ell^\bullet$ είναι κοινό σημείο των k^+ και ℓ^+. Στη δεύτερη, οι k και ℓ διαθέτουν ένα (μοναδικό) κοινό σημείο $P := k \wedge \ell$. Επειδή $P \in J(k)$ και $P \in J(\ell)$, τελικώς το $P^+ := P$ είναι κοινό σημείο και των ευθειών k^+, ℓ^+.

Στην περίπτωση β) ας υποθέσουμε ότι $k^+ = \mathcal{E}_\infty$ και $\ell^+ = \ell^*$. Προφανώς, $\mathcal{E}_\infty \neq \ell^+$ (αφού τα πραγματικά σημεία δεν ανήκουν στην ιδεατή ευθεία). Τότε το $P^+ := \ell^\bullet$ είναι το ζητούμενο κοινό σημείο.

(ΠΕ 3): Κατά το Θεώρημα 2.1.9, στο $\mathcal{P}$ υπάρχουν τέσσερα διαφορετικά σημεία, ας τα καλέσουμε A, B, C, D, τα οποία είναι ανά τρία μη συγγραμμικά. Τα ίδια σημεία είναι και (πραγματικά) σημεία του $\mathcal{P}^+$, άρα κανένα τους δεν ανήκει στην $\mathcal{E}_\infty$. Ας δούμε αν τρία από αυτά, π.χ. τα A, B, C, μπορούν να ανήκουν σε μία πραγματική ευθεία $\ell^* = J(\ell) \cup \{\ell^\bullet\}$. Αν συνέβαινε κάτι τέτοιο, θα είχαμε ότι $A, B, C \in J(\ell)$, πράγμα που είναι άτοπο. Επομένως τα σημεία $A^+ := A$, $B^+ := B$ και $C^+ := C$ ικανοποιούν το (ΠΕ 3) στο $\mathcal{P}^+$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Η αντίστροφη διαδικασία της πλήρωσης (*αποπλήρωση*) συνίσταται στην αφαίρεση μιας ευθείας (ακριβέστερα σημειοσειράς) από ένα προβολικό επίπεδο, οπότε οδηγούμαστε στην κατασκευή ενός συσχετισμένου επιπέδου.

Έτσι, θεωρώντας δεδομένο ένα *προβολικό* επίπεδο $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, σταθεροποιούμε μιαν ευθεία $\ell_o \in \mathcal{L}$ και ορίζουμε το σύνολο (σημείων)

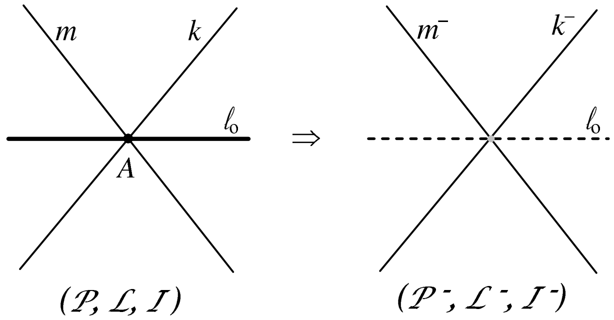
$$\mathcal{P}^- := \mathcal{P} - J(\ell_o) = \{P \in \mathcal{P} \,:\, (P, \ell_o) \notin \mathcal{I}\} \equiv \{P \in \mathcal{P} \,:\, P \notin J(\ell_o)\}.$$

Δηλαδή τα σημεία του $\mathcal{P}^-$ είναι όλα τα σημεία του $\mathcal{P}$ εκτός των σημείων της σημειοσειράς $J(\ell_o)$.

Επίσης θεωρούμε και το σύνολο (ευθειών)

$$\mathcal{L}^- := \{k^- := J(k) - \{k \wedge \ell_o\} \,\big|\, k \in \mathcal{L},\ k \neq \ell_o\}.$$

Επομένως, το $\mathcal{L}^-$ δεν περιέχει την $J(\ell_o)$, ενώ κάθε άλλο στοιχείο του είναι μία σημειοσειρά, που αντιστοιχεί σε ευθεία του $\mathcal{L}$, από την οποίαν έχει αφαιρεθεί το σημείο τομής της με την ℓ_0. Προφανώς, κάθε k^- είναι σημειοσειρά, άρα μπορούμε να γράψουμε ότι $k^- \equiv J(k^-)$.



Σχημα 2.14

Τέλος, ορίζουμε και μία σχέση σύμπτωσης $\mathcal{I}^- \subset \mathcal{P}^- \times \mathcal{L}^-$ με τον εξής τρόπο: για ένα $(P, k^-) \in \mathcal{P}^- \times \mathcal{L}^-$ θα είναι

$$(P, k^-) \in \mathcal{I}^- \iff P \in k^- = J(k) - \{k \wedge \ell_0\},$$

δηλ. το P είναι σημείο της k^- τότε και μόνον τότε αν $(P, k) \in \mathcal{I}$ και $P \neq k \wedge \ell_0$.

Επειδή σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι η τριάδα $(\mathcal{P}^-, \mathcal{L}^-, \mathcal{I}^-)$ είναι συσχετισμένο επίπεδο, θα πρέπει να εξασφαλίσουμε πρώτα την ύπαρξη παραλλήλων ευθειών.

2.5.4 Λήμμα. *Στο σύνολο $\mathcal{L}^-$ υπάρχουν παράλληλες ευθείες.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τυχόν σημείο A της ευθείας ℓ_0. Σύμφωνα με την Πρόταση 2.2.8, μπορούμε να βρούμε δύο ευθείες k και m του $\mathcal{L}$, τέτοιες ώστε $k, m \in J(A)$ και $k \neq \ell_0 \neq m \neq k$. Τότε οι k^- και m^- είναι παράλληλες [αν υπήρχε κοινό σημείο P, θα είχαμε ότι $k = P \vee A = m$ (άτοπο)]. Παρόμοια βρίσκουμε και άλλες παράλληλες, χρησιμοποιώντας ευθείες που διέρχονται από τα διάφορα σημεία της ℓ_0. □

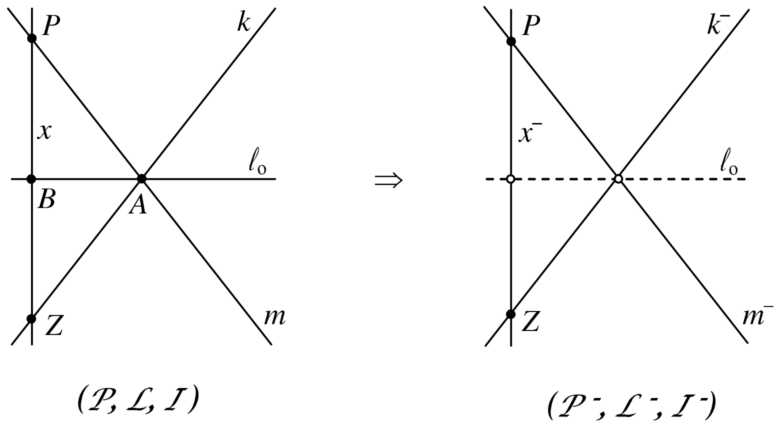
2.5.5 Θεώρημα. *Η τριάδα $(\mathcal{P}^-, \mathcal{L}^-, \mathcal{I}^-)$ αποτελεί συσχετισμένο επίπεδο, το οποίον καλείται* ***αποπλήρωση*** *(deletion) του προβολικού επιπέδου $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι ικανοποιούνται τα αξιώματα του συσχετισμένου επιπέδου.

(ΣΕ 1): Θεωρούμε δύο σημεία $P, Q \in \mathcal{P}^-$ με $P \neq Q$. Τα P, Q (ως διαφορετικά σημεία και του $\mathcal{P}$) ορίζουν την ευθεία $k := P \vee Q \in \mathcal{L}$. Προφανώς $k \neq \ell_0$, αφού τα P, Q δεν ανήκουν στην ℓ_0. Επομένως, η $k^- = J(k) - \{k \wedge \ell_0\}$ είναι ευθεία του $\mathcal{L}^-$ που περιέχει τα P, Q. Η ευθεία αυτή είναι και μοναδική. Πραγματικά, ας υποθέσουμε ότι υπάρχει και μία άλλη ευθεία $m^- \in \mathcal{L}^-$, που περιέχει τα δύο προηγούμενα σημεία. Τότε, από τον ορισμό της m^-, προκύπτει ότι τα P, Q είναι και σημεία της m. Επομένως, κατά το (ΠΕ 1), $m = k$ και $m^- = k^-$, που αποδεικνύει το (ΣΕ 1).

(ΣΕ 2): Υποθέτουμε ότι $(P, k^-) \in \mathcal{P}^- \times \mathcal{L}^-$ με $P \notin J(k)$. Αν θέσουμε (για ευκολία) $A := k \wedge \ell_0 \in \mathcal{P}$, παρατηρούμε ότι $P \neq A$ [διαφορετικά θα ήταν $P \in J(\ell_0)$ (άτοπο)].

Επομένως, ορίζεται η ευθεία $m := P \vee A \in \mathcal{L}$ και η αντίστοιχη $m^- = J(m) - \{m \wedge l_0\} = J(m) - \{A\}$ (φυσικά $m \neq \ell_0$, αφού το P είναι σημείο της m αλλά όχι και της ℓ_0). Αυτά δείχνουν ότι $(P, m^-) \in \mathcal{I}^-$ και $m^- /\!/ k^-$ (βλ. τη σχετική κατασκευή παραλλήλων στην απόδειξη του Λήμματος 2.5.4), δηλαδή η m^- είναι ευθεία (του $\mathcal{L}^-$) που διέρχεται από το P και είναι παράλληλη προς την k^-.



Σχημα 2.15

Η m^- είναι η μοναδική ευθεία με τις προηγούμενες ιδιότητες. Πραγματικά, ας υποθέσουμε ότι υπάρχει και μία άλλη ευθεία $x^- = J(x) - \{x \wedge \ell_0\} \in \mathcal{L}^-$, η οποία διέρχεται από το P και είναι παράλληλη προς την k^-, με $x^- \neq m^-$. Τότε, σύμφωνα με τον ορισμό της παραλληλίας, είναι είτε $x^- = k^-$, είτε $x^- \neq k^-$ και $x^- \cap k^- = \emptyset$. Η πρώτη περίπτωση αποκλείεται επειδή το P δεν είναι σημείο της k^-. Στη δεύτερη περίπτωση, θα είναι υποχρεωτικά $x \neq k$ [διαφορετικά θα είχαμε ότι $x \wedge \ell_0 = k \wedge \ell_0$, οπότε $x^- = k^-$ (άτοπο)]. Άρα, ορίζεται το σημείο $Z := x \wedge k$ (βλ. το παραπάνω Σχήμα 2.15) και εμφανίζονται δύο νέες περιπτώσεις:

i) Το Z είναι διαφορετικό από τα σημεία $A := k \wedge \ell_0$ και $B := x \wedge \ell_0$.

ii) Το Z συμπίπτει με ένα από τα A, B.

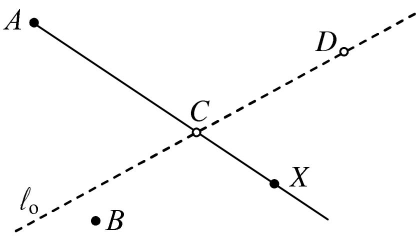
Στην i) έχουμε κατ' ανάγκην ότι $(Z, k^-) \in \mathcal{I}^- \ni (Z, x^-)$, το οποίον είναι άτοπο, αφού $k^- /\!/ x^-$.

Στη ii), ας πάρουμε πρώτα ότι $Z = A$. Τότε θα είναι και $Z \neq P$ [αλλιώς θα ήταν $P = Z \in J(k)$ (άτοπο)]. Επομένως,

$$x = P \vee Z = P \vee A = m,$$

άρα $x^- = m^-$, που είναι άτοπο, γιατί δεχτήκαμε από την αρχή ότι $x^- \neq m^-$. Αν $Z = B$, τότε $k = A \vee Z = A \vee B = \ell_0$, που είναι επισης άτοπο. Επομένως, σε κάθε περίπτωση, η υπόθεση ότι υπάρχει και η x^- (με τις αναφερόμενες ιδιότητες) οδηγεί σε άτοπο. Άρα, τελικώς, η m^- είναι η μοναδική παράλληλη προς την k^- που διέρχεται από το P, πράγμα που αποδεικνύει πλήρως το (ΣΕ 2).

(ΣΕ 3): Στο αρχικό προβολικό επίπεδο υπάρχουν τέσσερα διαφορετικά σημεία, ας τα καλέσουμε A, B, C, D, που είναι ανά τρία μη συγγραμμικά. Άρα, δύο τουλάχιστον από αυτά, ας πούμε τα A και B, δεν ανήκουν στην ℓ_0. Ας υποθέσουμε ακόμη ότι τα C, D ανήκουν και τα δύο στην ℓ_0. Θεωρούμε την ευθεία



Σχημα 2.16

$A \vee C$, οπότε (λόγω της Πρότασης 2.2.6 υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο της X διαφορετικό από τα A, C. Προφανώς $X \notin J(\ell_0)$. Επομένως, τα A, B, X είναι τρία διαφορετικά μεταξύ τους (γιατί;) σημεία, που ανήκουν στο $\mathcal{P}^-$, επειδή κανένα τους δεν ανήκει στην ℓ_0.

Τα A, B, X δεν είναι συγγραμμικά στο $\mathcal{P}^-$. Πραγματικά, αν ανήκαν και τα τρία σε μια ευθεία $k^- = J(k) - \{k \wedge \ell_0\} \in \mathcal{L}^-$, τότε θα ήταν $A, B, X \in J(k)$ και

$$k = A \vee B = A \vee X = A \vee C,$$

δηλαδή τα A, B, C θα ήσαν συγγραμμικά στο προβολικό επίπεδο $\mathcal{P}$, που είναι άτοπο.

Αν υποθέσουμε ότι $C \notin J(\ell_0)$ [με $D \in J(\ell_0)$ ή $D \notin J(\ell_0)$], εργαζόμενοι όπως στην προηγούμενη περίπτωση, δείχνουμε ότι τα σημεία A, B, C είναι διαφορετικά και μη συγγραμμικά στο $\mathcal{P}^-$.

Συνεπώς μπορούμε πάντοτε να βρούμε τρία διαφορετικά σημεία του $\mathcal{P}^-$ που ικανοποιούν το (ΣΕ 3). Με αυτό ολοκληρώνεται και η απόδειξη. □

Ένα ενδιαφέρον ερώτημα είναι τώρα το εξής: αν ξεκινήσουμε από ένα προβολικό επίπεδο και εφαρμόσουμε πρώτα τη διαδικασία της αποπλήρωσης και κατόπιν αυτή της πλήρωσης, ποιά είναι η σχέση του αρχικού προβολικού επιπέδου με το τελευταίο; Αποδεικνύεται ότι τα επίπεδα αυτά είναι ισόμορφα (βλ. [5, Θεώρημα 2.3.4]). Η έννοια του ισομορφισμού προβολικών επιπέδων ορίζεται στην επόμενη παράγραφο.

2.5.6 Το κλασικό προβολικό επίπεδο.

Όπως αναφέραμε και στην εισαγωγή του κεφαλαίου (§2.0), το προβολικό επίπεδο εμφανίζεται, ιστορικά, ως αφαίρεση (μαθηματικοποίηση) του επιπέδου του ζωγραφικού πίνακα, όπου θεωρούμε ότι δεν υπάρχουν παράλληλες ευθείες ή, ισοδύναμα, υποθέτουμε ότι όλες οι ευθείες, που είναι μεταξύ τους παράλληλες, τέμνονται στο άπειρο, επάνω στη γραμμή του ορίζοντα. Σε πιο αυστηρή γλώσσα, χρησιμοποιώντας την ορολογία αυτής της παραγράφου [βλ. και Παράδειγμα 2.1.3 (1)],

> *το **κλασικό προβολικό επίπεδο**, δηλαδή το επίπεδο της κλασικής Προβολικής Γεωμετρίας, είναι η πλήρωση του συνήθους (συσχετισμένου) επιπέδου E ($\cong \mathbb{R}^2$) της Στοιχειώδους Γεωμετρίας*

2.5.7 Σχόλιο. Όπως ήδη έχει αντιληφθεί ο αναγνώστης, πολύ συχνά χρησιμοποιήσαμε την *εις άτοπον απαγωγή*. Όπως αναφέρθηκε και στην § 1.2, αυτή είναι μία βασική μέθοδος απόδειξης της συνθετικής γεωμετρίας, και χρησιμοποιήθηκε συστηματικά από τον Ευκλείδη στα «Στοιχεία» του. Σχετικά ο G. H. Hardy [16, §12] παρατηρεί ότι

> *«η εις άτοπον απαγωγή (reductio ad absurdum), την οποίαν ο Ευκλείδης αγαπούσε τόσο πολύ, είναι ένα από τα πιο έξοχα όπλα ενός μαθηματικού».*

2.5.8 Ασκήσεις.

1. Αναφορικά με την απόδειξη του (ΣΕ 3) στο Θεώρημα 2.5.5, να δικαιολογηθεί το σημειούμενο "γιατί" και να ολοκληρωθεί η διερεύνηση για τα σημεία C και D (σχετικώς με τη θέση τους ως προς την ευθεία ℓ_0).

2. Να εξηγηθεί γιατί είναι

$$\mathcal{P}^+ \cap \mathcal{L}^+ = \emptyset \quad \text{και} \quad \mathcal{P}^- \cap \mathcal{L}^- = \emptyset.$$

3. Να αποδειχθεί ότι η πλήρωση του συσχετισμένου επιπέδου των τεσσάρων σημείων [Παράδειγμα 2.1.3 (2)] είναι το προβολικό επίπεδο των επτά σημείων [Παράδειγμα 2.2.3 (1)].

4. Αντιστρόφως προς την προηγουμένη άσκηση, να δειχθεί ότι η αποπλήρωση του προβολικού επιπέδου των επτά σημείων είναι το συσχετισμένο επίπεδο των τεσσάρων σημείων.

2.6 Μορφισμοί προβολικών επιπέδων

Στη Θεωρία Συνόλων ορίζεται η έννοια της απεικόνισης $h : S \to S'$ μεταξύ δύο συνόλων S και S'. Αν υποθέσουμε, επιπλέον, ότι τα σύνολα S και S' έχουν μιαν ιδιαίτερη δομή (π.χ. δομή γραμμικού χώρου, ομάδας, κλπ.), το ενδιαφέρον μας εστιάζεται όχι στις οποιεσδήποτε απεικονίσεις μεταξύ των συνόλων αυτών, αλλά –κυρίως– στις απεικονίσεις εκείνες που αντανακλούν την προηγούμενη δομή. Έτσι, στους γραμμικούς χώρους ενδιαφερόμαστε ιδιαιτέρως για τις «γραμμικές απεικονίσεις», στις ομάδες για τους «ομομορφισμούς» κ.ο.κ.

Τις απεικονίσεις που συνδέονται με την ιδιαίτερη δομή των (μαθηματικών) αντικειμένων μιας κατηγορίας (όπως, π.χ., των γραμμικών χώρων, των ομάδων, των προβολικών επιπέδων κλπ.), τις καλούμε ***μορφισμούς***. (Εδώ χρησιμοποιούμε την ορολογία της Θεωρίας Κατηγοριών, για την οποία δεν μπορούμε να πούμε τίποτε περισσότερο στο πλαίσιο αυτών των μαθημάτων). Σε μερικές περιπτώσεις, οι μορφισμοί έχουν ένα συγκεκριμένο όνομα, όπως: γραμμικές απεικονίσεις, ομομορφισμοί κ.λ.π.

Για παράδειγμα, ας θυμίσουμε την περίπτωση των ομομορφισμών ομάδων. Αν $(G, \cdot)$ και $(H, *)$ είναι δύο ομάδες, τότε μία απεικόνιση $\varphi : G \to H$ καλείται μορφισμός (: ομομορφισμός) ομάδων αν

$$(2.6.1) \qquad \varphi(g \cdot g') = \varphi(g) * \varphi(g'), \qquad (g, g') \in G \times G.$$

Η σχέση (2.6.1) σημαίνει ότι ο μορφισμός φ *διατηρεί τη δομή της ομάδας*.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η απεικόνιση φ είναι 1 – 1 και επί. Τότε υπάρχει η αντίστροφη απεικόνιση $\varphi^{-1} : H \to G$. Αποδεικνύεται εύκολα ότι και αυτή η απεικόνιση είναι επίσης μορφισμός ομάδων, δηλαδή ισχύει η

$$(2.6.2) \qquad \varphi^{-1}(h * h') = \varphi^{-1}(h) \cdot \varphi^{-1}(h'), \qquad (h, h') \in H \times H.$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η φ είναι *ισομορφισμός ομάδων*.

Γενικότερα, μπορούμε να ορίσουμε την έννοια του ισομορφισμού και για οποιαδήποτε άλλη δομή. Έτσι, μία απεικόνιση $f : S \to S'$ μεταξύ δύο συνόλων, εφοδιασμένων με μία συγκεκριμένη δομή, είναι ***ισομορφισμός*** (ως προς την εξεταζομένη δομή) αν η f είναι μορφισμός 1 – 1 και επί, και –επιπλέον– η απεικόνιση f^{-1} είναι επίσης μορφισμός.

Εδώ πρέπει να διευκρινήσουμε ότι στον προηγούμενο ορισμό *απαιτήσαμε* να είναι μορφισμός και η f^{-1}. Αυτό είναι απαραίτητο, γιατί υπάρχουν περιπτώσεις όπου μπορούμε να βρούμε μορφισμούς f, οι οποίοι είναι 1 – 1 και επί, χωρίς να είναι και οι f^{-1} μορφισμοί. Μια τέτοια περίπτωση αποτελούνοι τοπολογικοί χώροι. Οι μορφισμοί εδώ είναι οι συνεχείς απεικονίσεις. Όμως, υπάρχουν παραδείγματα συνεχών απεικονίσεων που είναι 1 – 1 και επί, με αντίστροφη όχι κατ' ανάγκην συνεχή. Άρα, στην περίπτωση αυτή, ένας μορφισμός 1 – 1 και επί δεν ορίζει πάντοτε έναν ισομορφισμό.

Αντιθέτως, στην περίπτωση των ομάδων, κάθε ομομορφισμός 1 – 1 και επί είναι ισομορφισμός. Παρόμοια στους γραμμικούς χώρους: για να είναι μια απεικόνιση ισομορφισμός γραμμικών χώρων, αρκεί να είναι γραμμική, 1 – 1 και επί. Γενικότερα, το ίδιο ισχύει, στις «αλγεβρικές δομές», αλλά όχι σε πολυπλοκότερες δομές, όπως οι τοπολογικοί χώροι, οι διαφορικές πολλαπλότητες κλπ.

Ποια όμως είναι η σημασία ενός ισομορφισμού; Απ' όσα είπαμε μέχρις εδώ, γίνεται φανερό πως δύο σύνολα S και S' με την ίδια δομή, τα οποία συνδέονται μεταξύ τους με έναν ισομορφισμό $f : S \to S'$, δεν διαφέρουν ουσιαστικά μεταξύ τους. Πραγματικά, η απεικόνιση f όχι μόνον αντιστοιχεί κατά τρόπον αμφιμονοσήμαντο τα στοιχεία των S και S' μεταξύ τους, αλλά μεταφέρει και όλες τις ιδιότητες του S σε αντίστοιχες ιδιότητες του S' και αντιστρόφως. Επομένως, κάτι που ισχύει στο S, θα ισχύει και σε κάθε άλλο S', ***ισόμορφο*** (δηλ. που συνδέεται με έναν ισομορφισμό) με το S. Με άλλα λόγια, μπορούμε να πούμε ότι υπάρχει μια (μαθηματική) ταύτιση μεταξύ των S και S'. Συνεπώς, μέσω των ισομορφισμών, μπορούμε να διακρίνουμε αν δύο αντικείμενα είναι «ίδια» (ταυτίζονται) ή όχι, δηλαδή έχουμε ένα τρόπο σύγκρισης.

Συνοψίζοντας, μπορούμε να πούμε ότι: ανάμεσα στις απεικονίσεις μεταξύ των αντικειμένων μιας κατηγορίας (δηλ. συνόλων με μια συγκεκριμένη δομή) μας ενδιαφέρουν –κυρίως– εκείνες που διατηρούν τη δομή αυτή. Ιδιαιτέρως μας ενδιαφέρουν οι ισομορφισμοί, που επιτρέπουν να συγκρίνουμε τα αντικείμενα της κατηγορίας και να τα ταξινομήσουμε.

Τη λέξη «ταξινόμηση» την παίρνουμε εδώ με την κυριολεκτική σημασία της και όχι με το ειδικό περιεχόμενο που έχει συχνά στα μαθηματικά.

Μετά τα παραπάνω διευκρινιστικά ας δούμε τα πράγματα στο πλαίσιο της Προβολικής Γεωμετρίας. Οι μορφισμοί, κι εδώ, θα πρέπει να αντανακλούν τη δομή του προβολικού επιπέδου. Επομένως, πρέπει να απεικονίζουν τα σημεία σε σημεία και τις ευθείες σε ευθείες. Αλλά υπάρχει και μια σχέση σύμπτωσης. Θα πρέπει, όπως στις περιπτώσεις που συζητήσαμε, αυτή η σύμπτωση να διατηρείται. Όλα αυτά οδηγούν στον επόμενο φυσιολογικό ορισμό.

2.6.1 Ορισμός. Ένας ***μορφισμός*** (morphism) μεταξύ των προβολικών επιπέδων $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ και $(\mathcal{P}', \mathcal{L}', \mathcal{I}')$ είναι ένα ζεύγος απεικονίσεων (φ, ψ), όπου

$$\varphi : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}' \quad \text{και} \quad \psi : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}',$$

έτσι ώστε να ισχύει η συνθήκη:

$$(P, \ell) \in \mathcal{I} \quad \Rightarrow \quad (\varphi(P), \psi(\ell)) \in \mathcal{I}'.$$

Περιφραστικά, η τελευταία συνθήκη σημαίνει ότι ο μορφισμός ***διατηρεί τη σύμπτωση***. Συμβολικά, επίσης, γράφουμε ότι

$$(\varphi, \psi) : (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I}) \longrightarrow (\mathcal{P}', \mathcal{L}', \mathcal{I}').$$

2.6.2 Ορισμός. Ένας μορφισμός (φ, ψ): $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I}) \longrightarrow (\mathcal{P}', \mathcal{L}', \mathcal{I}')$ καλείται ***1 – 1*** (αντιστ. ***επί***) αν και οι δυο απεικονίσεις φ και ψ είναι 1 – 1 (αντίστ. επί). Ιδιαιτέρως, ένας μορφισμός (φ, ψ) καλείται ***ισομορφισμός*** (isomorphism) αν οι απεικονίσεις φ και ψ είναι 1 – 1 και επί. Στην περίπτωση αυτή τα προβολικά επίπεδα λέγονται ***ισόμορφα***.

2.6.3 Παρατήρηση. Στην εισαγωγή αυτής της παραγράφου είπαμε ότι, για να είναι ένας μορφισμός f και ισομορφισμός, θα πρέπει να υπάρχει η f^{-1} και να είναι επίσης μορφισμός. Στην περίπτωση του προβολικού επιπέδου βεβαιώνεται κανείς εύκολα ότι ένας ισομορφισμός (όπως στον Ορισμό 2.6.2 είναι ισομορφισμός με την κατηγορική έννοια, δηλαδή ότι και το ζεύγος $(\varphi^{-1}, \psi^{-1})$ είναι επίσης μορφισμός προβολικών επιπέδων [βλ. Άσκηση 2.6.10(3) στο τέλος αυτής της παραγράφου].

Μερικές άμεσες συνέπειες του Ορισμού 2.6.1 περιέχονται στην επομένη

2.6.4 Πρόταση. *Υποθέτουμε ότι $(\varphi, \psi) : (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I}) \to (\mathcal{P}', \mathcal{L}', \mathcal{I}')$ είναι μορφισμός προβολικών επιπέδων. Τότε ισχύουν τα εξής συμπεράσματα:*

i) Αν η φ είναι απεικόνιση 1 – 1, τότε

$$\psi(P \vee Q) = \varphi(P) \vee \varphi(Q),$$

για οποιαδήποτε σημεία $P, Q \in \mathcal{P}$ με $P \neq Q$.

ii) Αν η ψ είναι απεικόνιση 1 – 1, τότε

$$\varphi(k \wedge \ell) = \psi(k) \wedge \psi(\ell),$$

για οποιεσδήποτε ευθείες $k, \ell \in \mathcal{L}$ με $k \neq \ell$.

Απόδειξη. i) Οι ευθείες $P \vee Q$ και $\psi(P \vee Q)$ ορίζονται, επειδή $P \neq Q$. Από τον Ορισμό 2.6.1 έχουμε ότι

$$\begin{aligned} (P, P \vee Q) \in \mathcal{I} \quad &\Rightarrow \quad (\varphi(P), \psi(P \vee Q)) \in \mathcal{I}', \\ (Q, P \vee Q) \in \mathcal{I} \quad &\Rightarrow \quad (\varphi(Q), \psi(P \vee Q)) \in \mathcal{I}'. \end{aligned}$$

Επειδή η φ είναι $1-1$, θα είναι και $\varphi(P) \neq \varphi(Q)$, οπότε ορίζεται η $\varphi(P) \vee \varphi(Q)$. Το (ΠΕ 1) και οι σχέσεις της δεύτερης στήλης των παραπάνω συνεπαγωγών αποδεικνύουν ακριβώς το πρώτο συμπέρασμα.

Για το ii) προχωρούμε αναλόγως:

$$\begin{aligned} (k \wedge \ell, k) \in \mathcal{I} \quad &\Rightarrow \quad (\varphi(k \wedge \ell), \psi(k)) \in \mathcal{I}', \\ (k \wedge \ell, \ell) \in \mathcal{I} \quad &\Rightarrow \quad (\varphi(k \wedge \ell), \psi(\ell)) \in \mathcal{I}'. \end{aligned}$$

Το συμπέρασμα τώρα προκύπτει από τις προηγούμενες σχέσεις και το (ΠΕ 2), σε συνδυασμό με την Πρόταση 2.2.4. □

Φυσικά, η απόδειξη του συμπεράσματος ii) περιττεύει επειδή είναι δυϊκό του i). Εδώ έγινε μόνον για την εξοικείωση του αναγνώστη με το μηχανισμό των μορφισμών.

Για να διαπιστώσουμε πότε ένας μορφισμός προβολικών επιπέδων είναι και ισομορφισμός (Ορισμός 2.6.2), αρκεί να ελέγξουμε τη μία από τις δύο απεικονίσεις του μορφισμού, όπως προκύπτει από το επόμενο βασικό συμπέρασμα.

2.6.5 Θεώρημα. *Έστω $(\varphi, \psi) : (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I}) \to (\mathcal{P}', \mathcal{L}', \mathcal{I}')$ μορφισμός προβολικών επιπέδων. Η απεικόνιση φ είναι $1-1$ και επί, τότε και μόνον τότε αν η ψ είναι απεικόνιση $1-1$ και επί.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η φ είναι $1-1$ και επί, οπότε θα δείξουμε ότι τις ίδιες ιδιότητες έχει και η ψ.

Η ψ είναι επί: Έστω $\ell' \in \mathcal{L}'$ τυχούσα ευθεία. Αν P' και Q' είναι δυο οποιαδήποτε διαφορετικά σημεία της, δηλαδή $(P', \ell') \in \mathcal{I}' \ni (Q', \ell')$, τότε το επί της φ εξασφαλίζει την ύπαρξη δύο σημείων $P, Q \in \mathcal{P}$ με $\varphi(P) = P'$ και $\varphi(Q) = Q'$. Αναγκαίως θα είναι και $P \neq Q$ [αλλιώς, η σχέση $P = Q$ συνεπάγεται ότι $P' = \varphi(P) = \varphi(Q) = Q'$ (άτοπο)]. Επομένως, ορίζεται η ευθεία $\ell := P \vee Q \in \mathcal{L}$ και ισχύουν οι σχέσεις:

$$\begin{aligned} (P, \ell) \in \mathcal{I} \quad &\Rightarrow \quad (P' = \varphi(P), \psi(\ell)) \in \mathcal{I}', \\ (Q, \ell) \in \mathcal{I} \quad &\Rightarrow \quad (Q' = \varphi(Q), \psi(\ell)) \in \mathcal{I}'. \end{aligned}$$

Από τις σχέσεις αυτές και το (ΠΕ 1) προκύπτει ότι

$$\psi(\ell) = P' \vee Q' = \ell',$$

που αποδεικνύει το επί της ψ.

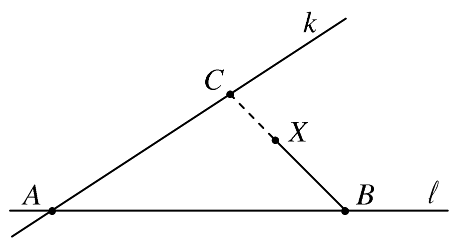
Η ψ είναι $1-1$: Η απόδειξη της ιδιότητας αυτής δεν είναι τόσο άμεση, όπως πριν, αλλά βασίζεται σ' ένα τέχνασμα. Αν υποθέσουμε ότι δεν ισχύει το συμπέρασμα, τότε αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να βρούμε (τουλάχιστον δύο) ευθείες $k, \ell \in \mathcal{L}$ με $k \neq \ell$ και τέτοιες ώστε $\psi(k) = \psi(\ell)$. Θα δείξουμε ότι ισχύει ο εξής ισχυρισμός:

$$(*) \qquad \forall\, P \in \mathcal{P} \quad \Rightarrow \quad (\phi(P), \psi(k)) \in \mathcal{I}',$$

δηλαδή κάθε σημείο του προβολικού επιπέδου $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ απεικονίζεται, μέσω της ϕ, επί της ευθείας $\psi(k) = \psi(\ell)$.

Πρώτα παρατηρούμε, από τον ορισμό του μορφισμού, ότι όλα τα σημεία των k και ℓ απεικονίζονται στην $\psi(k) = \psi(\ell)$, οπότε πρέπει να δείξουμε ότι το ίδιο συμβαίνει και για οποιοδήποτε $X \in \mathcal{P}$ που δεν ανήκει στις k, ℓ. Πραγματικά, αν θέσουμε $A := k \wedge \ell$, στην ℓ υπάρχει κι ένα σημείο $B \neq A$. Επίσης $B \neq X$, διαφορετικά θα ήταν $(X = B,\ \ell) \in \mathcal{I}$, που είναι άτοπο. Άρα ορίζεται η ευθεία $B \vee X$ (βλ. και Σχήμα 2.17). Προφανώς $B \vee X \neq k$, αφού η πρώτη έχει σημεία που δεν ανήκουν στην άλλη (βλ. Πρόταση 2.4.2), άρα ορίζεται και το σημείο $C := (B \vee X) \wedge k$. Εφαρμόζοντας τον Ορισμό 2.6.1, έχουμε διαδοχικά:

$$(2.6.3) \qquad \begin{aligned} (B, \ell) \in \mathcal{I} \quad &\Rightarrow \quad (\phi(B), \psi(\ell)) \in \mathcal{I}', \\ (C, k) \in \mathcal{I} \quad &\Rightarrow \quad (\phi(C), \psi(k)) \in \mathcal{I}'. \end{aligned}$$



Σχημα 2.17

Επειδή η ϕ είναι $1-1$ και $B \neq C$, θα είναι $\phi(B) \neq \phi(C)$, οπότε ορίζεται η $\phi(B) \vee \phi(C)$. Επομένως, από την Πρόταση 2.2.4, τις σχέσεις (2.6.3) και την υπόθεση $\psi(k) = \psi(\ell)$, προκύπτει ότι

$$(2.6.4) \qquad \psi(B \vee C) = \phi(B) \vee \phi(C) = \psi(k) = \psi(\ell).$$

Απ' το άλλο μέρος, επειδή το X είναι σημείο της $B \vee C$, δηλαδή $(X, B \vee C) \in \mathcal{I}$, θα είναι και

$$(2.6.5) \qquad (\phi(X), \psi(B \vee C)) \in \mathcal{I}'.$$

Επομένως, από τις (2.6.4) και (2.6.5), έχουμε ότι

$$(\phi(X), \psi(k)) \in \mathcal{I}'.$$

που αποδεικνύει τον ισχυρισμό $(*)$.

Ας δούμε τώρα τη συνέπεια του $(*)$. Επειδή η ϕ είναι απεικόνιση επί, για τυχόν $P' \in \mathcal{P}'$ υπάρχει $P \in \mathcal{P}$ με $\phi(P) = P'$. Άρα, λόγω του $(*)$, θα είναι $(P', \psi(k)) \in \mathcal{I}'$. Αυτό ισχύει για κάθε σημείο του $\mathcal{P}'$, δηλαδή βρίσκουμε ότι όλα τα σημεία του $\mathcal{P}'$ είναι συγγραμμικά, που είναι άτοπο [λόγω του (ΠΕ 3)]. Το άτοπο αίρεται αν δεχθούμε ότι η ψ είναι $1-1$ (οπότε παύει να ισχύει και ο $(*)$, ο οποίος είναι συνέπεια της άρνησης του $1-1$).

Για να κλείσει η απόδειξη, πρέπει να δείξουμε ότι, αν η ψ είναι $1-1$ και επί, τότε και η ϕ έχει τις ίδιες ιδιότητες. Αυτό όμως προκύπτει από το προηγούμενο συμπέρασμα βάσει της αρχής του δυϊσμού. □

Προφανής συνέπεια του προηγουμένου θεωρήματος και του Ορισμού 2.6.2 είναι το επόμενο

2.6.6 Πόρισμα. *Ένας μορφισμός προβολικών επιπέδων (ϕ, ψ) είναι ισομορφισμός αν και μόνον αν μία από τις απεικονίσεις ϕ, ψ είναι $1-1$ και επί.*

2.6.7 Παρατηρήσεις. 1) Όπως φάνηκε στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.6.5, για την απόδειξη του επί της ψ αρκεί μόνον το επί της ϕ. Άρα, μπορούμε να πούμε ότι:

η ψ είναι επί τότε και μόνον τότε αν η ϕ είναι επί.

Κάνοντας όμως χρήση και του $1-1$ της ϕ, μπορούμε να δείξουμε το επί της ψ και ως εξής: για τα P', Q' (όπως στην αρχική απόδειξη του θεωρήματος), υπάρχουν μονοσήμαντα ορισμένα (και, φυσικά, διαφορετικά μεταξύ τους) σημεία P και Q, που ορίζουν την $\ell := P \vee Q$. Εφαρμόζοντας την Πρόταση 2.6.4, βρίσκουμε ότι

$$\psi(\ell) = \psi(P \vee Q) = \phi(P) \vee \phi(Q) = P' \vee Q' = \ell',$$

που αποδεικνύει το επί της ψ.

2) Αντιθέτως, για το $1-1$ της ψ χρησιμοποιείται και το $1-1$ και το επί της ϕ.

Μέχρι τώρα έχουμε ορίσει το προβολικό επίπεδο (όπως και το συσχετισμένο επίπεδο) με τη βοήθεια μιας αφηρημένης σύμπτωσης $\mathcal{I}$. Όμως, στη Στοιχειώδη (Ευκλείδεια) Γεωμετρία και στην κλασική Προβολική Γεωμετρία (για την οποίαν έγινε λόγος στο εδάφιο 2.5.6, σελ. 62), η σύμπτωση αυτή είναι η συνήθης σύμπτωση της εμπειρίας, η οποία έχει την ίδια σημασία με το συνολοθεωρητικό "$\in$".

Με τη χρήση των ισομορφισμών προβολικών επιπέδων θα δείξουμε ότι και η αφηρημένη σύμπτωση $\mathcal{I}$, που έχουμε χρησιμοποιήσει μέχρι τώρα, μπορεί να ταυτιστεί (μέσω κατάλληλου ισομορφισμού) με τη συνήθη σύμπτωση, που ορίζει το "$\in$". Αυτό επιτυγχάνεται αν ταυτίσουμε κάθε ευθεία με την αντίστοιχη σημειοσειρά της. Έτσι, και πιο κοντά στην εμπειρία βρισκόμαστε και τους συμβολισμούς μας απλοποιούμε σημαντικά.

Για την ακρίβεια, θεωρούμε ένα προβολικό επίπεδο $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ και το δυναμοσύνολο $\mathbf{P}(\mathcal{P})$ του $\mathcal{P}$. Επίσης ορίζουμε την απεικόνιση

$$J : \mathcal{L} \longrightarrow \mathbf{P}(\mathcal{P}),$$

η οποία σε κάθε ευθεία ℓ αντιστοιχεί τη σημειοσειρά της (βλ. Ορισμό 2.4.1)

$$J(\ell) = \{P \in \mathcal{P} \,:\, (P, \ell) \in \mathcal{I}\}. \tag{2.6.6}$$

Η J είναι καλά ορισμένη (βλ. Πρόταση 2.4.2). Θέτουμε

$$\widetilde{\mathcal{L}} := J(\mathcal{L}),$$

οπότε σχηματίζεται η τριάδα $(\mathcal{P}, \widetilde{\mathcal{L}}, \in)$. Παρατηρούμε ότι $\mathcal{P} \cap \widetilde{\mathcal{L}} = \emptyset$ και το "$\in$" ορίζει μια σχέση σύμπτωσης στο $\mathcal{P} \times \widetilde{\mathcal{L}}$.

Αν συμβολίσουμε με $1_{\mathcal{P}}$ την ταυτοτική απεικόνιση του $\mathcal{P}$, τότε έχουμε το

2.6.8 Θεώρημα. *Με τους προηγουμένους συμβολισμούς ισχύουν τα εξής συμπεράσματα:*

i) Η τριάδα $(\mathcal{P}, \widetilde{\mathcal{L}}, \in)$ είναι προβολικό επίπεδο.

ii) Το ζεύγος $(1_{\mathcal{P}}, J)$ είναι ισομορφισμός μεταξύ των προβολικών επιπέδων $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ και $(\mathcal{P}, \widetilde{\mathcal{L}}, \in)$.

Απόδειξη. Για το i) επαληθεύουμε τα αξιώματα του προβολικού επιπέδου.

(ΠΕ 1): Αν P, Q είναι δύο οποιαδήποτε σημεία της δεύτερης τριάδας με $P \neq Q$, τότε, ως σημεία του πρώτου προβολικού επιπέδου, ορίζουν μονοσήμαντα την ευθεία $P \vee Q$. Συνεπώς ορίζεται και η $J(P \vee Q) \in \widetilde{\mathcal{L}}$. Επειδή $(P, P \vee Q) \in \mathcal{I}$, θα είναι $P \in J(P \vee Q)$ και, παρόμοια, $Q \in J(P \vee Q)$. Άρα, η $J(P \vee Q)$ είναι μια ευθεία του $\widetilde{\mathcal{L}}$, που περιέχει (ή ορίζεται από) τα σημεία P, Q. Η ευθεία αυτή είναι και μοναδική. Πραγματικά, αν υπήρχε και κάποια άλλη ευθεία από το $\widetilde{\mathcal{L}}$, που να περιέχει τα P, Q, τότε αυτή θα είχε τη μορφή $J(k)$, για κάποια $k \in \mathcal{L}$. Επειδή $P, Q \in J(k)$, λόγω της (2.6.6) θα ήταν $(P, k) \in \mathcal{I} \ni (Q, k)$. Αλλά $P \neq Q$, οπότε το (ΠΕ 1) στο προβολικό επίπεδο $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ συνεπάγεται ότι $k = P \vee Q$, άρα και $J(k) = J(P \vee Q)$, απ' όπου προκύπτει και το μονοσήμαντο της ευθείας (του $\widetilde{\mathcal{L}}$), η οποία περιέχει τα P και Q.

(ΠΕ 2): Αν $J(k)$ και $J(\ell)$ είναι στοιχεία του $\widetilde{\mathcal{L}}$ με $J(k) \neq J(\ell)$, τότε και $k \neq \ell$ (βλ. Πρόταση 2.4.2. Συνεπώς, από το (ΠΕ 2) για το $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, ορίζεται το σημείο $P = k \wedge \ell$. Επειδή $(P, k) \in \mathcal{I} \ni (P, \ell)$, οι τελευταίες σχέσεις και η (2.6.6) συνεπάγονται ότι $P \in J(k) \cap J(\ell)$, δηλαδή οι $J(k)$ και $J(\ell)$ έχουν κοινό σημείο.

(ΠΕ 3): Επειδή το $\mathcal{P}$ είναι το ίδιο και στις δύο τριάδες και η πρώτη είναι προβολικό επίπεδο, μπορούμε να βρούμε τέσσερα σημεία P_i $(i = 1, \ldots, 4)$ διαφορετικά και ανά τρία μη συγγραμμικά (ως προς τις ευθείες του $\mathcal{L}$). Τα σημεία αυτά δεν είναι ανά τρία συγγραμμικά και ως προς τις ευθείες του $\widetilde{\mathcal{L}}$. Πραγματικά, αν υποθέσουμε ότι υπάρχει κάποια ευθεία $J(k)$, που περιέχει, ας πούμε τα P_1, P_2, P_3, τότε θα ήταν και $(P_j, k) \in \mathcal{I}$ $(j = 1, 2, 3)$, δηλαδή τα σημεία θα ήσαν συγγραμμικά στο πρώτο επίπεδο (άτοπο).

Για το συμπέρασμα ii) παρατηρούμε ότι, σύμφωνα με τον ορισμό της J,

$$[\, \forall\ (P, k) \in \mathcal{P} \times \mathcal{L} \ :\ (P, k) \in \mathcal{I}\,] \quad \Rightarrow \quad [\, 1_{\mathcal{P}}(P) = P \in J(k)\,].$$

Άρα, το ζεύγος $(1_{\mathcal{P}}, J)$ είναι μορφισμός προβολικών επιπέδων. Επειδή η $1_{\mathcal{P}}$ είναι 1 – 1 και επί, το Πόρισμα 2.6.6 ολοκληρώνει την απόδειξη. □

2.6.9 Παρατηρήσεις. Με τη βοήθεια του προηγουμένου ισομορφισμού $(1_{\mathcal{P}}, J)$, το προβολικό επίπεδο $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ ταυτίζεται με το προβολικό επίπεδο $(\mathcal{P}, \widetilde{\mathcal{L}}, \in)$ του οποίου οι ευθείες είναι σημειοσύνολα, δηλαδή υποσύνολα του $\mathcal{P}$. Έτσι, ταυτίζοντας (μέσω της J) μια ευθεία $k \in \mathcal{L}$ με τη σημειοσειρά της $J(k)$, κάθε σημείο P της k [με την έννοια: $(P, k) \in \mathcal{I}$] μπορεί να θεωρηθεί και σημείο της ευθείας (σημειοσειράς) $J(k) \in \widetilde{\mathcal{L}}$ [με τη συνήθη συνολοθεωρητική έννοια, δηλ. $P \in J(k)$].

Όπως εξηγήσαμε και στη συζήτηση πριν το Θεώρημα 2.6.8, τα προηγούμενα βρίσκονται σε συμφωνία με τη Στοιχειώδη Γεωμετρία (όπου οι ευθείες είναι σύνολα σημείων) και δικαιολογεί τις εκφράσεις: «ένα σημείο ανήκει σε μία ευθεία», «δύο ευθείες τέμνονται σ' ένα σημείο» κλπ., τις οποίες έχουμε χρησιμοποιήσει ήδη από τους πρώτους ορισμούς.

2.6.10 Ασκήσεις.

1. Αν $(\phi, \psi) : (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \in) \to (\mathcal{P}', \mathcal{L}', \in)$ είναι μορφισμός προβολικών επιπέδων 1 – 1, τότε ισχύει η συνεπαγωγή:

$$[\,\forall\,(P, \ell) \in \mathcal{P} \times \mathcal{L} \,:\, P \notin \ell] \quad \Rightarrow \quad [\phi(P) \notin \psi(\ell)].$$

Τι συμβαίνει αν παραλειφθεί η υπόθεση ότι ο μορφισμός (ϕ, ψ) είναι 1 – 1;

2. Με τις υποθέσεις της προηγουμένης άσκησης, έχουμε ότι:

$$[\,\forall\,(P, \ell) \in \mathcal{P} \times \mathcal{L} \,:\, \phi(P) \in \psi(\ell)] \quad \Rightarrow \quad [P \in \ell\,].$$

3. Αν (ϕ, ψ) είναι ισομορφισμός, τότε το ζεύγος (ϕ^{-1}, ψ^{-1}) είναι μορφισμός προβολικών επιπέδων. (Να συνδυαστεί η άσκηση με την Παρατήρηση 2.6.3). Συμβολικά γράφουμε ότι:

$$(\phi^{-1}, \psi^{-1}) =: (\phi, \psi)^{-1}$$

4. Έστω ότι (ϕ, ψ) είναι μορφισμός 1 – 1 μεταξύ προβολικών επιπέδων. Τότε κάθε μία από τις απεικονίσεις του ζεύγους εκφράζεται μέσω της άλλης.

5. Αν (ϕ, ψ) είναι μορφισμός προβολικών επιπέδων και η ϕ είναι απεικόνιση 1 – 1, τότε για οποιονδήποτε άλλο μορφισμό (ϕ, ψ') θα είναι $\psi = \psi'$.

6. Να αποδειχθεί ότι το $\mathbb{P}_2$, όπως ορίστηκε στο Παράδειγμα 2.2.3 (2), είναι ισόμορφο με το προβολικό επίπεδο της Άσκησης 2.2.9 (5).

7. Αν (ϕ_1, ψ_1) είναι μορφισμός του προβολικού επιπέδου $(\mathcal{P}_1, \mathcal{L}_1, \mathcal{I}_1)$ στο $(\mathcal{P}_2, \mathcal{L}_2, \mathcal{I}_2)$ και (ϕ_2, ψ_2) μορφισμός του $(\mathcal{P}_2, \mathcal{L}_2, \mathcal{I}_2)$ στο $(\mathcal{P}_3, \mathcal{L}_3, \mathcal{I}_3)$, τότε και το ζεύγος $(\phi_2 \circ \phi_1, \psi_2 \circ \psi_1)$ είναι μορφισμός του $(\mathcal{P}_1, \mathcal{L}_1, \mathcal{I}_1)$ στο $(\mathcal{P}_3, \mathcal{L}_3, \mathcal{I}_3)$. Συμβολικά γράφουμε ότι:

$$(\phi_2 \circ \phi_1, \psi_2 \circ \psi_1) =: (\phi_2, \psi_2) \circ (\phi_1, \psi_1).$$

8. Δίνονται τα προβολικά επίπεδα $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \in)$, $(\mathcal{P}', \mathcal{L}', \in)$ και υποθέτουμε ότι $\phi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ είναι απεικόνιση 1 – 1 και επί, η οποία ***διατηρεί τη συγγραμμικότητα σημείων***, δηλ. απεικονίζει συγγραμμικά σημεία του πρώτου επιπέδου σε συγγραμμικά σημεία του δευτέρου. Τότε υπάρχει μία μοναδική $\psi : \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$, τέτοια ώστε το (φ, ψ) να είναι ισομορφισμός μεταξύ των δύο προβολικών επιπέδων.

9. Αν $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \in)$ είναι ένα προβολικό επίπεδο, συμβολίζουμε με $\mathcal{A}ut(\mathcal{P})$ το σύνολο των αυτομορφισμών του (δηλ. των ισομορφισμών του επιπέδου στον εαυτό του). Να αποδειχθεί ότι το $\mathcal{A}ut(\mathcal{P})$ αποτελεί ομάδα (με πράξη τη σύνθεση των μορφισμών, όπως αναφέρεται στην παραπάνω Άσκηση 7.

> Τα στοιχεία του $\mathcal{A}ut(\mathcal{P})$ καλούνται, ιδιαιτέρως, ***συγγραμμικότητες*** του προβολικού επιπέδου $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, ενώ το ζεύγος $(\mathcal{P}, \mathcal{A}ut(\mathcal{P}))$ αποτελεί τη ***Γεωμετρία Klein*** αυτού. Οι χαρακτηριστικές ιδιότητες ενός προβολικού επιπέδου προκύπτουν από αντίστοιχες ιδιότητες της ομάδας $\mathcal{A}ut(\mathcal{P})$ και ορισμένων υποομάδων της. Η ορολογία αυτή χρησιμοποιείται προς τιμήν του Felix Klein (1849–1925), ο οποίος είχε την ιδέα να μελετήσει τη γεωμετρία ενός συνόλου S, εφοδιασμένου με μία δομή, μέσω της αντίστοιχης ομάδας $\mathcal{A}ut(S)$. Έτσι, η Γεωμετρία Klein του S είναι το ξεύγος $(S, \mathcal{A}ut(S))$. Την ιδέα αυτή ανέπτυξε ο Klein το 1872 στο περίφημο Erlanger Programm (Πρόγραμμα του Erlangen), που είχε πολύ μεγάλη επίδραση στην εξέλιξη της Γεωμετρίας.

Εικονα 14. Felix Klein

2.7 Αλγεβρική μελέτη του $\mathbb{P}_2$

Στο Παράδειγμα 2.2.3 (2) ορίσαμε το πραγματικό προβολικό επίπεδο $\mathbb{P}_2$. Επειδή το επίπεδο αυτό προκύπτει από τον χώρο $\mathbb{R}^3$, στον οποίον υπάρχει η δυνατότητα να χρησιμοποιηθεί ο μηχανισμός της Γραμμικής Άλγεβρας, το $\mathbb{P}_2$ είναι ένα πρώτο (και σημαντικό) παράδειγμα συσχετισμού της Προβολικής Γεωμετρίας με την Άλγεβρα, που οδηγεί στη γενικότερη ιδέα της αλγεβροποίηση του τυχόντος προβολικού επιπέδου.

Όπως εξηγήσαμε στο προαναφερόμενο παράδειγμα, τα σημεία του $\mathbb{P}_2$ είναι ακριβώς οι ευθείες του $\mathbb{R}^3$, οι οποίες διέρχονται από το $0 \equiv (0, 0, 0)$, ενώ οι ευθείες του $\mathbb{P}_2$ είναι ακριβώς τα επίπεδα του $\mathbb{R}^3$, τα οποία επίσης διέρχονται από το 0.

Ας θυμηθούμε από την Αναλυτική/Γραμμική Γεωμετρία ότι, αν $\mathcal{E}$ είναι μια ευθεία του $\mathbb{R}^3$, που διέρχεται από την αρχή των αξόνων, τότε η $\mathcal{E}$ ορίζεται πλήρως από το 0 και τυχόν άλλο σημείο της $(a_0, b_0, c_0) \neq (0,0,0)$. Ακριβέστερα

$$\mathcal{E} = \{t(a_0, b_0, c_0) \mid t \in \mathbb{R}\}. \tag{2.7.1}$$

Προφανώς, για δύο τυχόντα σημεία (a, b, c), (a', b', c') της $\mathcal{E}$, που είναι διαφορετικά μεταξύ τους καθώς και προς το 0, υπάρχει κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}_* = \mathbb{R} - \{0\}$, έτσι ώστε $(a', b', c') = \lambda(a, b, c)$.

Απ᾽ το άλλο μέρος, ένα επίπεδο του $\mathbb{R}^3$, που διέρχεται από το 0, ορίζεται από μία εξίσωση της μορφής

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0, \tag{2.7.2}$$

όπου οι συντελεστές α, β, γ είναι στοιχεία του $\mathbb{R}^3$ με $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0,0,0)$. Οι τριάδες (x, y, z), που είναι λύσεις της (2.7.2), αποτελούν τα σημεία του επιπέδου. Επειδή ένα τέτοιο επίπεδο καθορίζεται πλήρως από την τριάδα (α, β, γ), το συμβολίζουμε με $\Pi(\alpha, \beta, \gamma)$.

Αν θεωρήσουμε δύο επίπεδα $\Pi(\alpha, \beta, \gamma)$ και $\Pi(\alpha', \beta', \gamma')$, τότε διαπιστώνουμε ότι

$$\Pi(\alpha, \beta, \gamma) = \Pi(\alpha', \beta', \gamma') \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{R}_* : (\alpha', \beta', \gamma') = \lambda(\alpha, \beta, \gamma).$$

Πραγματικά, η σχέση (2.7.2) συνεπάγεται ότι

$$(\alpha, \beta, \gamma) \perp (x, y, z),$$

για κάθε $(x, y, z) \in \Pi(\alpha, \beta, \gamma)$, άρα

$$(\alpha, \beta, \gamma) \perp \Pi(\alpha, \beta, \gamma),$$

και παρόμοια

$$(\alpha', \beta', \gamma') \perp \Pi(\alpha', \beta', \gamma').$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \Pi(\alpha, \beta, \gamma) = \Pi(\alpha', \beta', \gamma') &\Leftrightarrow \ (\alpha', \beta', \gamma') \,/\!/\, (\alpha, \beta, \gamma) \\ &\Leftrightarrow \ (\alpha', \beta', \gamma') = \lambda(\alpha, \beta, \gamma). \end{aligned}$$

Οι προηγούμενες υπενθυμίσεις θα μας επιτρέψουν να κατασκευάσουμε, με αλγεβρικό τρόπο, ένα προβολικό επίπεδο ισόμορφο με το $\mathbb{P}_2$. Λόγω της ισομορφίας αυτής θα ταυτίζουμε τα δύο επίπεδα, οπότε θα έχουμε την δυνατότητα να μελετήσουμε το $\mathbb{P}_2$ με αλγεβρικές μεθόδους. Για το σκοπό αυτό, στο χώρο

$$\mathbb{R}^3_* := \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\},$$

ορίζουμε την επομένη σχέση ισοδυναμίας:

$$(a, b, c) \sim (a', b', c') \ \Leftrightarrow \ \exists\, \lambda \in \mathbb{R}_* : (a', b', c') = \lambda(a, b, c). \tag{2.7.3}$$

Την κλάση ισοδυναμίας του σημείου (a, b, c) συμβολίζουμε με $[a, b, c]$ (αντί του πολυπλοκοτέρου $[(a, b, c)]$). Προφανώς,

$$[a, b, c] = \{\lambda(a, b, c) \mid \lambda \in \mathbb{R}_*\}.$$

Ο αντίστοιχος χώρος-πηλίκον $\mathbb{R}^3_* /\sim$, δηλαδή το σύνολο όλων των κλάσεων ισοδυναμίας, οι οποίες προκύπτουν με τον προηγούμενο τρόπο, συμβολίζεται με $\mathcal{P}^a$. Άρα,

$$\mathcal{P}^a := \mathbb{R}^3_* /\sim\, = \{[a, b, c] \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3_*\}. \tag{2.7.4}$$

Πιο κάτω, τις κλάσεις του $\mathcal{P}^a$ θα τις αντιστοιχίσουμε στα σημεία του $\mathbb{P}_2$ (δηλαδή τις ευθείες του $\mathbb{R}^3$, που διέρχονται από την αρχή των αξόνων).

Στη συνέχεια, για μια τριάδα $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3_*$, (που μπορούμε να θεωρήσουμε ότι αντιστοιχεί στους συντελεστές ενός επιπέδου από το 0) ορίζουμε και την ισοδυναμία (επίσης στο $\mathbb{R}^3_*$):

$$(\alpha, \beta, \gamma) \sim (\alpha', \beta', \gamma') \Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R}_* : (\alpha', \beta', \gamma') = \lambda(\alpha, \beta, \gamma). \tag{2.7.5}$$

Την κλάση ισοδυναμίας της τριάδας (α, β, γ) συμβολίζουμε με $<\alpha, \beta, \gamma>$ και θέτουμε

$$\mathcal{L}^a = \{<\alpha, \beta, \gamma> \mid (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3_*\}. \tag{2.7.6}$$

Θα δούμε πιο κάτω ότι τα στοιχεία (κλάσεις) του $\mathcal{L}^a$ αντιστοιχούν στις ευθείες του $\mathbb{P}_2$ (δηλαδή στα επίπεδα του $\mathbb{R}^3$, που διέρχονται από την αρχή των αξόνων).

Μεταξύ των $\mathcal{P}^a$ και $\mathcal{L}^a$ υπάρχει μια προφανής σχέση σύμπτωσης (λόγω του συσχετισμού τους με τις ευθείες και τα επίπεδα του $\mathbb{R}^3$), που δίνεται απο την

$$[p, q, r] \in <\alpha, \beta, \gamma> \quad \Leftrightarrow \quad \alpha p + \beta q + \gamma r = 0. \tag{2.7.7}$$

Επίσης, $\mathcal{P}^a \cap \mathcal{L}^a = \emptyset$. Επομένως, σχηματίζεται η τριάδα $(\mathcal{P}^a, \mathcal{L}^a, \in)$, όπου ο εκθέτης «$a$» χρησιμοποιείται για να υποδηλώσει ότι η κατασκευή της έγινε με τον «αλγεβρικό» τρόπο που περιγράψαμε.

Πριν αποδείξουμε ότι η τριάδα $(\mathcal{P}^a, \mathcal{L}^a, \in)$ αποτελεί προβολικό επίπεδο, ας παρατηρήσουμε ότι οι ισοδυναμίες (2.7.3) και (2.7.5) δεν διαφέρουν μεταξύ τους από συνολοθεωρητική άποψη. Όμως, όπως προαναφέραμε, οι κλάσεις της πρώτης θα αντιστοιχούν σε σημεία του $\mathbb{P}_2$, ενώ οι κλάσεις της δεύτερης στις ευθείες του. Λόγω αυτής της διαφοροποίησης, χρησιμοποιούμε τα σύμβολα $[\ \ ]$ και $<\ >$ για να διακρίνουμε μεταξύ τους τις αντίστοιχες κλάσεις ισοδυναμίας. Έτσι, για παράδειγμα, αν $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3_*$, τότε τα στοιχεία $[x, y, z]$ και $<x, y, z>$ συμβολίζουν εντελώς διαφορετικά αντικείμενα στο υπό κατασκευήν προβολικό επίπεδο $(\mathcal{P}^a, \mathcal{L}^a, \in)$: το $[x, y, z]$ είναι ένα σημείο του, ενώ το $<x, y, z>$ είναι μια ευθεία του ιδίου επιπέδου.

2.7.1 Θεώρημα. *Η τριάδα $\mathbb{P}^a_2 := (\mathcal{P}^a, \mathcal{L}^a, \in)$ ορίζει ένα προβολικό επίπεδο, ισόμορφο προς το $\mathbb{P}_2$.*

Απόδειξη. Για την απόδειξη του (ΠΕ 1) θεωρούμε δύο οποιαδήποτε σημεία $[a_1, b_1, c_1]$ και $[a_2, b_2, c_2]$ του $\mathcal{P}^a$ με $[a_1, b_1, c_1] \neq [a_2, b_2, c_2]$ (επομένως, δεν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}_*$, τέτοιο ώστε $(a_2, b_2, c_2) = \lambda(a_1, b_1, c_1)$). Θα δείξουμε ότι τα δύο σημεία ορίζουν μία (μοναδική) ευθεία. Αν καλέσουμε $<x, y, z>$ την ευθεία αυτή, τότε θα ικανοποιείται το ομογενές σύστημα των εξισώσεων

$$\left\{\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{array}\right. \tag{2.7.8}$$

Το τελευταίο, σύμφωνα με τη γενική θεωρία των (ομογενών) γραμμικών συστημάτων, διαθέτει μη μηδενικές λύσεις και το σύνολο όλων των λύσεών του αποτελεί γραμμικό χώρο διάστασης 1 (βλ. σχετικώς [2, σελ. 135], [4, σελ. 249], [14, σελ. 84]). Επομένως, αν (x, y, z) είναι μια οποιαδήποτε μη μηδενική λύση, τότε κάθε άλλη λύση, επίσης μη μηδενική, θα είναι της μορφής $(x', y', z') = \lambda(x, y, z)$ με $\lambda \in \mathbb{R}_*$. Δηλαδή όλες οι μη μηδενικές λύσεις του συστήματος (2.7.8) ορίζουν ακριβώς μιαν ευθεία $<x, y, z>$, οπότε αποδεικνύεται το (ΠΕ 1).

Για την απόδειξη του αξιώματος (ΠΕ 2) θεωρούμε δύο διαφορετικές ευθείες $<a_1, \beta_1, \gamma_1>$ και $<a_2, \beta_2, \gamma_2>$ του $\mathcal{L}^a$, οπότε αναζητούμε ένα κοινό σημείο $[x, y, z]$. Τότε θα πρέπει να επιλύσουμε το σύστημα

$$\left\{\begin{array}{l} a_1x + \beta_1y + \gamma_1z = 0 \\ a_2x + \beta_2y + \gamma_2z = 0 \end{array}\right.$$

που είναι ακριβώς του τύπου (2.7.8). Άρα, με την ίδια μέθοδο, αποδεικνύουμε την ύπαρξη ενός (μοναδικού) $[x, y, z]$ με τη ζητουμένη ιδιότητα.

Τέλος, θεωρούμε τα σημεία $[1, 0, 0]$, $[0, 1, 0]$, $[0, 0, 1]$ και $[1, 1, 1]$. Διαπιστώνουμε στοιχειωδώς ότι είναι διαφορετικά μεταξύ τους. Επίσης δεν είναι συγγραμμικά ανά τρία. Για παράδειγμα, αν τα $[1, 0, 0]$, $[0, 1, 0]$ και $[1, 1, 1]$ ήσαν συγγραμμικά και $<x, y, z>$ η κοινή τους ευθεία, τότε από την (2.7.7) θα είχαμε ότι $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, που δεν έχει έννοια [βλ.επίσης και την Εφαρμογή 2.7.2 (4) στη συνέχεια]. Επομένως ικανοποιείται και το αξίωμα (ΠΕ 3).

Αφού δείξαμε ότι η τριάδα $(\mathcal{P}^a, \mathcal{L}^a, \in)$ είναι προβολικό επίπεδο, για να το συγκρίνουμε με το (γεωμετρικό) $\mathbb{P}_2 = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \subset)$, όπως το έχουμε ορίσει μέσω ευθειών και επιπέδων του $\mathbb{R}^3$, ορίζουμε τις απεικονίσεις $\Phi_a : \mathcal{P} \to \mathcal{P}^a$ και $\Psi_a : \mathcal{L} \to \mathcal{L}^a$ με

$$\mathcal{P} \ni \{t(a, b, c) \mid t \in \mathbb{R}\} \xmapsto{\Phi_a} [a, b, c] \in \mathcal{P}^a, \tag{2.7.9}$$

$$\mathcal{L} \ni \Pi(a, \beta, \gamma) \xmapsto{\Psi_a} <a, \beta, \gamma> \in \mathcal{L}^a. \tag{2.7.10}$$

Οι Φ_a και Ψ_a είναι καλά ορισμένες. Θα δείξουμε ότι το ζεύγος (Φ_a, Ψ_a) είναι μορφισμός προβολικών επιπέδων. Πραγματικά, αν P και ℓ είναι σημείο και ευθεία, αντιστοίχως, του $\mathbb{P}_2$ με $P \in \ell$, τότε μπορούμε να γράψουμε ότι

$$P = \{t(a, b, c) \mid t \in \mathbb{R}\} \quad \text{και} \quad \ell = \Pi(a, \beta, \gamma),$$

για κάποιες τριάδες (a, b, c) και (α, β, γ) του $\mathbb{R}^3_*$. Επειδή

$$P \in \ell \quad \Leftrightarrow \quad \{t(a, b, c) \mid t \in \mathbb{R}\} \subset \Pi(\alpha, \beta, \gamma),$$

προκύπτει ότι κάθε σημείο $t(a, b, c)$ με $t \neq 0$ ικανοποιεί την (2.7.7), δηλαδή

$$\alpha(ta) + \beta(tb) + \gamma(tc) = 0 \quad \text{ή} \quad \alpha a + \beta b + \gamma c = 0,$$

πράγμα που σημαίνει ότι $[a, b, c] \in <\alpha, \beta, \gamma>$. Επομένως, σύμφωνα με τον ορισμό των Φ_a και Ψ_a, είναι

$$\Phi_a(P) = [a, b, c] \in <\alpha, \beta, \gamma> = \Psi_a(\Pi(\alpha, \beta, \gamma)),$$

που αποδεικνύει ότι το ζεύγος (Φ_a, Ψ_a) είναι πράγματι μορφισμός.

Τέλος διαπιστώνουμε αμέσως ότι οι απεικονίσεις Φ_a, Ψ_a είναι 1 – 1 και επί (αρκεί ο έλεγχος της μιας), άρα το (Φ_a, Ψ_a) ορίζει έναν ισομορφισμό μεταξύ των προβολικών επιπέδων $\mathbb{P}_2$ και $\mathcal{P}^a$. □

Σχόλιο: Εξαιτίας της ισομορφίας του Θεωρήματος 2.7.1, ταυτίζουμε τα επίπεδα $\mathbb{P}_2$ και $\mathbb{P}_2^a$, οπότε χρησιμοποιούμε το ίδιο σύμβολο $\mathbb{P}_2$ και για τα δύο. Έτσι το $\mathbb{P}_2$ μπορεί να ερμηνευθεί και να μελετηθεί κατά δύο (ισοδύναμους) τρόπους: είτε όπως στο Παράδειγμα 2.2.3 (2) [με ευθείες και επίπεδα του $\mathbb{R}^3$], είτε με κλάσεις ισοδυναμίας, όπως πιο πάνω. Η προτίμηση για τον έναν ή τον άλλον τρόπο υπαγορεύεται από το συγκεκριμένο πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε κάθε φορά.

2.7.2 Μερικές εφαρμογές στο $\mathbb{P}_2$.

(1) Να βρεθεί το σημείο τομής των ευθειών $<0, 1, 2>$ ***και*** $<1, 0, 1>$.

Πρώτα διαπιστώνουμε ότι οι δύο ευθείες είναι διαφορετικές, αφού δεν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}_*$, τέτοιο ώστε $(1, 0, 1) = \lambda(0, 1, 2)$. Επομένως, αν $[x, y, z]$ είναι η ζητουμένη τομή, τότε θα επαληθεύεται το σύστημα των εξισώσεων

$$\begin{cases} 0x + 1y + 2z = 0 \\ 1x + 0y + 1z = 0 \end{cases}$$

απ' όπου προκύπτει ότι $x = -z$ και $y = -2z$. Επομένως

$$[x, y, z] = [-z, -2z, z] = [-z(1, 2, -1)].$$

Επειδή $z \neq 0$ [αλλιώς θα ήταν $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, άτοπο], έχουμε τελικώς ότι

$$<0, 1, 2> \wedge <1, 0, 1> = [1, 2, -1].$$

(2) Να βρεθεί η μορφή των σημείων της ευθείας $\ell = <0, 1, 2>$.

Αν συμβολίσουμε με $[x, y, z]$ το τυχόν σημείο της ℓ, τότε

$$[x, y, z] \in \ell \;\Leftrightarrow\; 0x + 1y + 2z = 0 \;\Leftrightarrow\; y = -2z,$$

δηλαδή τα σημεία της ℓ έχουν τη μορφή $[x, y, z] = [x, -2z, z]$.

Επειδή $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, θα είναι είτε $x \neq 0$, είτε $z \neq 0$. Για $x \neq 0$, θα έχουμε ότι

$$[x, y, z] = [x, -2z, z] = \left[x\left(1, -2\frac{z}{x}, \frac{z}{x}\right)\right] = \left[1, -2\frac{z}{x}, \frac{z}{x}\right],$$

οπότε, θέτοντας $\lambda = \dfrac{z}{x}$, καταλήγουμε στην

$$[x, y, z] = [1, -2\lambda, \lambda], \qquad \forall\ \lambda \in \mathbb{R}. \tag{2.7.11}$$

Στην περίπτωση που είναι $z \neq 0$, θα έχουμε ότι

$$[x, y, z] = [1, -2z, z] = \left[z\left(\frac{x}{z}, -2, 1\right)\right] = \left[\frac{x}{z}, -2, 1\right],$$

άρα, για $\mu = x/z$, προκύπτει ότι

$$[x, y, z] = [\mu, -2, 1], \qquad \forall\ \mu \in \mathbb{R}. \tag{2.7.12}$$

Τις (2.7.11) και (2.7.12) μπορούμε να ενοποιήσουμε ως εξής: για $\lambda = 0$ παίρνουμε το σημείο $[1, 0, 0]$, ενώ για $\lambda \neq 0$ είναι

$$[x, y, z] = \left[\lambda \cdot \left(\frac{1}{\lambda}, -2, 1\right)\right] = \left[\frac{1}{\lambda}, -2, 1\right],$$

το οποίο (προφανώς) αποτελεί σημείο της μορφής (2.7.12).

Επομένως, τα σημεία της ευθείας $< 0, 1, 2 >$ είναι το $[1, 0, 0]$ και όλα τα σημεία της μορφής $[\mu, -2, 1]$, με $\mu \in \mathbb{R}$.

(3) Να βρεθεί η ευθεία την οποίαν ορίζουν τα σημεία $[0, 0, 1]$ ***και*** $[1, 1, 1]$.

Διαπιστώνουμε ότι $[0, 0, 1] \neq [1, 1, 1]$, άρα ορίζεται η ευθεία $[0, 0, 1] \vee [1, 1, 1]$. Αν την καλέσουμε $< x, y, z >$, τότε θα επαληθεύονται οι εξισώσεις

$$z = 0, \quad x + y + z = 0,$$

από τις οποίες προκύπτει ότι

$$< x, y, z > = < x, -x, 0 > = < 1, -1, 0 >$$

(επειδή αναγκαίως είναι $x \neq 0$). Επομένως,

$$[0, 0, 1] \vee [1, 1, 1] = < 1, -1, 0 > .$$

(4) Να βρεθεί η συνθήκη συγγραμμικότητας τριών σημείων.

Ας υποθέσουμε ότι ζητούμε να βρούμε μία ευθεία $< x, y, z >$, η οποία να περιέχει τρία δεδομένα σημεία $[a_i, b_i, c_i]$, $i = 1, 2, 3$. Τότε θα πρέπει το ομογενές σύστημα

$$a_i x + b_i y + c_i z = 0; \qquad i = 1,\ 2,\ 3, \tag{2.7.13}$$

να διαθέτει μία λύση *διάφορη της μηδενικής*. Αυτό συμβαίνει τότε και μόνον τότε αν η ορίζουσα των συντελεστών του (2.7.13) μηδενίζεται. Επομένως, η ζητουμένη συνθήκη είναι η

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{2.7.14}$$

2.7.3 Ασκήσεις.

1. Να αποδειχθεί ότι οι σχέσεις (2.7.3), (2.7.6) ορίζουν πράγματι σχέσεις ισοδυναμίας. Επίσης να αποδειχθεί ότι η σχέση σύμπτωσης (2.7.7) δεν εξαρτάται από την επιλογή των αντιπροσώπων των κλάσεων.

2. Στο Θεώρημα 2.7.1 να συμπληρωθεί η απόδειξη του (ΠΕ. 3), και να αποδειχθεί ότι οι Φ_a, Ψ_a είναι καλά ορισμένες απεικονίσεις 1–1 και επί.

3. Να βρεθεί η ευθεία που ορίζουν τα σημεία
α) $[2, 1, 3]$ και $[1, 0, -1]$,
β) $[1, 0, -2]$ και $[-2, 0, 4]$.

4. Να βρεθεί η τομή των ευθειών
α) $<2, -1, 0>$ και $<-1, \frac{1}{2}, 0>$,
β) $<1, 0, 0>$ και $<1, -2, 1>$.

5. Να βρεθεί η μορφή των σημείων της ευθείας $<0, 0, 1>$.

Σημείωση. Το κεφάλαιο αυτό βασίζεται στο βιβλίο του παρόντος συγγραφέα [5], όπου και παραπέμπουμε τους ενδιαφερομένους για παραπέρα μελέτη. Πολύ κοντά στην παραπάνω έκθεση βρίσκονται και τα βιβλια [9] , [25], στα οποία μπορεί κανείς να βρεί και άλλα, πιό εξειδικευμένα, θέματα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

3

Διαφορίσιμες Καμπύλες

Το πρόβλημα της κατασκευής επιπέδων χαρτών της επιφάνειας της Γης υπήρξε μία από τις απαρχές της Διαφορικής Γεωμετρίας, η οποία μπορεί χονδρικά να περιγραφεί ως η έρευνα των ιδιοτήτων των καμπυλών και επιφανειών... Μια άλλη απαρχή αυτής της «τοπικής» γεωμετρίας ήταν η μελέτη, στον 17ο και 18ο αιώνα, των εφαπτομένων, των πρώτων καθέτων και της καμπυλότητας, με τον [Διαφορικό] Λογισμό να έχει δώσει ικανά εργαλεία για τη γενική επίθεση

E. T. Bell [8, σελ. 353]

Μετα απο μια συντομη ιστορική αναδρομή, στην §3.1 δίνονται οι βασικοί ορισμοί που αφορούν τις διαφορίσιμες παραμετρημένες καμπύλες. Η έννοια της αναπαραμέτρησης εισάγεται στην §3.2, όπου αποδεικνύεται ότι κάθε κανονική καμπύλη δέχεται αναπαραμέτρηση μοναδιαίας ταχύτητας. Για τις τελευταίες ορίζονται οι θεμελιώδεις έννοιες της καμπυλότητας και στρέψης, καθώς επίσης και το τρίεδρο, Frenet-Serret (§3.3). Τα ίδια στοιχεία για καμπύλες τυχαίας ταχύτητας εξετάζονται στις τελευταίες §§3.4–3.5.

3.0 Εισαγωγή

Καμπύλες όπως ο κύκλος, οι κωνικές τομές, οι έλικες και οι σπείρες είχαν απασχολήσει τους αρχαίους Έλληνες. Με σχετικά προβλήματα είχαν ασχοληθεί ο Πλάτωνας, ο Μέναιχμος, ο Απολλώνιος, ο Αρχιμήδης, κ.α. Επίσης για την αντιμετώπιση των περίφημων άλυτων (με κανόνα και διαβήτη) προβλημάτων είχαν ανακαλυφθεί και μελετηθεί η κισσοειδής (καμπύλη) του Διοκλέους, η κογχοειδής του Νικομήδους και η τετραγωνίζουσα του Δεινοστράτου.

Ενα σημαντικό πρόβλημα που απασχόλησε τους μαθηματικούς από την εποχή της αρχαιότητας, ήταν η χάραξη της εφαπτομένης σε ένα σημείο μιας καμπύλης. Το πρόβλημα αντιμετωπίστηκε φυσικά στο πλαίσιο της γνωστής τότε (συνθετικής) Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Οι απαντήσεις που δόθηκαν ήσαν μόνον μερικές και αφορούσαν συγκεκριμένες καμπύλες. Μια καλλίτερη προσέγγιση έγινε δυνατή στο πλαίσιο της Αναλυτικής Γεωμετρίας. Παρά τις σημαντικές προόδους που σημειώθηκαν στην κατεύθυνση αυτή από τους R. Descartes (Καρτέσιο), P. Fermat και C. Huygens, και πάλι η γενική μέθοδος επίλυσης του προβλήματος σταματούσε όταν επρόκειτονα αντιμετωπιστούν εξισώσεις βαθμού ανωτέρου του 3.

Το πρόβλημα του προσδιορισμού της εφαπτομένης επιλύθηκε στη γενικότητά του με την χρήση του Διαφορικού Λογισμού, που μαζί με τον Ολοκληρωτικό Λογισμό άσκησαν τεράστια επίδραση στην εξέλιξη της μαθηματικής επιστήμης.

Η χρήση του Διαφορικού Λογισμού στη μελέτη της Γεωμετρίας οδήγησε στην δημιουργία ενός νέου κλάδου, της Διαφορικής Γεωμετρίας. Στην ανάπτυξη της Διαφορικής Γεωμετρίας των καμπυλών είχαν θεμελιώδη συμβολή οι I. Newton, G. W. Leibniz, L. Euler, G. Monge, J. Bernoulli, A. C. Clairaut, F. Frenet, J. A. Serret, Ch. Dupin, J. Bertrand, και πολλοί άλλοι.

Η μελέτη των καμπυλών, εκτός από το καθ' αυτό μαθηματικό ενδιαφέρον της, έχει σημαντικές εφαρμογές στη μηχανική, στη ναυσιπλοΐα, στον προσδιορισμό των τροχιών ουρανίων σωμάτων ή συστημάτων δορυφόρων, κ.α.

Εδώ θα γνωρίσουμε μερικές βασικές έννοιες και συμπεράσματα της λεγόμενης *τοπικής* θεωρίας των καμπυλών.

3.1 Διαφορίσιμες καμπύλες

Στην Αναλυτική Γεωμετρία, λέγοντας καμπύλη εννοούμε ένα σύνολο σημείων X (του χώρου ή του επιπέδου) που ικανοποιούν ορισμένες συνθήκες. Για παράδειγμα, μπορεί να είναι ο *γεωμετρικός τόπος* σημείων που ικανοποιούν μια συγκεκριμένη ιδιότητα (κύκλος, έλλειψη, κλπ.), το *γράφημα* μιας συνάρτησης $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η *τροχιά* ενός κινητού, κ.ο.κ. Σκοπός μας είναι να εφαρμόσουμε μεθόδους του Διαφορικού Λογισμού στην μελέτη του X, και για να γίνει αυτό θα πρέπει να δούμε τις καμπύλες ως *εικόνες κατάλληλων συναρτήσεων*, δηλαδή να τις παραμετρήσουμε. Ετσι, δίνουμε τον επόμενο ορισμό:

3.1.1 Ορισμός. Μια ***παραμετρημένη καμπύλη στο χώρο*** (parametrized curve), ή απλώς ***καμπύλη στο χώρο*** (space curve) είναι μια συνεχής απεικόνιση $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$, όπου $I \subseteq \mathbb{R}$ είναι ένα διάστημα.

Επομένως, ο όρος «παραμετρημένη» (που συνήθως θα παραλείπεται στη συνέχεια) σημαίνει ότι η καμπύλη περιγράφεται με την βοήθεια μιας μεταβλητής (παραμέτρου) $t \in I$. Σε προβλήματα φυσικής η τελευταία μπορεί να παριστά τον χρόνο.

Επειδή, για κάθε $t \in I$, είναι $\alpha(t) \in \mathbb{R}^3$, η α είναι μία τριάδα της μορφής

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3). \tag{3.1.1}$$

Κάθε συνιστώσα (ή συντεταγμένη)

$$\alpha_i\colon = u_i \circ \alpha; \qquad i = 1, 2, 3,$$

όπου η $u_i\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ συμβολίζει την κανονική προβολή στην i-συντεταγμένη, είναι μια πραγματική συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής. Η συνέχεια της α ισοδυναμεί με την συνέχεια κάθε μιας από τις α_i.

Αν η εικόνα $\alpha(I)$ μιας καμπύλης περιέχεται σε ένα επίπεδο του $\mathbb{R}^3$, λέμε ότι η α είναι ***επίπεδη καμπύλη*** (plane curve). Σ' αυτήν την περίπτωση, με μια αλλαγή του συστήματος συντεταγμένων μπορούμε να θεωρούμε ότι $\alpha(I) \subset \mathbb{R}^2$.

> *Ενδιαφερόμαστε όχι για την απεικόνιση α (παραμετρημένη καμπύλη), αλλά για τις γεωμετρικές ιδιότητες της εικόνας, δηλαδή του συνόλου $X = \alpha(I)$.* Η απεικόνιση α είναι απλώς το εργαλείο για τη μελέτη του $\alpha(I)$.

Εδώ πρέπει να παρατηρήσουμε ότι οι καμπύλες

$$\begin{aligned}
&\alpha\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto \left(\frac{\sqrt{2}}{2}t, \frac{\sqrt{2}}{2}t\right),\\
&\beta\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t, t)\\
&\gamma\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (t^3, t^3)\\
&\delta\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto \begin{cases} (t, t) & : \quad t \leq 0 \\ (t^2, t^2) & : \quad t > 0, \end{cases}
\end{aligned}$$

έχουν την ίδια εικόνα $\alpha(\mathbb{R}) = \beta(\mathbb{R}) = \gamma(\mathbb{R}) = \delta(\mathbb{R}) = \Delta_{\mathbb{R}}$, δηλαδή την διαγώνιο του $\mathbb{R}^2$ (βλ. και Σχήμα 3.1 στην επόμενη σελίδα).

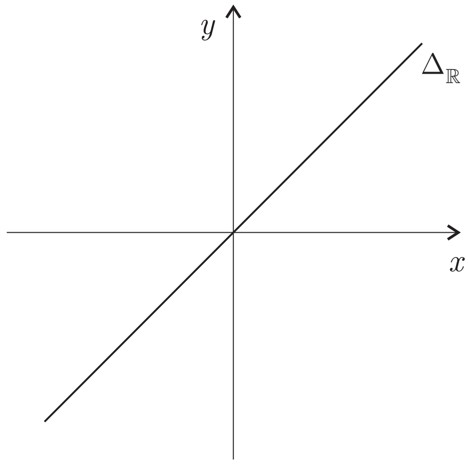
Απ' αυτές,

– η α είναι διαφορίσιμη, με $\|\alpha'(t)\| = 1$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$,

– η β είναι διαφορίσιμη, με $\beta'(t) \neq 0$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$,

– η γ είναι διαφορίσιμη και υπάρχει ένα σημείο, το 0, όπου $\gamma'(0) = (0, 0)$,

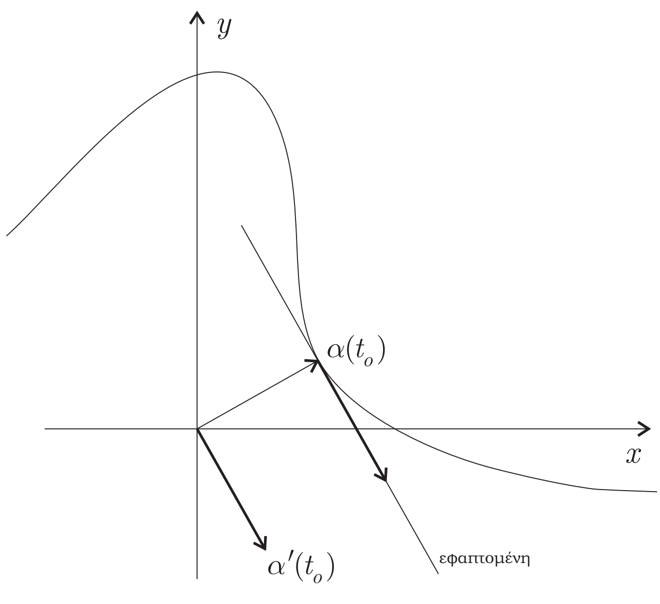
– ενώ η δ δεν είναι διαφορίσιμη (εννοείται παντού, αφού δεν υπάρχει διαφορισιμότητα στο σημείο 0).



Σχημα 3.1

Από τα προηγούμενα παραδείγματα προκύπτει ότι: (1) η ίδια καμπύλη $\Delta_{\mathbb{R}}$ μπορεί να περιγραφεί ως εικόνα διαφορετικών (παραμετρημένων) καμπυλών και (2) η ανυπαρξία παραγώγου ή ο μηδενισμός της (για μια παραμέτρηση) δεν συνδέονται κατ᾿ ανάγκην με κάποια ανωμαλία στο σχήμα της εικόνας $\Delta_{\mathbb{R}}$. Δημιουργούν όμως τεχνικές δυσκολίες, γι᾿ αυτό θα θεωρήσουμε καμπύλες που διαγράφουν την εικόνα με τον καλλίτερο δυνατό τρόπο, έτσι ώστε να δίνουν αμεσώτερα τα ζητούμενα συμπεράσματα.

Έστω $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ μια *διαφορίσιμη* καμπύλη και έστω ότι σε ένα σημείο t_o είναι $\alpha'(t_o) \neq 0$. Τότε υπάρχει η ***εφαπτομένη ευθεία*** (tangent line) της α στο σημείο



Σχημα 3.2

$\alpha(t_o)$, που δίνεται από την εξίσωση

$$\epsilon(s) = \alpha(t_o) + s\alpha'(t_o)\,, \qquad s \in \mathbb{R}. \tag{3.1.2}$$

Η ανυπαρξία ή ο μηδενισμός της παραγώγου $\alpha'(t_o)$ στο σημείο t_o δεν επιτρέπουν την προηγούμενη έκφραση της εφαπτομένης. Γι' αυτό στα επόμενα θεωρούμε μόνο διαφορίσιμες καμπύλες, των οποίων *η παράγωγος δεν μηδενίζεται πουθενά*. Μια καμπύλη μ' αυτήν την ιδιότητα ονομάζεται ***κανονική*** ή ***ομαλή*** (regular), ενώ σε μια καμπύλη α που δεν είναι ομαλή, κάθε σημείο όπου μηδενίζεται η παράγωγος λέγεται ***σημείο ανωμαλίας*** (της α).

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι οι καμπύλες μας έχουν τάξη διαφορισιμότητας αρκετά μεγάλη (συνήθως ≥ 3), ώστε να εξασφαλίζεται η ύπαρξη όσων παραγώγων χρειάζονται. Επίσης, υποθέτουμε ότι οι καμπύλες μας είναι και ***απλές***, δηλαδή είναι απεικονίσεις 1–1. Επομένως, για να αποφύγουμε τις περιττές επαναλήψεις, με τον όρο «κανονική καμπύλη» θα εννοούμε μια *απλή κανονική καμπύλη, C^r-διαφορίσιμη, με $r \geq 3$.*

Για μια διαφορίσιμη καμπύλη α, η παράγωγος

$$\alpha'(t) = (\alpha_1'(t), \alpha_2'(t), \alpha_3'(t)) \tag{3.1.3}$$

ονομάζεται ***εφαπτόμενο διάνυσμα*** (tangent vector) ή ***διάνυσμα ταχύτητας*** (velocity) της α στο $\alpha(t)$, ενώ το μήκος του ανωτέρω διανύσματος

$$\upsilon(t) := \|\alpha'(t)\| = \left(\alpha_1'(t)^2 + \alpha_2'(t)^2 + \alpha_3'(t)^2\right)^{1/2}$$

ονομάζεται ***μέτρο της ταχύτητας*** (speed) της α στο t.

Αν και η α' είναι διαφορίσιμη, τότε η δεύτερη παράγωγος

$$\alpha''(t) = (\alpha_1''(t), \alpha_2''(t), \alpha_3''(t)) \tag{3.1.4}$$

ονομάζεται ***επιτάχυνση*** (acceleration) της α στο t.

Για μια διαφορίσιμη καμπύλη $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$, ονομάζουμε ***μήκος*** (length) της α το ολοκλήρωμα

$$L(\alpha) := \int_I \|\alpha'(t)\| dt. \tag{3.1.5}$$

Για δύο καμπύλες $\alpha, \beta\colon I \to \mathbb{R}^3$, συμβολίζουμε με $<\alpha,\beta>$ την διαφορίσιμη συνάρτηση

$$<\alpha,\beta>\colon\ I \longrightarrow \mathbb{R} : t \mapsto <\alpha(t),\beta(t)> \tag{3.1.6}$$

και με $\alpha \times \beta$ την διαφορίσιμη καμπύλη

$$\alpha \times \beta\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^3 : t \mapsto \alpha(t) \times \beta(t). \tag{3.1.7}$$

Τα γινόμενα στην εικόνα των (3.1.6) και (3.1.7) είναι αντιστοίχως, το σύνηθες εσωτερικό και εξωτερικό γινόμενο του $\mathbb{R}^3$. Από τη διγραμμικότητα τους προκύπτουν οι παρακάτω κανόνες παραγώγισης:

(3.1.8) $$< \alpha, \beta >' (t) = < \alpha'(t), \beta(t) > + < \alpha(t), \beta'(t) >,$$

(3.1.9) $$(\alpha \times \beta)'(t) = (\alpha'(t) \times \beta(t)) + (\alpha(t) \times \beta'(t)).$$

Η απόδειξη των τύπων αυτών προκύπτει επίσης στοιχειωδώς: αν γράψουμε τις καμπύλες με τις συνιστώσες τους [βλ. σχέση (3.1.1)] και εφαρμόσουμε τον ορισμό του εσωτερικού και εξωτερικού γινομένου, έχουμε τις αντίστοιχες σχέσεις

$$< \alpha(t), \beta(t) > = \alpha_1(t)\beta_1(t) + \alpha_2(t)\beta_2(t) + \alpha_3(t)\beta_3(t),$$
$$\alpha(t) \times \beta(t) =$$
$$(\alpha_2(t)\beta_3(t) - \alpha_3(t)\beta_2(t),\ \alpha_3(t)\beta_1(t) - \alpha_1(t)\beta_3(t),\ \alpha_1(t)\beta_2(t) - \alpha_2(t)\beta_1(t)),$$

οπότε παραγωγίζουμε τις τελευταίες με το συνήθη τρόπο.

Οι παράγωγοι και το μήκος της α μας δίνουν πολλές πληροφορίες για την $\alpha(I)$, όπως γίνεται φανερό από τα επόμενα

3.1.2 Παραδείγματα. **(1)** *Έστω $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ μια διαφορίσιμη καμπύλη. Αν $\alpha''(t) = 0$, για κάθε $t \in I$, η α είναι ευθεία.*

Πράγματι,
$$\alpha''(t) = 0 \Rightarrow \alpha'(t) = \lambda \Rightarrow \alpha(t) = \lambda t + \mu.$$
Προφανώς ισχύει και το αντίστροφο.

(2) *Έστω α μια διαφορίσιμη καμπύλη που δεν περνά από το 0. Αν $\alpha(t_o)$ είναι το σημείο της εικόνας το πλησιέστερο στο 0 και $\alpha'(t_o) \neq 0$, τότε το διανυσμα $\alpha(t_o)$ είναι κάθετο στο $\alpha'(t_o)$.*

Πράγματι, ας θεωρήσουμε την συνάρτηση που σε κάθε $t \in I$ αντιστοιχεί το τετράγωνο της απόστασης του $\alpha(t)$ από το 0, δηλαδή την

$$\delta\colon I \longrightarrow \mathbb{R}\colon t \mapsto \|\alpha(t)\|^2 = \alpha_1(t)^2 + \alpha_2(t)^2 + \alpha_3(t)^2 = < \alpha(t), \alpha(t) > .$$

Αφού η δ παρουσιάζει ελάχιστο στο t_o, θα είναι $\delta'(t_o) = 0$, άρα, βάσει της (3.1.8), έχουμε ότι

$$0 = \delta'(t_o) = < \alpha(t_o), \alpha'(t_o) > + < \alpha'(t_o), \alpha(t_o) > = 2 < \alpha(t_o), \alpha'(t_o) >,$$

απ᾽ όπου συνάγεται ότι $\alpha(t_o) \perp \alpha'(t_o)$.

(3) *Έστω $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^2$ μια διαφορίσιμη καμπύλη, με $\alpha'(t) \neq 0$, για κάθε $t \in I$. Τότε η εικόνα $\alpha(I)$ είναι τόξο ενός κύκλου με κέντρο 0, εάν και μόνον εάν το $\alpha(t)$ είναι κάθετο στο $\alpha'(t)$, για κάθε $t \in I$.*

Όπως προηγουμένως, θεωρούμε το τετράγωνο της απόστασης του $a(t)$ από το 0

$$\delta\colon I \longrightarrow \mathbb{R}\colon t \mapsto < a(t), a(t) > .$$

Η δ είναι σταθερή, εάν και μόνον εάν $\delta' = 0$. Αλλά

$$\delta'(t) = < a, a >' (t) = < a'(t), a(t) > + < a(t), a'(t) > = 2 < a'(t), a(t) > .$$

Επομένως $\delta' = 0$ ισοδυναμεί με $a(t) \perp a'(t)$, για κάθε $t \in I$, οπότε έχουμε το αποτέλεσμα.

(4) *Η καμπύλη ελάχιστου μήκους που ενώνει δύο σημεία P και Q είναι το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα P, Q.*

Αν p και q είναι τα διανύσματα θέσης των σημείων P και Q αντιστοίχως, το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα P, Q είναι η καμπύλη

$$\epsilon\colon [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3\colon t \mapsto \epsilon(t) := p + t(q - p)$$

και έχει μήκος [βλ. σχέση (3.1.5)]

$$L(\epsilon) = \int_0^1 \|\epsilon'(t)\| dt = \int_0^1 \|q - p\| dt = \|q - p\|.$$

Έστω $a\colon [x, y] \to \mathbb{R}^3$ μια διαφορίσιμη καμπύλη με $a(x) = p$ και $a(y) = q$. Για ένα τυχόν σταθερό $u \in \mathbb{R}^3$ με $\|u\| = 1$, είναι

$$\begin{aligned} < a, u >' (t) &= < a'(t), u > + < a(t), u' > = < a'(t), u > \\ &\leq \|a'(t)\|\|u\| = \|a'(t)\|, \end{aligned}$$

επομένως

$$\begin{aligned} L(a) &= \int_x^y \|a'(t)\| dt \geq \int_x^y < a(t), u >' dt = < a(t), u > \Big|_x^y \\ &= < q, u > - < p, u > = < q - p, u >, \end{aligned}$$

για κάθε $u \in \mathbb{R}^3$ με $\|u\| = 1$. Παίρνοντας τώρα $u = (q - p)/\|q - p\|$, καταλήγουμε στη σχέση

$$L(a) \geq < q - p, q - p > / \|q - p\| = \|q - p\| = L(\epsilon).$$

3.2 Αναπαραμέτρηση καμπύλης

3.2.1 Ορισμός. Αν $a\colon I \to \mathbb{R}^3$ είναι μια καμπύλη, τότε μια καμπύλη $\beta\colon J \to \mathbb{R}^3$ λέγεται ***αναπαραμέτρηση*** (reparametrization) της a, αν υπάρχει μια αμφιδιαφόριση $h\colon J \to I$, με $\beta = a \circ h$ (βλ. και το επόμενο σχετικό διάγραμμα).

Άρα, αν η παράμετρος της α είναι t και της β είναι s, έχουμε ότι $t = h(s)$.

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\alpha"] & X \subseteq \mathbb{R}^3 \\ J \arrow[u, "h"] \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

Διάγραμμα 3.1

Υπενθυμίζουμε ότι η έκφραση «*η h είναι αμφιδιαφόριση*» σημαίνει ότι η h είναι διαφορίσιμη απεικόνιση $1-1$ και επί με διαφορίσιμη αντίστροφη. Κατά το Θεώρημα της Αντίστροφης Συνάρτησης, η h είναι αμφιδιαφόριση τότε και μόνον τότε αν είναι $1-1$ και επί με $h'(s) \neq 0$, για κάθε $s \in J$.

Είναι φανερό ότι κάθε αναπαραμέτρηση της α έχει την ίδια εικόνα με την α. Είναι επίσης φανερό ότι αν η α είναι κανονική, τότε και κάθε αναπαραμέτρησή της είναι κανονική.

Θα αναζητήσουμε εκείνες τις ιδιότητες της εικόνας $X := \alpha(I) = \beta(J)$ που δεν εξαρτώνται από την καμπύλη με την οποία διατρέχουμε το X. Μια τέτοια ιδιότητα μας δίνει το επόμενο

3.2.2 Θεώρημα. *Αν β είναι μια αναπαραμέτρηση της α, τότε $L(\beta) = L(\alpha)$.*

Απόδειξη. Έστω $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ και $\beta\colon [a',b'] \to \mathbb{R}^3$ αναπαραμέτρησή της α με $\beta = \alpha \circ h$, όπου $h\colon [a',b'] \to [a,b]$ αμφιδιαφόριση. Είναι

$$\begin{aligned} L(\beta) &= \int_{a'}^{b'} \|\beta'(s)\| ds = \int_{a'}^{b'} \|(\alpha \circ h)'(s)\| ds \\ &= \int_{a'}^{b'} \|\alpha'(h(s))\| \cdot |h'(s)| ds. \end{aligned}$$

Για $h' > 0$, δηλαδή για h γνησίως αύξουσα, έχουμε

$$\begin{aligned} L(\beta) = \int_{a'}^{b'} \|\alpha'(h(s))\| h'(s) ds &= \int_{h(a')}^{h(b')} \|\alpha'(h(s))\| dh(s) \\ = \int_{a}^{b} \|\alpha'(t)\| dt &= L(\alpha). \end{aligned}$$

Για $h' < 0$, δηλαδή για h γνησίως φθίνουσα, έχουμε

$$\begin{aligned} L(\beta) = -\int_{a'}^{b'} \|\alpha'(h(s))\| h'(s) ds &= -\int_{h(a')}^{h(b')} \|\alpha'(h(s))\| dh(s) \\ = -\int_{b}^{a} \|\alpha'(t)\| dt &= L(\alpha), \end{aligned}$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Αξίζει να παρατηρήσουμε εδώ ότι η α'' μας δείχνει πώς αλλάζει η α'. Η αλλαγή αυτή μπορεί να αφορά σε αλλαγή του μέτρου της α', ή σε αλλαγή της διεύθυνσης. Σταθεροποιώντας το μέτρο, παίρνουμε επιτάχυνση που δείχνει μόνο την αλλαγή της διεύθυνσης, άρα την καμπύλωση του χώρου $X = \alpha(I)$. Ετσι, ανάμεσα σε όλες τις καμπύλες που έχουν την *ίδια* εικόνα, αυτή που μας δίνει ευκολότερα τα ζητούμενα συμπεράσματα για την κοινή εικόνα είναι η καμπύλη που έχει ταχύτητα με σταθερό μέτρο, ίσο με 1.

Ισχύει το επόμενο βασικό

3.2.3 Θεώρημα. *Κάθε κανονική καμπύλη* $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ *δέχεται αναπαραμέτρηση* $\beta\colon J \to \mathbb{R}^3$ *με* $\|\beta'(s)\| = 1$, *για κάθε* $s \in J$.

Απόδειξη. Έστω $I := [a, b]$. Θεωρούμε την απεικόνιση (*μήκος τόξου*)

$$s\colon [a, b] \longrightarrow [0, L(\alpha)]\colon t \mapsto \int_a^t \|\alpha'(u)\| du.$$

Αυτή είναι γνησίως αύξουσα και διαφορίσιμη, με

$$s'(t) = \|\alpha'(t)\| = v(t) > 0, \tag{3.2.1}$$

άρα (βλ. Θεώρημα Αντίστροφης Απεικόνισης), έχει διαφορίσιμη αντίστροφη

$$h\colon [0, L(\alpha)] \longrightarrow [a, b]$$

της οποίας η παράγωγος δίνεται από την σχέση

$$h'(s) = 1/s'(h(s)), \quad \forall\ s \in [0, L(\alpha)]. \tag{3.2.2}$$

Θέτοντας $\beta := \alpha \circ h$, έχουμε ότι

$$\|\beta'(s)\| = \|\alpha'(h(s))\| \cdot |h'(s)| = \|\alpha'(h(s))\|/|s'(h(s))| = 1,$$

που αποδεικνύει τον ισχυρισμό. □

3.2.4 Ορισμός. Μια καμπύλη $\beta\colon J \to \mathbb{R}^3$ με $\|\beta'(s)\| = 1$, για κάθε $s \in J$, ονομάζεται ***καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας***. Αν α είναι μια τυχαία κανονική καμπύλη, λέμε ότι η αναπαραμέτρηση β που κατασκευάστηκε στο προηγούμενο θεώρημα, είναι η ***αναπαραμέτρηση μέσω (του) μήκους τόξου*** ή ότι έχει ***παράμετρο το μήκος τόξου***. Επίσης το μήκος τόξου λέγεται και ***φυσική παράμετρος***.

3.3 Καμπυλότητα και στρέψη - Τρίεδρο Frenet

Σκοπός μας είναι να ορίσουμε κάποια αριθμητικά μεγέθη που χαρακτηρίζουν γεωμετρικά το σύνολο $X = \alpha(I)$, όπου α είναι μια κανονική καμπύλη. Οπως σημειώσαμε και νωρίτερα, τα ζητούμενα συμπεράσματα για το X τα παίρνουμε ευκολότερα αν η καμπύλη έχει μοναδιαία ταχύτητα. Γι' αυτό, αν η αρχική α δεν έχει μοναδιαία ταχύτητα, θεωρούμε την αντίστοιχη αναπαραμέτρηση μέσω του μήκους τόξου.

Έστω λοιπόν $\beta(s),\ s \in J$, μια καμπύλη *μοναδιαίας ταχύτητας*. Θέτουμε

$$\boxed{T(s) := \beta'(s)} \qquad \forall\ s \in J. \tag{3.3.1}$$

Επομένως, το $T(s)$ είναι το ***εφαπτόμενο διάνυσμα*** ή ***διάνυσμα ταχύτητας*** της β στο σημείο $\beta(s)$. Εφ' όσον $\|T(s)\| = 1$, για κάθε $s \in J$, τα εφαπτόμενα διανύσματα $T(s)$ είναι στοιχεία της μοναδιαίας σφαίρας του $\mathbb{R}^3$.

Μεταβάλλοντας το s στο J παίρνουμε μία *διαφορίμη* συνάρτηση

$$T\colon J \ni s \longmapsto T(s) = \beta'(s) \in \mathbb{R}^3. \tag{3.3.1$'$}$$

Ισχύει το επόμενο

3.3.1 Λήμμα. *Αν $\beta(s),\ s \in J$, είναι καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας, τότε*

$$T' \perp T,$$

δηλαδή

$$T'(s) \perp T(s), \qquad \forall\ s \in J.$$

Απόδειξη. Το μήκος του διανύσματος $T(s)$ είναι σταθερό, άρα και η συνάρτηση $\|T(s)\|^2 = < T(s), T(s) >$ είναι σταθερή, δηλαδή έχει μηδενική παράγωγο:

$$< T, T >' (s) = 2 < T'(s), T(s) > = 0, \quad \forall\ s \in J,$$

απ' όπου προκύπτει το ζητούμενο. □

Επειδή το μήκος του $T(s) = \beta'(s)$ (ταχύτητα) είναι σταθερά 1, η παράγωγος $T'(s) = \beta''(s)$ (επιτάχυνση) δείχνει την αλλαγή της διεύθυνσης του διανύσματος $T(s)$.

Το μήκος του διανύσματος $T'(s)$ συμβολίζεται με

$$\boxed{k(s) := \|T'(s)\|} \tag{3.3.2}$$

και ονομάζεται ***καμπυλότητα*** της β στο $\beta(s)$. Η $k(s)$ είναι ένας μη αρνητικός πραγματικός αριθμός. Αν $k(s) = 0$, λέμε ότι το σημείο s είναι ***ιδιάζον σημείο τάξης 1***. Προφανώς ορίζεται και η διαφορίσιμη συνάρτηση (καμπυλότητας)

$$k\colon J \ni s \longmapsto k(s) \in [0, \infty). \tag{3.3.2$'$}$$

Όπως θα δούμε στο Θεώρημα 3.3.4, η καμπυλότητα μετράει το κατά πόσον η καμπύλη διαφέρει από την ευθεία.

Για τα επόμενα χρειάζεται η β να μην έχει ιδιάζοντα σημεία τάξης 1, άρα έχει παντού μη μηδενική καμπυλότητα. Για $k(s) \neq 0$, το αντίστροφο της καμπυλότητας, δηλαδή ο αριθμός

$$\rho(s) := \frac{1}{k(s)} \tag{3.3.3}$$

καλείται ***ακτίνα καμπυλότητας***. Μέσω της τελευταίας, για κάθε $s \in J$, ορίζουμε το διάνυσμα

$$\boxed{N(s) := \frac{1}{k(s)} T'(s)} \tag{3.3.4}$$

που ονομάζεται ***πρώτο κάθετο*** ή ***πρωτεύον κάθετο διάνυσμα*** (normal vector) της β στο $\beta(s)$. Το διάνυσμα αυτό είναι μοναδιαίο και (σύμφωνα με το Λήμμα 3.3.1) κάθετο στο εφαπτόμενο διάνυσμα. Ορίζεται επίσης και η αντίστοιχη διαφορίσιμη απεικόνιση

$$N\colon J \ni s \longmapsto N(s) \in \mathbb{R}^3. \tag{3.3.4$'$}$$

Τέλος, για κάθε $s \in J$, ορίζουμε και το διάνυσμα

$$\boxed{B(s) := T(s) \times N(s)} \tag{3.3.5}$$

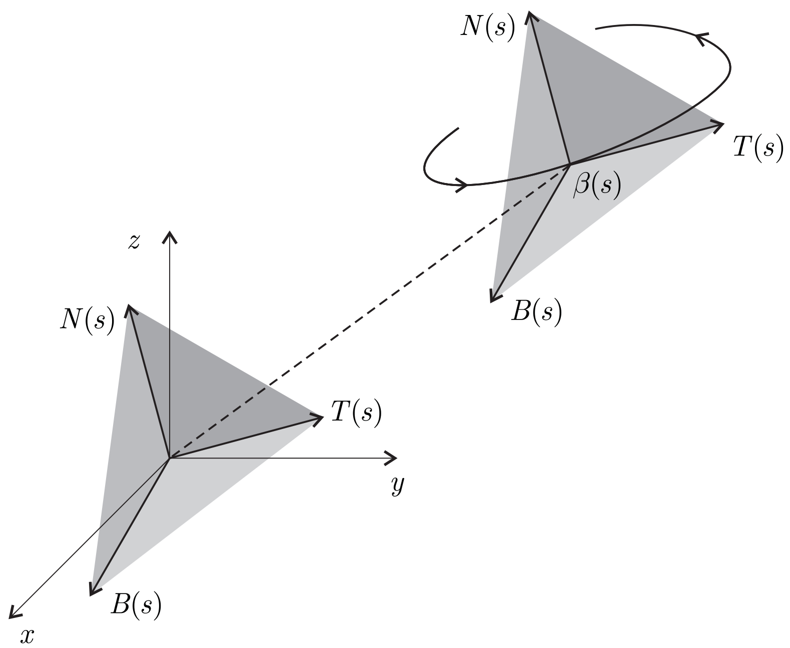
και την αντίστοιχη διαφορίσιμη απεικόνιση

$$B\colon J \ni s \longmapsto B(s) \in \mathbb{R}^3. \tag{3.3.5$'$}$$

Το $B(s)$ καλείται ***δεύτερο κάθετο διάνυσμα*** (binormal vector) της β στο $\beta(s)$. Προφανώς είναι κάθετο στα $T(s)$, $N(s)$ και μοναδιαίο.

Από τα προηγούμενα συνάγεται ότι, γιά κάθε $s \in J$, η τριάδα

$$\{T(s), N(s), B(s)\}$$



Σχημα 3.3

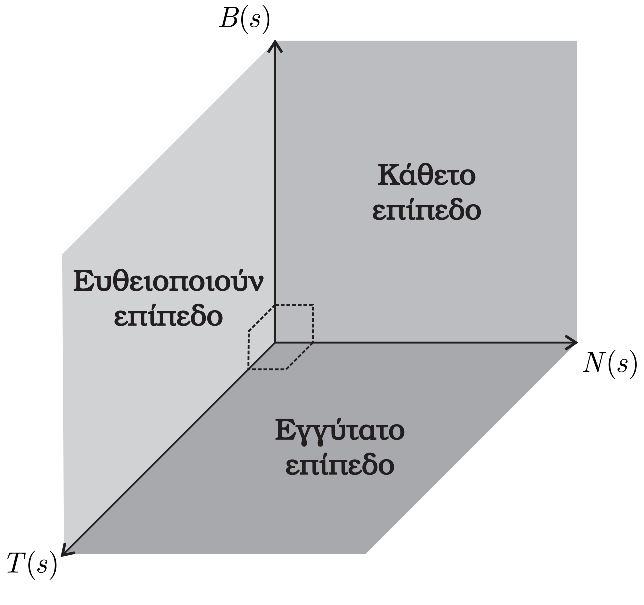
αποτελεί ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$, που ονομάζεται ***συνοδεύον τρίεδρο*** (moving frame) ή ***τρίεδρο Frenet*** (Frenet frame) ***στο σημείο*** $\beta(s)$ ***της*** β. Αντιστοίχως, η τριάδα των συναρτήσεων

$$\{T, N, B\}$$

καλείται ***συνοδεύον τρίεδρο*** ή ***τρίεδρο Frenet κατά μήκος της*** β.

Πολλές φορές, για διευκόλυνση αλλά και για την παραστατικότερη απεικόνιση των πραγμάτων, θεωρούμε ότι τα τρία προηγούμενα διανύσματα έχουν μεταφερθεί παραλλήλως κατά το διάνυσμα $\beta(s)$, οπότε έχουν ως αρχήν το σημείο $\beta(s)$ της καμπύλης. Έτσι σχηματίζεται η εικόνα ενός τριέδρου, που συνοδεύει τα σημεία της καμπύλης. Αυτό δικαιολογεί και την παραπάνω ορολογία. Σχετικώς παραθέτουμε το Σχήμα 3.3.

Μέσω των παραπάνω βασικών διανυσμάτων, ορίζουμε τρία χαρακτηριστικά επίπεδα, που επίσης συνοδεύουν την καμπύλη. Ακριβέστερα, για κάθε σημείο $s \in J$, τα κάθετα μεταξύ τους διανύσματα $T(s)$ και $N(s)$ ορίζουν ένα επίπεδο E. Το (μοναδικό) επίπεδο που περνά από το σημείο $\beta(s)$ και είναι *παράλληλο* προς το E (άρα και προς τα διάνύσματα $T(s)$, $N(s)$) ονομάζεται ***εγγύτατο επίπεδο*** (osculating plane) της β στο $\beta(s)$. Το επίπεδο, που διέρχεται από το $\beta(s)$ και είναι παράλληλο προς το επίπεδο των $N(s)$ και $B(s)$ καλείται ***κάθετο επίπεδο*** (normal plane) της β στο σημείο $\beta(s)$, ενώ το επίπεδο που διέρχεται από το $\beta(s)$ και είναι παράλληλο προς το επίπεδο των $T(s)$ και $B(s)$ καλείται ***ευθειοποιούν επίπεδο*** (rectifying plane) της β στο σημείο $\beta(s)$.



Σχημα 3.4

Προφανώς, το εγγύτατο επίπεδο (στο $\beta(s)$) είναι κάθετο στο διάνυσμα $B(s)$, το κάθετο επίπεδο είναι κάθετο στο $T(s)$ και το ευθειοποιούν επίπεδο είναι κάθετο στο $N(s)$. Οι τελευταίες ιδιότητες χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό των αντιστοίχων εξισώσεων των επιπέδων αυτών, όπως εξηγούμε στις ασκήσεις του παρόντος κεφαλαίου.

Στα Σχήματα 3.3 και 3.4 απεικονίζονται τα προηγούμενα επίπεδα. Σημειώνουμε ότι και στα δύο έχουμε μεταθέσει τα διανύσματα $\{T(s), N(s), B(s)\}$ στο σημείο $\beta(s)$, οπότε το εγγύτατο επίπεδο ταυτίζεται με το επίπεδο των $T(s)$, $N(s)$) κ.ο.κ.

Στη συνέχεια θα ορίσουμε και ένα άλλο βασικό, για την μελέτη μιας καμπύλης, μέγεθος. Επειδή $< N(s), B(s) > = 0$, για κάθε $s \in J$, παραγωγίζοντας τη συνάρτηση $< N, B > = 0$ [βλ. και τις ανάλογες σχέσεις (3.1.6), (3.1.8)] βρίσκουμε ότι

$$< N'(s), B(s) > + < N(s), B'(s) > = 0.$$

Τον πραγματικό αριθμό

$$\boxed{\tau(s) := - < N(s), B'(s) > = < N'(s), B(s) >} \tag{3.3.6}$$

ονομάζουμε ***στρέψη*** (torsion) της καμπύλης β στο σημείο $\beta(s)$. Προφανώς ορίζεται και η διαφορίσιμη συνάρτηση

$$\tau \colon J \ni s \longmapsto \tau(s) \in \mathbb{R}. \tag{3.3.6$'$}$$

Από την (3.3.6) προκύπτει ότι η στρέψη, αφού περιέχει την παράγωγο $B'(s)$, μετρά κατά κάποιον τρόπο την μεταβολή του δευτέρου καθέτου διανύσματος, άρα και τη μεταβολή του εγγυτάτου επιπέδου. Η μεταβολή του τελευταίου ουσιαστικά καθορίζει τη θέση της καμπύλης στο χώρο, δηλαδή το κατά πόσον η καμπύλη απομακρίνεται από το επίπεδο, άρα διαφέρει από μια επίπεδη καμπύλη. Την ακριβή σημασία της στρέψης (όπως και της καμπυλότητας) θα δούμε στο Θεώρημα 3.3.5.

Πριν συνδέσουμε τα διανύσματα του τριέδρου Frenet και τις παραγώγους τους με την καμπυλότητα και την στρέψη, αποδεικνύουμε το επόμενο βοηθητικό συμπέρασμα.

3.3.2 Λήμμα. *Αν $u, v \in \mathbb{R}^3$ με $\|u\| = 1$ και $u \perp v$, τοτε*

$$(u \times v) \times u = v.$$

Απόδειξη. Έστω $u = (a, b, c)$ και $v = (x, y, z)$. Τότε

$$\begin{aligned} u \times v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} &= (bz - cy)e_1 - (az - cx)e_2 + (ay - bx)e_3 \\ &= (bz - cy, cx - az, ay - bx). \end{aligned}$$

Επομένως,

$$
\begin{aligned}
(u \times v) \times u &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ bz - cy & cx - az & ay - bx \\ a & b & c \end{vmatrix} \\
&= [c(cx - az) - b(ay - bx)]e_1 - [c(bz - cy) - a(ay - bx)]e_2 + \\
&\qquad + [b(bz - cy) - a(cx - az)] \\
&= (c^2 x - acz - aby + b^2 x)e_1 - (cbz - c^2 y - a^2 y + abx)e_2 + \\
&\qquad + (b^2 z - bcy - acx + a^2 z)e_3 = \\
&= ((1 - a^2)x - acz - aby,\ (1 - b^2)y - abx - cbz, \\
&\qquad (1 - c^2)z - bcy - acx) \\
&= (x - a(ax + by + cz),\ y - b(ax + by + cz), \\
&\qquad z - c(ax + by + cz)) \\
&= (x - a < u, v >,\ y - b < u, v >,\ z - c < u, v >) \\
&= (x, y, z) = v,
\end{aligned}
$$

που είναι η ζητούμενη ισότητα. □

3.3.3 Πόρισμα. *Ισχύουν οι σχέσεις:*

$$
\begin{aligned}
T(s) \times N(s) &= B(s), \\
N(s) \times B(s) &= T(s), \\
B(s) \times T(s) &= N(s).
\end{aligned}
$$

Απόδειξη. Η πρώτη σχέση είναι ακριβώς η (3.3.5), δηλαδή ο ορισμός του $B(s)$. Για την τρίτη παρατηρούμε ότι το Λήμμα 3.3.2 συνεπάγεται ότι

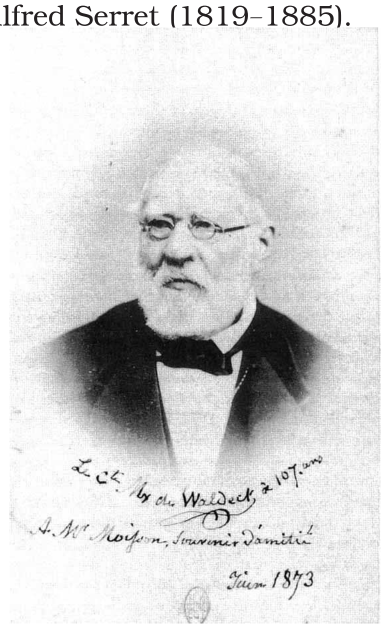
$$B(s) \times T(S) = (T(s) \times N(s)) \times T(s) = N(s).$$

Παρόμοια, για την δεύτερη σχέση εχουμε:

$$
\begin{aligned}
&N(s) \times B(s) = N(s) \times (T(S) \times N(s)) = \\
&= -(T(S) \times N(s)) \times N(s) = (N(S) \times T(s)) \times N(s) = T(s).
\end{aligned}
$$
□

Ερχόμαστε τώρα στην απόδειξη των τύπων (εξισώσεων) Frenet-Serret, οι οποίοι εκφράζουν τις παραγώγους $T'(s), N'(s), B'(s)$ ως γραμμικούς συνδυασμούς των βασικών διανυσμάτων του τριέδρου Frenet, με συντελεστές την καμπυλότητα και τη στρέψη. Αποδείχτηκαν (ανεξαρτητα) από τους Jean Frédéric Frenet (1816–1900) και

Joseph Alfred Serret (1819–1885).



Εικονα 15. F. Frenet και J. Serret

3.3.4 Θεώρημα. *Έστω $\beta\colon J \to \mathbb{R}^3$ μια καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας, με $k > 0$ και $\{T, N, B\}$ το αντίστοιχο τρίεδρο του Frenet κατά μήκος της β. Τότε ισχύουν οι σχέσεις (τύποι **Frenet-Serret**):*

(F. 1) $\qquad T' = kN$

(F. 2) $\qquad N' = -kT + \tau B$

(F. 3) $\qquad B' = -\tau N.$

Απόδειξη. Η (F. 1) προκύπτει από τον ορισμό του $N(s)$ [βλ. σχέση (3.3.4)].

Για την (F. 2) προχωρούμε ως εξής: Επειδή, για κάθε $s \in J$, τα διανύσματα $T(s), N(s)$ και $B(s)$ αποτελούν ορθοκανονική βάση, υπάρχουν μονοσήμαντα ορισμένες συναρτήσεις $a, b, c\colon J \to \mathbb{R}$, έτσι ώστε

$$N'(s) = a(s)T(s) + b(s)N(s) + c(s)B(s), \quad \forall\ s \in J. \tag{3.3.7}$$

Για να προσδιορίσουμε τις συναρτήσεις a, b, c θα σχηματίσουμε το εσωτερικό γινόμενο της (3.3.7) διαδοχικά με τα διανύσματα $T(s), N(s), B(s)$. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε ότι

$$\begin{aligned} < N'(s), T(s) > &= a(s) < T(s), T(s) > + \, b(s) < N(s), T(s) > \\ &\quad + \, c(s) < B(s), T(s) > \\ &= a(s)1 + b(s)0 + c(s)0 = a(s). \end{aligned}$$

Απ' το άλλο μέρος, η παραγώγιση της σχέσης $< T, N > = 0$ δίνει ότι

$$< T, N >' = < T', N > + < T, N' > = 0,$$

άρα, μαζί με την (F. 1),

$$< T, N' > = - < T', N > = - < kN, N > = -k \cdot 1 = -k.$$

Επομένως καταλήγουμε στη σχέση

$$a(s) = -k(s),$$

οπότε η (3.3.7) παίρνει την μορφή

$$N'(s) = -k(s)T(s) + b(s)N(s) + c(s)B(s), \quad \forall\ s \in J. \tag{3.3.8}$$

Πολλαπλασιάζοντας την τελευταία "εσωτερικά" με $N(s)$ έχουμε

$$\begin{aligned} < N'(s), N(s) > &= -k(s) < T(s), N(s) > + b(s) < N(s), N(s) > \\ &\quad + c(s) < B(s), N(s) > \\ &= -k(s)0 + b(s)1 + c(s)0 = b(s). \end{aligned}$$

Η σχέση $< N, N > = 1$ οδηγεί στην

$$< N, N >' = 2 < N, N' > = 0,$$

άρα

$$b(s) = 0,$$

μέσω της οποίας η (3.3.8) μετασχηματίζεται στην

$$N'(s) = -k(s)T(s) + 0N(s) + c(s)B(s), \quad \forall\ s \in J. \tag{3.3.9}$$

Τέλος, από την προηγούμενη σχέση έχουμε ότι

$$\begin{aligned} < N'(s), B(s) > &= -k(s) < T(s), B(s) > + 0 < N(s), B(s) > \\ &\quad + c(s) < B(s), B(s) > \\ &= -k(s)0 + 0 + c(s)1 = c(s). \end{aligned}$$

Αλλά η $< B, N > = 0$ δίνει ότι

$$< B, N >' = < B', N > + < B, N' > = 0,$$

άρα, σύμφωνα με την (3.3.6),

$$< B(s), N'(s) > = - < B'(s), N(s) > = \tau(s),$$

οπότε

$$c(s) = \tau(s),$$

και η (3.3.9) μετασχηματίζεται στην

$$N'(s) = -k(s)T(s) + \tau(s)B(s); \qquad \forall\ s \in J,$$

δηλαδή καταλήγουμε στην (F. 2).

Για την (F. 3) αρκεί να παραγωγίσουμε την $B = T \times N$, λαμβάνοντας υπόψιν τις (F. 1), (F. 2) και τις σχέσεις του Πορίσματος 3.3.3. Πράγματι,

$$\begin{aligned} B' &= T' \times N \ + \ T \times N' \\ &= kN \times N \ + \ T \times (-kT + \tau B) \\ &= k \cdot 0 \ + \ (-kT \times T \ + \ \tau T \times B) \\ &= -k \cdot 0 + \tau T \times B \\ &= -\tau N. \end{aligned}$$ □

Οι τύποι Frenet-Serret συνοψίζονται και στην επόμενη μορφή:

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}. \tag{3.3.10}$$

Απο εδώ φαίνεται και ο μνημονοτεχνικός κανόνας, μέσω του οποίου βρίσκουμε αμέσως τους συντελεστές των (F. 1) – (F. 3): εμφανίζονται μόνον η καμπυλότητα και η στρέψη (κατά σειράν), στην 2η γραμμή και την 2η στήλη, με την σημειούμενη εναλλαγή προσήμων.

Το επόμενα αποτελέσματα διαφωτίζουν το ρόλο της καμπυλότητας και της στρέψης μιας καμπύλης.

3.3.5 Θεώρημα. *Έστω $\beta\colon J \to \mathbb{R}^3$ μια καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας. Τότε ισχύουν οι επόμενοι χαρακτηρισμοί:*

(i) $k = 0$ εάν και μόνον εάν η β είναι ευθεία.

(ii) Αν $k > 0$, τότε $\tau = 0$ εάν και μόνον εάν η β είναι επίπεδη.

Απόδειξη. (i) $k = 0 \Leftrightarrow T' = \beta'' = 0 \Leftrightarrow \beta'(s) = \mathfrak{I} \Leftrightarrow \beta(s) = \mathfrak{I}s + \mu$ [βλ. και Παράδειγμα 3.1.2 (1)]. Προφανώς, για να είναι η καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας, θα πρέπει $\|\mathfrak{I}\| = 1$.

(ii) Από τις σχέσεις $B' = -\tau N$ και $\tau = -< N, B' >$ συνάγεται ότι $\tau = 0$ εάν και μόνον εάν $B' = 0$, που με τη σειρά του ισοδυναμεί με το ότι η απεικόνιση $B = T \times N$ είναι σταθερή, δηλαδή για ένα $s_o \in J$,

$$B(s) = B(s_o), \qquad \forall\ s \in J.$$

Ετσι έχουμε

$$\begin{aligned} \tau = 0 \ &\Rightarrow\ B(s) = B(s_o) \quad \forall\ s \in J \\ &\Rightarrow\ T(s) \perp B(s_o), \quad \forall\ s \in J \\ &\Rightarrow\ < T(s), B(s_o) > = < \beta'(s), B(s_o) > = 0, \quad \forall\ s \in J \\ &\Rightarrow\ < \beta(s), B(s_o) >' = 0, \quad \forall\ s \in J \\ &\Rightarrow\ < \beta(s), B(s_o) > = \text{σταθερό}, \quad \forall\ s \in J \\ &\Rightarrow\ < \beta(s), B(s_o) > = < \beta(s_o), B(s_o) >, \quad \forall\ s \in J \\ &\Rightarrow\ < \beta(s) - \beta(s_o), B(s_o) > = 0, \quad \forall\ s \in J \\ &\Rightarrow\ \beta(s) - \beta(s_o) \perp B(s_o), \quad \forall\ s \in J. \end{aligned}$$

Η τελευταία σχέση σημαίνει ότι $\beta(s) - \beta(s_o)$ ανήκει στο επίπεδο E_o των $T(s_o)$ και $N(s_o)$, δηλαδή το $\beta(s)$ ανήκει στο εγγύτατο επίπεδο $E_o + \beta(s_o)$, για κάθε $s \in J$.

Αντιστρόφως, έστω ότι $\beta(s) \in E$, για κάποιο επίπεδο E, και έστω E_o το επίπεδο (υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$, διάστασης 2) που είναι παράλληλο με το E και περιέχει το 0. Τότε,

$$E = \beta(s) + E_o, \qquad \forall\ s \in J.$$

Σταθεροποιώντας ένα $s_o \in J$, παίρνουμε ότι

$$\beta(s) \in \beta(s_o) + E_o, \qquad \forall\ s \in J.$$

Αν το E_o παράγεται από μία ορθοκανονική βάση $\{u, v\}$, τότε

$$\beta(s) = \beta(s_o) + \lambda(s)u + \mu(s)v; \qquad \forall\ s \in J, \tag{3.3.11}$$

όπου $\lambda, \mu \colon J \to \mathbb{R}$ είναι *διαφορίσιμες* συναρτήσεις. Πραγματικά, η διαφορισιμότητα της λ ελέγχεται ως εξής: Από την (3.3.11) έχουμε ότι

$$\beta(s) - \beta(s_o) = \lambda(s)u + \mu(s)v; \qquad \forall\ s \in J,$$

οπότε, παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο και των δύο μελών της τελευταίας με το u βρίσκουμε την

$$\begin{aligned} < \beta(s) - \beta(s_o), u > &= < \lambda(s)u, u > + < \mu(s)v, u > \\ &= \lambda(s)1 + \mu(s)0 = \lambda(s), \end{aligned}$$

δηλαδή $\lambda = < \beta - \beta(s_o), u >$, που αποδεικνύει τον ισχυρισμό. Παρόμοια αποδεικνύεται και η διαφορισιμότητα της μ.

Παραγωγίζοντας τώρα την σχέση (3.3.11) έχουμε ότι

$$T(s) = \beta'(s) = \lambda'(s)u + \mu'(s)v \in E_o; \qquad \forall\ s \in J,$$

η παραγώγιση επίσης της οποίας οδηγεί στην

$$N(s) = \frac{1}{k(s)}T'(s) = \frac{1}{k(s)}(\lambda''(s)u + \mu''(s)v) \in E_o, \qquad \forall\ s \in J.$$

Άρα, το επίπεδο των $T(s)$ και $N(s)$ είναι σταθερά το E_o και το διάνυσμα $B(s)$ είναι σταθερά το ένα από τα δύο μοναδιαία διανύσματα που είναι κάθετα στο E_o. Επομένως, λόγω της σταθερότητας του $B(s)$ και της (3.3.6), προκύπτει ότι $\tau = 0$. □

3.3.6 Θεώρημα. *Έστω $\beta \colon J \to \mathbb{R}^3$ μια επίπεδη καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας. Τότε η β είναι τμήμα κύκλου εάν και μόνον εάν έχει σταθερή καμπυλότητα $k > 0$.*

Απόδειξη. Αν η β είναι τμήμα κύκλου κέντρου (x_o, y_o) και ακτίνας r, τότε δίνεται από τον τύπο

$$\beta(s) = r(\cos\frac{s}{r}, \sin\frac{s}{r}) + (x_o, y_o); \qquad s \in J \subseteq [0, 2\pi],$$

απ᾽ όπου παίρνουμε τις σχέσεις

$$T(s) = \beta'(s) = \Big(-\sin\frac{s}{r}, \cos\frac{s}{r}\Big),$$
$$T'(s) = \beta''(s) = \frac{1}{r}\Big(-\cos\frac{s}{r}, -\sin\frac{s}{r}\Big)$$

και

$$k(s) = \|T'(s)\| = \frac{1}{r}\cdot$$

Αντιστρόφως, έστω ότι η β έχει σταθερή καμπυλότητα $k > 0$ και μηδενική στρέψη. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\gamma(s) := \beta(s) + \frac{1}{k}N(s).$$

Η γ είναι προφανώς διαφορίσιμη και

$$\begin{aligned}\gamma'(s) &= \beta'(s) + \frac{1}{k}N'(s)\\ &= T(s) + \frac{1}{k}(-kT(s) + \tau B(s))\\ &= T(s) - T(s) + 0 = 0,\end{aligned}$$

δηλαδή η γ είναι σταθερή. Αν $\alpha := \gamma(s) \in \mathbb{R}^3$ είναι η σταθερή τιμή της γ, τότε

$$\|\beta(s) - \alpha\| = \frac{1}{k}\|N(s)\| = \frac{1}{k} = r,$$

δηλ. τα σημεία $\beta(s)$ ανήκουν στην σφαίρα με κέντρο α και ακτίνα r. Επειδή η β είναι επίπεδη, ολοκληρώνεται η απόδειξη. □

3.3.7 Παρατηρήσεις. 1) Από την προηγούμενη απόδειξη φαίνεται ότι η ακτίνα του κύκλου είναι ακριβώς η ακτίνα καμπυλότητας της β [βλ. σχέση (3.3.3)], ενώ το κέντρο είναι το σημείο $\beta(s) + \frac{1}{k}N(s)$.

2) Από τα Θεωρηματα 3.3.5 και 3.3.6 συνάγεται ότι η καμπυλότητα μετρά το πόσο αποκλίνει η καμπύλη από το να είναι ευθεία, ενώ η στρέψη μετρά την απόκλιση από το να είναι η καμπύλη επίπεδη.

3.4 Καμπυλότητα και στρέψη τυχαίας καμπύλης

Το τρίεδρο Frenet, η καμπυλότητα και η στρέψη μιας καμπύλης β ορίστηκαν προηγουμένως με την προϋπόθεση ότι η β είναι καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας. Αν $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ είναι μια τυχαία κανονική καμπύλη, δημιουργείται το εύλογο ερώτημα πώς μπορούμε να εκφράσουμε τα προηγούμενα στοιχεία της καμπύλης χωρίς αναπαραμέτρηση με το μήκος τόξου. Αυτό είναι απαραίτητο, π.χ. στην περίπτωση που, ενώ κατά το Θεώρημα 3.2.3 υπάρχει πάντοτε τέτοια αναπαραμέτρηση, εντούτοις οι υπολογισμοί μας καταλήγουν σε μη υπολογίσιμο ολοκλήρωμα.

Σύμφωνα με όσα είπαμε στην προηγούμενη παράγραφο, τα παραπάνω στοιχεία αναφέρονται σε ιδιότητες του συνόλου $X = \alpha(I)$ και όχι της παραμέτρησης (απεικόνισης) α. Επομένως, ο επόμενος ορισμός είναι εντελώς φυσιολογικός.

3.4.1 Ορισμός. Έστω α μια τυχαία κανονική καμπύλη και $\bar{\alpha}$ η παραμέτρησή της μέσω του μήκους τόξου (βλ. Θεώρημα 3.2.3). Αν $\{\bar{T}, \bar{N}, \bar{B}\}$, $\bar{k}$, $\bar{\tau}$ είναι το τρίεδρο Frenet, η καμπυλότητα και η στρέψη της $\bar{\alpha}$, τότε ορίζουμε τα αντίστοιχα μεγέθη T, N, B, k, τ της α μέσω των τύπων

(i) $$T(t) := \bar{T}(s(t)),$$

(ii) $$N(t) := \bar{N}(s(t)),$$

(iii) $$B(t) := \bar{B}(s(t)),$$

(iv) $$k(t) := \bar{k}(s(t)),$$

(v) $$\tau(t) := \bar{\tau}(s(t)).$$

3.4.2 Θεώρημα. *Αν $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ είναι μια (τυχαία) κανονική καμπύλη, τότε*

$$\boxed{k = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}.}$$

Απόδειξη. Έστω α μια κανονική καμπύλη και $\bar{\alpha} = \alpha \circ h$ η αναπαραμέτρησή της μέσω του μήκους τόξου, όπου $h = s^{-1}$ και s το μήκος τόξου. Τότε $\alpha = \bar{\alpha} \circ s$, οπότε, για κάθε $t \in I$, έχουμε τις σχέσεις

$$\alpha'(t) = (\bar{\alpha} \circ s)'(t) = s'(t)\bar{\alpha}'(s(t)) = s'(t)\bar{T}(s(t)), \tag{3.4.1}$$

$$\begin{aligned} \alpha''(t) &= s''(t)\bar{T}(s(t)) + s'(t)^2(\bar{T}'(s(t)) \\ &= s''(t)\bar{T}(s(t)) + s'(t)^2\bar{k}(s(t))\bar{N}(s(t)) \end{aligned} \tag{3.4.2}$$

οπότε

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = s'(t)\bar{T}(s(t)) \times [s''(t)\bar{T}(s(t)) + s'(t)^2\bar{k}(s(t))\bar{N}(s(t))],$$

ή, βάσει των ιδιοτήτων του εξωτερικού γινομένου,

$$\begin{aligned} \alpha'(t) \times \alpha''(t) &= s'(t)s''(t)[\bar{T}(s(t)) \times \bar{T}(s(t))] + \\ &\quad + s'(t)^3\bar{k}(s(t))[\bar{T}(s(t)) \times \bar{N}(s(t))] \\ &= 0 + s'(t)^3\bar{k}(s(t))\bar{B}(s(t)) \\ &= \|\alpha'(t)\|^3\bar{k}(s(t))\bar{B}(s(t)). \end{aligned} \tag{3.4.3}$$

Άρα

$$\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\| = \|\alpha'(t)\|^3\bar{k}(s(t)),$$

απ' όπου προκύπτει η

$$k(t) := \bar{k}(s(t)) = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3},$$

δηλαδή η ζητούμενη σχέση. □

3.4.3 Θεώρημα. *Αν η α είναι μια κανονική καμπύλη με $k > 0$, τότε*

$$\boxed{\tau = \frac{< \alpha' \times \alpha'', \alpha''' >}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2} = \frac{[\alpha' \alpha'' \alpha''']}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}.}$$

Απόδειξη. Οπως προηγουμένως, θεωρούμε την αναπαραμέτρηση $\overline{\alpha}$ της α μέσω του μήκους τόξου. Από την σχέση (3.4.2) βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned}
\alpha'''(t) &= s'''(t)\overline{T}(s(t)) + s'(t)s''(t)\overline{T}'(s(t)) + \\
&\qquad +[s'(t)^2\overline{k}(s(t))]'\overline{N}(s(t)) + s'(t)^3\overline{k}(s(t))\overline{N}'(s(t)) \\
&= s'''(t)\overline{T}(s(t)) + s'(t)s''(t)\overline{k}(s(t))\overline{N}(s(t)) + \\
&\qquad +[s'(t)^2\overline{k}(s(t))]'\overline{N}(s(t)) - s'(t)^3\overline{k}(s(t))^2\overline{T}(s(t)) + \\
&\qquad +s'(t)^3\overline{k}(s(t))\overline{\tau}(s(t))\overline{B}(s(t)) \\
&= X(t)\overline{T}(s(t)) + Y(t)\overline{N}(s(t)) + Z(t)\overline{B}(s(t)),
\end{aligned}$$

όπου θέσαμε

$$\begin{aligned}
X(t) &= s'''(t) - s'(t)^3\overline{k}(s(t))^2, \\
Y(t) &= s'(t)s''(t)\overline{k}(s(t)) + [s'(t)^2\overline{k}(s(t))]', \\
Z(t) &= s'(t)^3\overline{k}(s(t))\overline{\tau}(s(t)).
\end{aligned}$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν την (3.4.3) και ότι το $\overline{B}(s(t))$ είναι κάθετο προς τα $\overline{T}(s(t))$ και $\overline{N}(s(t))$, έχουμε:

$$\begin{aligned}
< \alpha'(t) \times \alpha''(t), \alpha'''(t) > &= s'(t)^3\overline{k}(s(t)) < \overline{B}(s(t)), \alpha'''(t) > \\
&= s'(t)^3\overline{k}(s(t))X(t) < \overline{B}(s(t)), \overline{T}(s(t)) > + \\
&\qquad + s'(t)^3\overline{k}(s(t))Y(t) < \overline{B}(s(t)), \overline{N}(s(t)) > + \\
&\qquad + s'(t)^3\overline{k}(s(t))Z(t) < \overline{B}(s(t)), \overline{B}(s(t)) > \\
&= 0 + 0 + s'(t)^6\overline{k}(s(t))^2\overline{\tau}(s(t)) \\
&= \|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2\overline{\tau}(s(t)),
\end{aligned}$$

απ' όπου παίρνουμε την

$$\tau(t) := \overline{\tau}(s(t)) = \frac{< \alpha'(t) \times \alpha''(t), \alpha'''(t) >}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2},$$

με την οποίαν ολοκληρώνεται η απόδειξη. □

3.5 Το τρίεδρο Frenet μιας τυχαίας καμπύλης

Θα υπολογίσουμε τώρα τα διανύσματα $T(t)$, $N(t)$ και $B(t)$ (βλ. Ορισμό 3.4.1), για μία τυχαία κανονική καμπύλη α, με μη μηδενική καμπυλότητα.

3.5.1 Θεώρημα. *Έστω $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ μια κανονική καμπύλη, όχι κατ' ανάγκη μοναδιαίας ταχύτητας, με μη μηδενική καμπυλότητα, και $\{T(t), N(t), B(t)\}$ το αντίστοιχο τρίεδρο Frenet. Τότε*

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}, \tag{3.5.1}$$

$$N(t) = \frac{(\alpha'(t) \times \alpha''(t)) \times \alpha'(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\| \cdot \|\alpha'(t)\|}, \tag{3.5.2}$$

$$B(t) = \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}. \tag{3.5.3}$$

Απόδειξη. Έστω $\bar{\alpha} = \alpha \circ h$ η αντίστοιχη καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας (βλ. Θεώρημα 3.2.2), όπου $h = s^{-1}$ και s το μήκος τόξου. Τότε

$$\begin{aligned} T(t) &= \bar{T}(s(t)) = \bar{\alpha}'(s(t)) = (\alpha \circ h)'(s(t)) \\ &= \alpha'(h(s(t)))h'(s(t)) = \alpha'(t) \cdot \frac{1}{s'(t)} \\ \text{[βλ. σχέση (3.2.1)]} \quad &= \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}. \end{aligned}$$

Ανάλογα, από την σχέση $T = \bar{T} \circ s$, παίρνουμε την $\bar{T} = T \circ h$, επομένως

$$\begin{aligned} N(t) &= \bar{N}(s(t)) = \frac{\bar{T}'(s(t))}{\bar{k}(s(t))} = \frac{(T \circ h)'(s(t))}{k(t)} \\ &= \frac{T'(h(s(t)))h'(s(t))}{k(t)} = \frac{T'(t)}{k(t)s'(t)} \\ \text{[Θεώρημα 3.4.2]} \quad &= \frac{T'(t)}{s'(t)} \cdot \frac{\|\alpha'(t)\|^3}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|} \\ &= T'(t)\frac{\|\alpha'(t)\|^2}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}. \end{aligned}$$

Από την παραπάνω ισότητα, έχουμε ότι $T'(t)$ και $N(t)$ είναι συγγραμμικά. Επειδή $T(t) \perp N(t)$, είναι και $T(t) \perp T'(t)$. Επίσης προφανώς $\|T(t)\| = 1$. Άρα, εφαρμόζοντας το Λήμμα 3.3.2 για $u = T(t)$ και $v = T'(t)$, παίρνουμε

$$T'(t) = (T(t) \times T'(t)) \times T(t).$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $T(t) = \dfrac{\alpha'(t)}{s'(t)}$ [βλ. σχέση (3.5.1)] και

$$T'(t) = \frac{\alpha''(t)s'(t) - \alpha'(t)s''(t)}{s'(t)^2},$$

βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} T'(t) &= \left(\frac{a'(t)}{s'(t)} \times \frac{a''(t)s'(t) - a'(t)s''(t)}{s'(t)^2}\right) \times \frac{a'(t)}{s'(t)} \\ &= \frac{1}{s'(t)^4}[(a'(t) \times a''(t)s'(t) - a'(t) \times a'(t)s''(t)] \times a'(t) \\ &= \frac{1}{s'(t)^3}[(a'(t) \times a''(t)) \times a'(t)], \end{aligned}$$

απ' όπου προκύπτει η

$$N(t) = \frac{(a'(t) \times a''(t)) \times a'(t)}{\|a'(t) \times a''(t)\| \cdot \|a'(t)\|}\,.$$

Τέλος,

$$\begin{aligned} B(t) &= \bar{B}(s(t)) = \bar{T}(s(t)) \times \bar{N}(s(t)) = T(t) \times N(t) \\ &= \frac{a'(t)}{\|a'(t)\|} \times \frac{(a'(t) \times a''(t)) \times a'(t)}{\|a'(t)\| \cdot \|a'(t) \times a''(t)\|} \\ &= \frac{a'(t)}{\|a'(t)\|} \times \left(\frac{a'(t) \times a''(t)}{\|a'(t) \times a''(t)\|} \times \frac{a'(t)}{\|a'(t)\|}\right) \\ &= \frac{a'(t) \times a''(t)}{\|a'(t) \times a''(t)\|}\,, \end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ισότητα, έχει πάλι χρησιμοποιηθεί το Λήμμα 3.3.2, για $u = \dfrac{a'(t)}{\|a'(t)\|}$ και $v = \dfrac{a'(t) \times a''(t)}{\|a'(t) \times a''(t)\|}$. □

3.5.2 Θεώρημα. *Έστω $a\colon I \to \mathbb{R}^3$ μια κανονική καμπύλη, όχι κατ' ανάγκη μοναδιαίας ταχύτητας, με μη μηδενική καμπυλότητα, και $\{T, N, B\}$ το αντίστοιχο τρίεδρο Frenet (κατά μήκος της a). Τότε ισχύουν οι **(γενικευμένοι) τύποι Frenet-Serret**:*

(F′. 1) $\qquad T' = kvN,$

(F′. 2) $\qquad N' = -kvT + \tau vB,$

(F′. 3) $\qquad B' = -\tau vN,$

όπου $v(t) := \|a'(t)\|$ το μέτρο της ταχύτητας της a στο $t \in I$.

Απόδειξη. Θεωρούμε την αναπαραμέτρηση $\bar{a}\colon J \to \mathbb{R}^3$ της a μέσω του μήκους τόξου και το τρίεδρο Frenet $\{\bar{T}, \bar{N}, \bar{B}\}$ κατά μήκος της $\bar{a}$. Για κάθε $t \in I$, είναι

$$\begin{aligned} T'(t) &= (\bar{T} \circ s)'(t) = \bar{T}'(s(t))s'(t) = \bar{k}(s(t))\bar{N}(s(t))s'(t) = k(t)v(t)N(t), \\ N'(t) &= (\bar{N} \circ s)'(t) = \bar{N}'(s(t))s'(t) \\ &= -\bar{k}(s(t))s'(t)\bar{T}(s(t)) + \bar{\tau}(s(t))s'(t)\bar{B}(s(t)) \\ &= -k(t)v(t)T(t) + \tau(t)v(t)B(t), \\ B'(t) &= (\bar{B} \circ s)'(t) = \bar{B}'(s(t))s'(t) = -\bar{\tau}(s(t))\bar{N}(s(t))s'(t) = -\tau(t)v(t)N(t), \end{aligned}$$

οπότε η απόδειξη των τύπων είναι πλήρης. □

Τα δύο αριθμητικά μεγέθη, η καμπυλότητα και η στρέψη, που αντιστοιχίσαμε σε μια κανονική καμπύλη, καθορίζουν ουσιαστικά μονοσήμαντα την καμπύλη. Πιό συγκεκριμμένα, δύο καμπύλες με την ίδια καμπυλότητα και την ίδια στρέψη διαφέρουν μόνο ως προς την θέση τους στο χώρο, και αντιστρόφως.

Για την ακριβή διατύπωση του σχετικού θεωρήματος, υπενθυμίζουμε ότι : ***Μεταφορά*** (translation) κατά (το διάνυσμα) $h \in \mathbb{R}^3$ ονομάζεται η απεικόνιση

$$\mu_h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : u \mapsto \mu_h(u) := u + h.$$

Στροφή (rotation) ονομάζεται κάθε ορθογώνιος μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^3$ με θετική ορίζουσα· μ' άλλα λόγια, κάθε γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ που διατηρεί τα εσωτερικά γινόμενα, δηλαδή

$$< f(u), f(v) > = < u, v >; \qquad \forall\ u, v \in \mathbb{R}^3,$$

και ο πίνακας της έχει θετική ορίζουσα. Επομένως, η f διατηρεί τις αποστάσεις και αντιστρέφεται (δηλαδή είναι γραμμικός ισομορφισμός).

Παρατηρούμε ότι οι μεταφορές και οι στροφές είναι αντιστρέψιμες απεικονίσεις της ίδιας μορφής: η αντίστροφη της μ_h είναι η μ_{-h}, δηλαδή είναι επίσης μία μεταφορά, ενώ η αντίστροφη μιάς στροφής είναι άμεσον ότι αποτελεί κι αυτή στροφή. Διαπιστώνεται εύκολα ότι

$$f \circ \mu_c = \mu_{f(c)} \circ f.$$

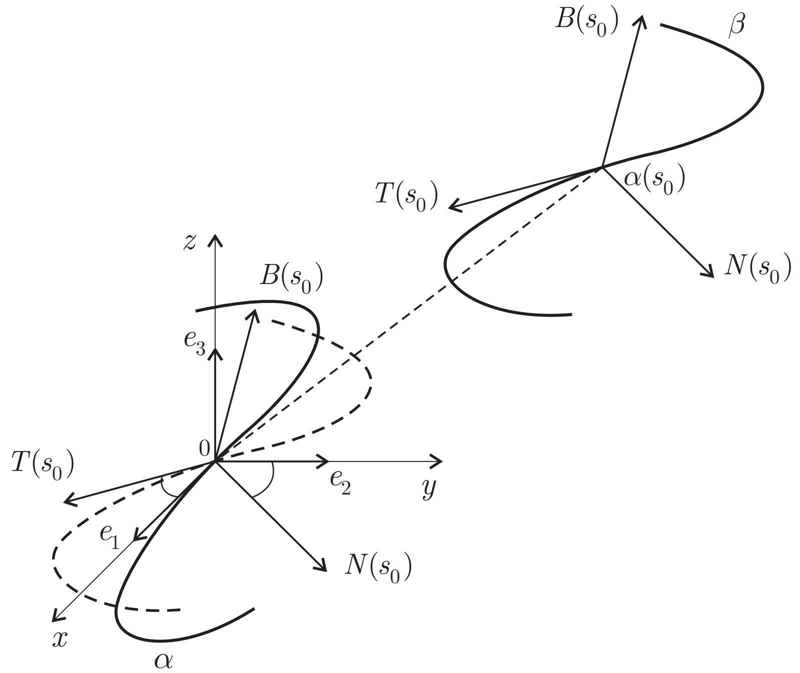
Η σύνθεση μια μεταφοράς και μια στροφής ονομάζεται ***στερεά κίνηση*** (rigid motion).

Τα προηγούμενα μας επιτρέπουν να διατυπώσουμε το επόμενο ***Θεμελιώδες Θεώρημα των Καμπυλών***, με το οποίον και κλείνουμε το κεφάλαιο αυτό.

3.5.3 Θεώρημα. *Έστω $k(s) > 0$ και $\tau(s)$, $s \in J = [0, c]$, δύο διαφορίσιμες πραγματικές συναρτήσεις. Τότε υπάρχει μια καμπύλη $\alpha : J \to \mathbb{R}^3$ μοναδιαίας ταχύτητας με καμπυλότητα k και στρέψη τ. Επιπλέον, μια άλλη κανονική καμπύλη β έχει τις ίδιες ιδιότητες τότε και μόνον τότε αν διαφέρει από την α κατά μία στερεά κίνηση.*

Για μια λεπτομερή απόδειξη του θεωρήματος, η οποία είναι αρκετά τεχνική και βρίσκεται εκτός του σκοπού αυτών των σημειώσεων, παραπέμπουμε στο [7]. Εδώ περιοριζόμαστε στην παράθεση του Σχήματος 3.5, στην επόμενη σελίδα.

Σημείωση. Το κεφάλαιο αυτό βασίζεται κυρίως στις σημειώσεις [7]. Από την πολλή εκτεταμένη βιβλιογραφία της στοιχειώδους διαφορικής γεωμετρίας των καμπυλών, επιλέγουμε να παραπέμψουμε τον ενδιαφερόμενο αναγνώστη στα πολύ κατανοητά βιβλία [24], [30] και [34].



Σχημα 3.5

3.6 Ασκήσεις

1. Να βρεθούν: (i) Μία παραμέτρηση α του ευθυγράμμου τμήματος, που ενώνει δύο (διαφορετικά) σημεία P και Q του $\mathbb{R}^3$. (ii) Το μήκος και η καμπυλότητα της α. (iii) Μία αναπαραμέτρηση β της α μοναδιαίας ταχύτητας. (iv) Το μήκος και η καμπυλότητα της β.

2. Ο κύκλος με κέντρο $(0, 0)$ και ακτίνα r είναι εικόνα της καμπύλης

$$\alpha\colon [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (r\cos t, r\sin t).$$

Να δείξετε ότι: (i) Η α ορίζει μία κανονική παραμέτρηση. (ii) Το διάνυσμα της ταχύτητας είναι κάθετο στην ακτίνα. (iii) Το διάνυσμα της επιτάχυνσης κατευθύνεται προς το κέντρο. (iv) Να υπολογίσετε το μήκος της α. (v) Να βρεθεί αναπαραμέτρηση β της α με μοναδιαία ταχύτητα και να υπολογιστεί η καμπυλότητα k της β.

3. Να βρεθεί μία κανονική παραμέτρηση της παραβολής $y = x^2$ και η αντίστοιχη καμπυλότητα. Ποιόν γεωμετρικό τόπο παριστάνει η $\beta(t) = (t^3, t^6)$, με $t \in \mathbb{R}$;

4. Δίνεται μία διαφορίσιμη συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Να βρεθεί μία κανονική παραμέτρηση α του γραφήματος της και να προσδιοριστούν τα διανύσματα T, N, B και η καμπυλότητα της α.

5. Να βρεθούν το μήκος, η καμπυλότητα και η στρέψη της καμπύλης

$$\alpha\colon [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3\colon t \mapsto \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t, \sin t, \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\right).$$

6. Να υπολογιστεί η καμπυλότητα της καμπύλης

$$\alpha(t) = (a\cos t, b\sin t), \qquad t \in [0,2\pi],\ a,b > 0.$$

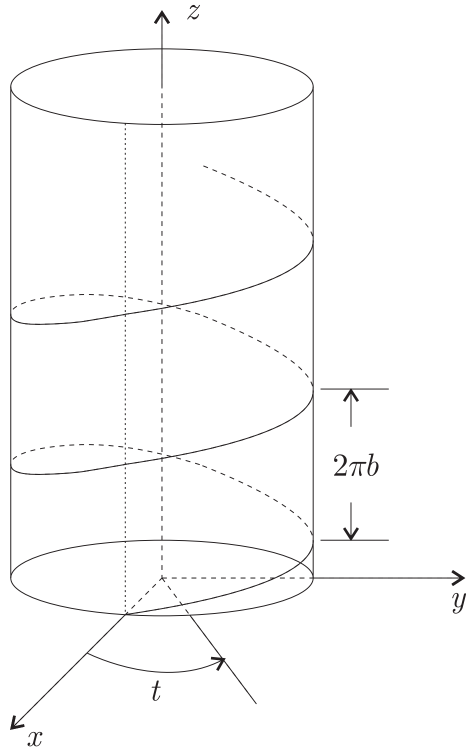
Ποιά είναι η εικόνα της;

7. Η (διαφορίσιμη) καμπύλη

$$\alpha\colon [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3\colon t \mapsto (r\cos t, r\sin t, bt); \qquad r>0,\quad b\in\mathbb{R}_*.$$

περιγράφει μία ***κυκλική έλικα*** (circular helix), η οποία απεικονίζεται στο Σχήμα 3.6.

(i) Να βρεθεί αναπαραμέτρηση β της α μοναδιαίας ταχύτητας. (ii) Να βρεθούν καμπυλότητα και η στρέψη της β. (iii) Να αποδειχθεί ότι η γωνία φ μεταξύ της εφαπτομένης σε κάθε σημείο της έλικας και του άξονα $z'Oz$ είναι σταθερή. (iv) Να αποδειχθεί ότι η γωνία ω μεταξύ της ***δεύτερης καθέτου****. σε κάθε σημείο της έλικας και του άξονα $z'Oz$ είναι σταθερή.



Σχημα 3.6

* Βλ. σχετικό ορισμό στη λύση, σελ. 151

8. Να βρεθεί η καμπυλότητα της καμπύλης

$$\alpha(t) := \left(t, \frac{t^2}{2}\right), \qquad 0 \le t \le 1.$$

9. Θεωρούμε την καμπύλη

$$\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \colon t \mapsto (t^2, t^3).$$

Είναι κανονική; Να βρεθεί η καμπυλότητά της.

10. Να βρεθεί διαφορίσιμη καμπύλη α με $\alpha(0) = (0,1)$, η οποία διαγράφει τον κύκλο με την φορά των δεικτών του ωρολογίου.

11. Έστω $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ διαφορίσιμη καμπύλη και διάνυσμα $\upsilon \in \mathbb{R}^3$, τέτοιο ώστε

$$\alpha(0) \perp \upsilon \qquad \text{και} \qquad \alpha'(t) \perp \upsilon, \ \forall\, t \in I.$$

Να δείξετε ότι $\alpha(t) \perp \upsilon$, για κάθε $t \in I$.

12. Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες της καμπύλης

$$\alpha\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \colon t \mapsto (3t, 3t^2, 2t^3)$$

σχηματίζουν σταθερή γωνία ϑ με την ευθεία $y = 0$, $x = z$.

13. Ένας κύκλος ακτίνας r στέκεται στο σημείο $(0,0)$ του άξονα $x'Ox$ και αρχίζει να κυλά προς τα δεξιά. (i) Να βρεθεί η καμπύλη α που διαγράφει το σημείο A, το οποίον αρχικά ακουμπά στο (0,0). (ii) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της α τις χρονικές στιγμές $t = 0$, $t = \pi$ και $t = 2\pi$. (iii) Να υπολογιστεί το μήκος του τμήματος της α, όταν $t \in [0, 2\pi]$.

Η καμπύλη α είναι γνωστή με το όνομα ***κυκλοειδής*** (η μορφή της εμφανίζεται στο σχήμα της λύσης, σελ. 153).

14. Έστω $\beta(s)$ καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας. (i) Να αποδειχθεί ότι υπάρχει διάνυσμα ω (: ***διάνυσμα Darboux***) τέτοιο ώστε: $T' = \omega \times T$, $N' = \omega \times N$ και $B' = \omega \times B$. (ii) Να αποδειχθεί η σχέση $T' \times T'' = k^2 \omega$. [Στις παραπάνω σχέσεις, για ευκολία, έχουμε παραλείψει την μεταβλητή s].

15. Έστω $\beta\colon J \to \mathbb{R}^3$ καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας με την ιδιότητα: η εφαπτομένη σε κάθε σημείο $\beta(s)$ περνά από ένα σταθερό σημείο P. Να αποδειχθεί ότι η β είναι ευθεία.

16. Έστω $\alpha\colon J \to \mathbb{R}^3$ καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας. Να δείξετε ότι η α είναι τμήμα κύκλου εάν και μόνον εάν όλες οι ***πρώτες κάθετοι***[*] της α περνούν από σταθερό σημείο P.

[*] Βλ. σχετικό ορισμό στη λύση, σελ. 156.

17. Αν $\alpha\colon J \to \mathbb{R}^3$ είναι καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας, τότε οι *δεύτερες κάθετοι* της α δεν μπορούν να περνούν από σταθερό σημείο.

18. Έστω $\alpha\colon J \to \mathbb{R}^3$ καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας. Να δείξετε ότι η ταχύτητα της α είναι συνεχώς παράλληλη με ένα σταθερό διάνυσμα $0 \neq u \in \mathbb{R}^3$ εάν και μόνον εάν η α είναι ευθεία.

19. Να βρεθεί η εξίσωση του κάθετου επίπεδου σε ένα δεδομένο σημείο μια κανονικής καμπύλης. Ως εφαρμογή να δείξετε ότι όλα τα κάθετα επίπεδα της καμπύλης

$$\beta(t) = (a\sin^2 t, a\sin t\cos t, a\cos t)$$

διέρχονται από το σημείο $(0, 0, 0)$.

20. Να βρεθεί η εξίσωση του εγγύτατου επίπεδου σε ένα δεδομένο σημείο μια κανονικής καμπύλης. Εφαρμογή: Δίνεται η καμπύλη $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί η (καρτεσιανή) εξίσωση του εγγύτατου επίπεδου της $\alpha(t)$ στο σημείο $\alpha(t_o)$, όπου $t_o = \dfrac{\pi}{2}$.

21. Να βρεθεί η εξίσωση του ευθειοποιούντος επιπέδου σε ένα δεδομένο σημείο μια κανονικής καμπύλης. Εφαρμογή: Δίνεται η καμπύλη $\alpha(t) = \left(t, \dfrac{t^2}{2}, \dfrac{t^3}{3}\right)$, $t \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί η εξίσωση του ευθειοποιούντος επιπέδου της $\alpha(t)$ στο σημείο που αντιστοιχεί στο $t_o = 1$.

22. Δίνεται μία καμπύλη $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ μοναδιαίας ταχύτητας, με καμπυλότητα $k(s) > 0$ για κάθε $s \in I$, και στρέψη $\tau(s)$. Θέτουμε $\beta(s) := T(s)$, όπου $T(s)$ το εφαπτόμενο διάνυσμα της α. (i) Να αποδειχθεί ότι η β είναι κανονική καμπύλη. (ii) Αν σ είναι η συναρτηση μήκους τόξου της β (με αρχή το $\underline{s_o}$), να αποδειχθεί ότι $\sigma'(s) = k(s)$, για κάθε $s \in I$. (iii) Να υπολογιστεί καμπυλότητα $\overline{k}$ και η στρέψη $\overline{\tau}$ της β.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Η καμπύλη β καλείται ***σφαιρική δείκτρια*** (spherical indicatrix) της (συνάρτησης) T. Ανάλογα ορίζονται και οι σφαιρικές δείκτριες των N και B. Η ορολογία οφείλεται στο γεγονός ότι οι δείκτριες παίρνουν τιμές στη μοναδιαία σφαίρα του $\mathbb{R}^3$ με κέντρο το 0.

23. Υποθέτουμε ότι $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^2$ είναι επίπεδη καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας με καμπυλότητα $0 < k(s) < 1$, $\forall s \in I$. Θεωρούμε την καμπύλη

$$\beta(s) := \alpha(s) + N(s), \qquad s \in I.$$

(***παράλληλη*** της α), όπου $N(s)$ το πρώτο κάθετο διάνυσμα της α. Να αποδειχθεί ότι η β είναι κανονική και ότι η καμπυλότητά της k_β δίνεται από την σχέση

$$k_\beta = \frac{k}{1-k}.$$

24. Εστω $\alpha(s)$ καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας με στρέψη $\tau(s) \neq 0$. Να εκφραστεί η καμπυλότητα k της α συναρτήσει της τ και των δεύτερων κάθετων διανυσμάτων $B(s)$.

25. Αν γ είναι κανονική καμπύλη με την ιδιότητα οι διχοτόμοι της γωνίας που σχηματίζουν τα πρώτα κάθετα διανύσματα με τα αντίστοιχα δεύτερα να διέρχονται από σταθερό σημείο, τότε η γ είναι κύκλος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

4

Από τους χάρτες στις Πολλαπλότητες

΄Οπως αποδείχτηκε, στον Riemann έλειπε ακόμη ένα στοιχείο κλειδί γαι μια πλήρη εικόνα του σύμπαντος. Γι' αυτήν, ο κόσμος θα έπρεπε να περιμένει ακόμη μισόν αιώνα, μέχρι τη γέννηση του Albert Einstein

R. Osserman [32, σελ. 92]

Στο Κεφαλαιο αυτο γίνεται μία σύντομη περιγραφή της έννοιας της (διαφορικής) πολλαπλότητας, αφού προηγουμένως ορίσουμε την έννοια ενός χάρτη και μιας επιφάνειας στον χώρο $\mathbb{R}^3$.

Η πολλαπλότητα, που αναφέρεται για πρώτη φορά από τον Riemann το 1848, γενικεύει την έννοια της επιφάνειας στον $\mathbb{R}^3$. Αφορμή για τις ιδέες του Riemann υπήρξε το Θεώρημα Egregium του Gauss και η συνακόλουθη ανακάλυψη της εσωτερικής γεωμετρίας της επιφάνειας.

Η γεωμετρία των πολλαπλοτήτων αποτελεί τη σημαντικότερη εξέλιξη της γεωμετρίας στον 20ο αιώνα και είναι θεμελιώδης για τα σύγχρονα μαθηματικά (Διαφορική Γεωμετρία και Τοπολογία, Συμπλεκτική Γεωμετρία, κλπ.) και τη φυσική (Θεωρία Σχετικότητας, Θεωρίες Βαθμίδας, κ.α).

4.1 Η Θεωρία των Επιφανειών και ο Gauss

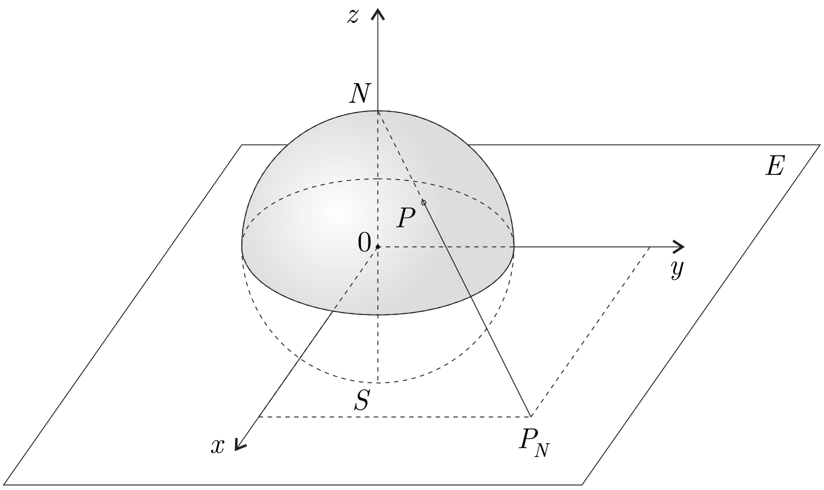
Παραλλάσοντας την εναρκτήρια φράση *«εν αρχή ην τα μπαχαρικά»*, από τον «Μαγγελάνο» του Stefan Zweig, θα μπορούσαμε, χωρίς υπερβολή, να πούμε για τη νεώτερη εξέλιξη της γεωμετρίας ότι :

εν αρχή ην ο χάρτης.

Η κατασκευή χαρτών απασχόλησε τους γεωγράφους από την αρχαιότητα, για την εξυπηρέτηση της ναυσιπλοΐας και έγινε επιτακτική ανάγκη μετά τις μεγάλες εξερευνήσεις (ανακάλυψη της Αμερικής κλπ.). Η ακριβής αποτύπωση του σχήματος της Γης και η κατασκευή χαρτών οδήγησαν, αργότερα, στη συστηματική μελέτη και (της διαφορικής γεωμετρίας) των επιφανειών.

Τι είναι όμως χάρτης; Είναι μία προβολή, δηλ. *απεικόνιση* (μέρους) της Γης στο επίπεδο. Παράδειγμα τέτοιας απεικόνισης είναι η ***στερεογραφική προβολή***, που οφείλεται στον Ίππαρχο (190–125 π.Χ) και χρησιμοποιήθηκε για την κατασκευή αστρονομικών χαρτών. Ο όρος στερεογραφική προβολή οφείλεται στον F. D'Aiguillon (1566–1617).

Η ιδέα της στερεογραφικής προβολής από τον *Βόρειο Πόλο N* εμφανίζεται στο επόμενο σχήμα.



Σχημα 4.1: Στερεογραφική προβολή από τον Βόρειο Πόλο

Αν θεωρήσουμε ότι μια σφαίρα με κέντρο 0 και ακτίνα 1 αναπαριστά ιδεατά τη γήινη σφαίρα, N είναι ο Βόρειος Πόλος και E το επίπεδο του Ισημερινού, τότε η (στερεογραφική) προβολή P_N του σημείου P της σφαίρας είναι η τομή της ευθείας

NP με το E. Με την προηγούμενη διαδικασία ορίζεται η *1-1 και επί* (διαφορίσιμη) απεικόνιση

$$S^2 - \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \mapsto \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right) \tag{4.1.1}$$

με αντίστροφη την (επίσης διαφορίσιμη)

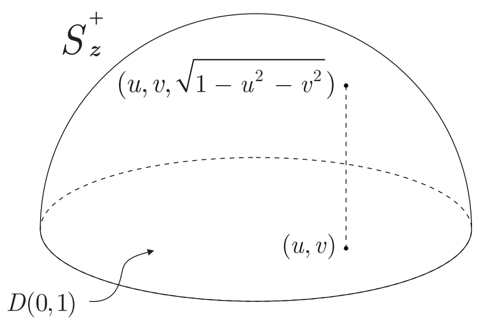
$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow S^2 - \{N\} : (u, v) \mapsto \left(\frac{2u}{1+u^2+v^2}, \frac{2v}{1+u^2+v^2}, \frac{-1+u^2+v^2}{1+u^2+v^2} \right). \tag{4.1.2}$$

Οι προηγούμενες εκφράσεις των απεικονίσεων προκύπτουν με εφαρμογή στοιχειώδους Αναλυτικής Γεωμετρίας.

Έτσι, αν φανταστούμε ότι στο επίπεδο του Ισημερινού έχει απλωθεί ένα τεράστιο φύλλο χαρτιού, θα έχουν απεικονιστεί όλα τα σημεία της σφαίρας σ' αυτό, εκτός από τον Βόρειο Πόλο, άρα θα έχουμε κατασκευάσει (θεωρητικά) ένα *χάρτη*. Επειδή ο προηγούμενος χάρτης δεν απεικονίζει τον Βόρειο Πόλο, για να καλύψουμε όλη τη Γη, χρειαζόμαστε και τη στερεογραφική προβολή από τον *Νότιο Πόλο*, με αντίστοιχες εκφράσεις (ποιές;)

Οι δυο προηγούμενοι χάρτες μαζί αποτελούν, όπως μαθαίνουμε στη γεωγραφία, έναν ***άτλαντα***. Φυσικά, οι χαρτες αυτοί δεν έχουν καμιά πρακτική αξία λόγω προφανών μειονεκτημάτων (περιοχές κοντά στους πόλους θα απεικονίζονται τερατωδώς παραμορφωμένες σε εξαιρετικά απομακρυσμένες περιοχές του χάρτη). Όμως, αυτή η θεωρητική κατασκευή εμπεριέχει μια βασική ιδέα απεικόνισης από μια επιφάνεια στο επίπεδο.

Έναν καλλίτερο χαρτη του βορείου ημισφαιρίου δίνει η προβολή του στο επίπεδο του Ισημερινού, όπως στο επόμενο σχήμα.



Σχημα 4.2: Προβολή του βορείου ημισφαιρίου στο επίπεδο (του Ισημερινού)

Ακριβέστερα έχουμε την *1-1 και επι* (διαφορίσιμη) απεικόνιση

$$\varphi_z^+ : S_z^+ \ni (x, y, z) \longmapsto (x, y) \in D_Z(0, 1) \tag{4.1.3}$$

όπου $S_z^+ := \{(x, y, z) \in S^2 \ : \ z > 0\}$ (βόρειο ημισφαίριο, χωρίς την περιφέρεια του Ισημερινού) και $D_Z(0, 1) := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \ : \ u^2 + v^2 < 1\}$ (ο μοναδιαίος δίσκος, με κέντρο το 0, που είναι κάθετος στον άξονα των z). Η αντίστροφη της προηγούμενης είναι, προφανώς, η (επίσης διαφορίσιμη) απεικόνιση

$$D_Z(0,1) \ni (u,v) \longmapsto \left(u, v, \sqrt{1 - u^2 + v^2}\right) \in S_z^+. \tag{4.1.4}$$

Ανάλογα, θεωρούμε το (νότιο ημισφαίριο) $S_z^- := \{(x,y,z) \in S^2 \ : \ z < 0\}$, που προβάλεται στον ίδιο δίσκο $D_Z(0,1)$, μέσω της απεικόνισης

$$\varphi_z^- \colon S_z^- \ni (x,y,z) \longmapsto (x,y) \in D_Z(0,1), \tag{4.1.5}$$

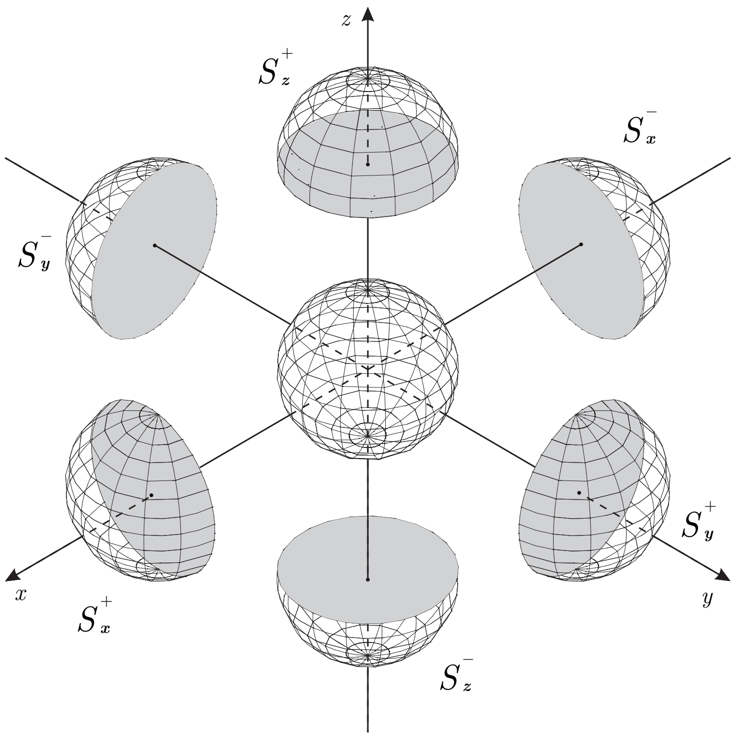
με αντίστροφη την

$$D_Z(0,1) \ni (u,v) \longmapsto \left(u, v, -\sqrt{1 - u^2 + v^2}\right) \in S_z^-. \tag{4.1.6}$$

Με αυτή τη διαδικασία έχουμε τα έξι ημισφαίρια (δύο ως προς κάθε άξονα)

$$S_i^a, \quad \text{με} \quad i = x, y, z \quad \text{και} \quad a = +, -, \tag{4.1.7}$$

τα οποία προβάλονται στους δίσκους D_i, μέσω των αντιστοίχων απεικονίσεων φ_i^a. Με τον τρόπο αυτόν προκύπτει ένας άτλαντας με έξι χάρτες.



Σχημα 4.3: Τα έξι ημισφαίρια

Για άλλα είδη προβολών, προβλήματα σχετικά με τη δημιουργία χαρτών και τις συνακόλουθες ατέλειές τους, καθώς και την αδυναμία της κατασκευής ενός «ιδεώδους» χάρτη (Θεώρημα Euler), παραπέμπουμε στα βιβλία [24] και (το πιό περιγραφικό) [32].

Κάθε χάρτης εισάγει ένα (τοπικό) *σύστημα συντεταγμένων* και *παραμετρηκοποιεί ένα τμήμα της επιφάνειας*, δηλ. την περιγράφει μέσω μιας κατάλληλης απεικόνισης, στην οποίαν *εφαρμόζεται ο Διαφορικός Λογισμός* (βλ. και τα σχετικά σχόλια για την παραμέτρηση καμπύλης στην αρχή της §3.1).

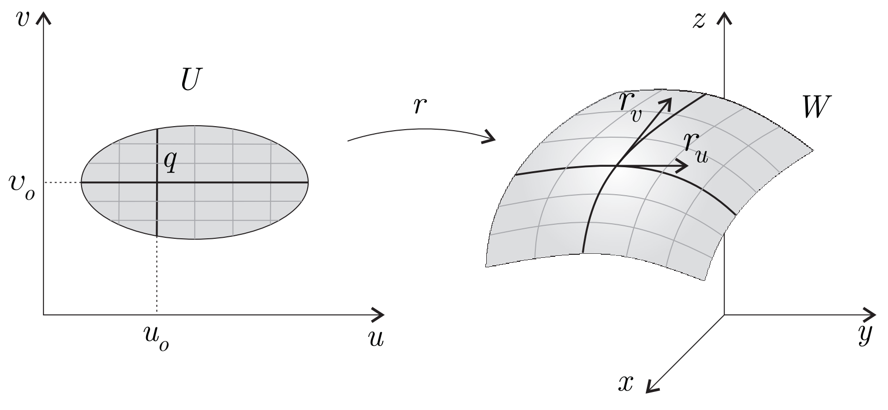
Τα προηγούμενα μας οδηγούν στους εξής τυπικούς ορισμούς:

4.1.1 Ορισμός. Μία ***παραμέτρηση*** (parametrization) ή ***σύστημα συντεταγμένων*** (coordinate system) ή ***χάρτης*** (chart) [μιας επιφάνειας $S \subseteq \mathbb{R}^3$] είναι ένα ζεύγος (U, r) όπου $U \subseteq \mathbb{R}^2$ είναι ανοιχτό σύνολο και $r\colon U \to \mathbb{R}^3$ διαφορίσιμη απεικόνιση, έτσι ώστε να ισχύουν οι συνθήκες:

- Η $r\colon U \to W = r(U)$ είναι ομοιομορφισμός·
- Για κάθε σημείο $q = (u, v) \in U$, το διαφορικό της r στο q, $Dr(q)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, είναι απεικόνιση 1–1. Ισοδύναμα, $\operatorname{rank}(J_q r) = 2$, όπου $J_q r$ συμβολίζει τον πίνακα Jacobi της r στο σημείο q.

Επειδή το πεδίον ορισμού της r είναι στο $\mathbb{R}^2$, λέμε ότι ο χάρτης έχει ***διάσταση*** 2 (:διδιάστατος χάρτης).

Το επόμενο σχήμα εικονίζει ένα χάρτη επιφάνειας.



Σχημα 4.4: Χάρτης επιφάνειας

4.1.2 Ορισμός. Μια ***(κανονική) επιφάνεια*** (regular surface) είναι ένα σύνολο $S \subseteq \mathbb{R}^3$ με τις εξής ιδιότητες:

- Υπάρχει μία οικογένεια χαρτών $(U_i, r_i)\}_{i\in I}$, τέτοια ώστε κάθε $W_i = r_i(U_i) \subseteq S$ να είναι *ανοιχτό* υποσύνολο του S.

- $S = \bigcup_{i \in I} W_i$.

Ισοδύναμα: Για κάθε σημείο $p \in S$, υπάρχει (2-διάστατος) χάρτης (U_p, r_p), με $p \in \overline{W_p = r_i(U_i)}$ και $W_p \subseteq S$ ανοιχτό.

Το σύνολο των χαρτών $(U_i, r_i)_{i \in I}$ του S αποτελεί έναν (2-διάστατο) ***άτλαντα*** (atlas).

Περιγραφικά, θα μπορούσαμε να πούμε ότι η επιφάνεια καλύπτεται από τις εικόνες των χαρτών της.

4.1.3 Παραδείγματα. • Κάθε επίπεδο του χώρου R^3.

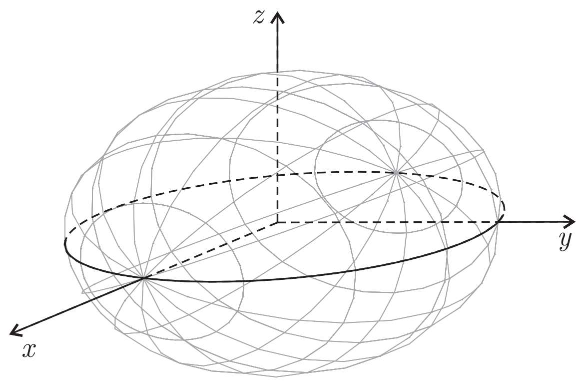
• Η σφαίρα S^2 με τις δύο δομές που ορίστηκαν στην αρχή αυτής της παραγράφου [βλ. Άσκηση 4.1.7 (2)].

• Το γράφημα

$$\Gamma_f := \{(u, v, f(u, v)) \,|\, (u, v) \in \mathbb{R}^2\}$$

μιας διαφορίσιμης συνάρτησης $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ [βλ. Άσκηση 4.1.7 (3)] .

• Επιφάνειες όπως στα επόμενα σχήματα 4.5 και 4.6:



Σχημα 4.5: Η επιφάνεια του ελλειψοειδούς

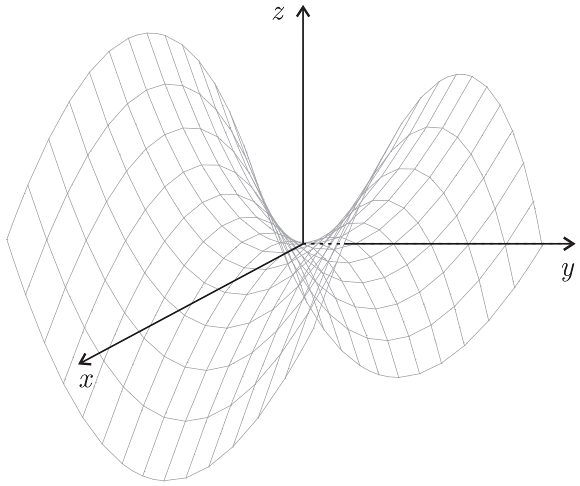
και πλήθος άλλες, εκ των οποίων πολλές ιδιαίτερα περίπλοκες.

Ισχύει το επόμενο θεμελιώδες συμπέρασμα:

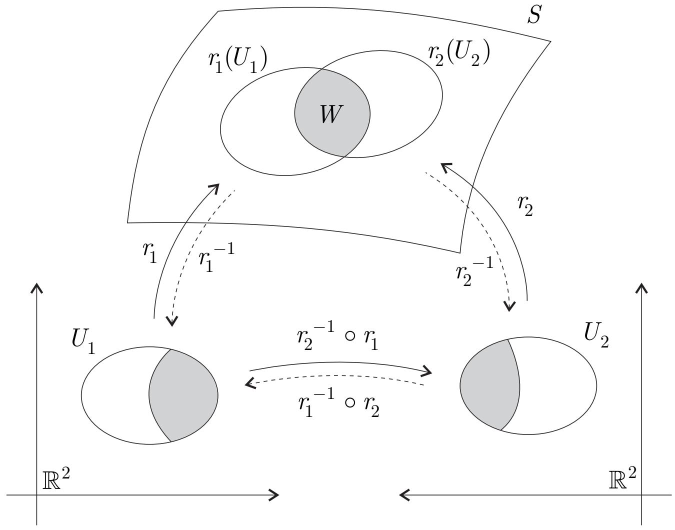
4.1.4 Θεώρημα. *Η αλλαγή των συντεταγμένων είναι αμφιδιαφόριση* .

Θυμίζουμε ότι ***αμφιδιαφόριση*** είναι μία απεικόνιση 1–1 και επί, η οποία είναι διαφορίσιμη με διαφορίσιμη αντίστροφο.

Περιγραφικά (βλ. και το Σχήμα 4.7), το θεώρημα σημαίνει ότι αν έχουμε δύο συστήματα συντεταγμένων (U_1, r_1) και (U_2, r_2), τέτοια ώστε $W := r_1(U_1) \cap r_2(U_2) \neq \emptyset$, τότε οι συναρτήσεις $r_2^{-1} \circ r_1$ και $r_2^{-1} \circ r_1$ (που είναι η μία αντίστροφος της άλλης) είναι διαφορίσιμες. Επομένως, οι συντεταγμένες των σημείων του W ανάγονται η μία στην



Σχημα 4.6: Η επιφάνεια του υπερβολικού παραβολοειδούς



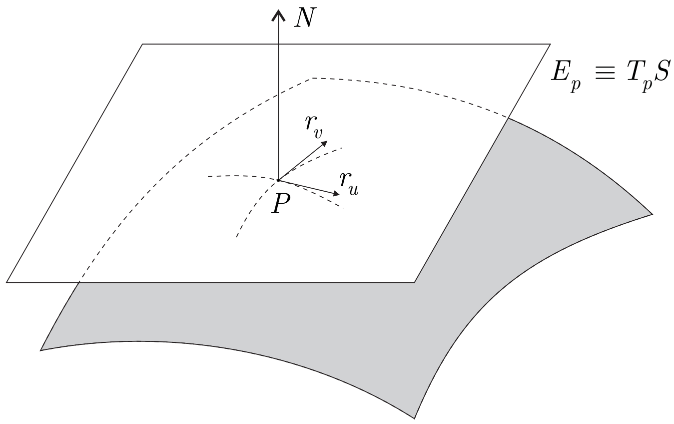
Σχημα 4.7: Η αλλαγή συντεταγμένων επιφάνειας

άλλη με διαφορίσιμο τρόπο. Για την απόδειξη του θεωρήματος παραπέμπουμε στο [7, Θεώρημα 2.3.3].

Σε κάθε σημείο P μιας επιφάνειας S ορίζονται δύο αντικείμενα, τα οποία παίζουν ουσιώδη ρόλο στη γεωμετρική μελέτη της επιφάνειας. Αυτά είναι:

- το ***εφαπτόμενο επίπεδο*** (tangent plane) E_p, και
- το μοναδιαίο ***κάθετο διάνυσμα*** (unit normal vector) $N \equiv N(p)$,

όπως φαίνονται στο παρακάτω Σχήμα 4.8.



Σχημα 4.8: Εφαπτόμενο επίπεδο και πρώτο κάθετο διάνυσμα

Λεπτομερέστερα, το E_p είναι η μεταφορά, κατά το διάνυσμα θέσης p του σημείου P, του ***εφαπτομένου χώρου*** (tangent space)

$$T_pS := Dr_q(\mathbb{R}^2) = \{\alpha'(0)\}$$

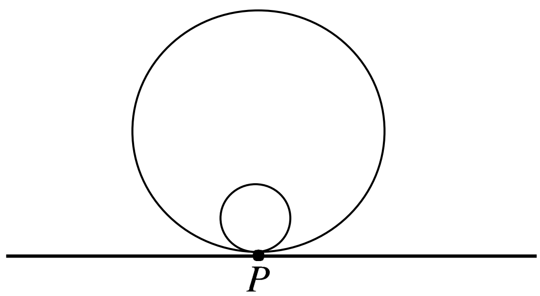
για όλες τις διαφορίσιμες καμπύλες $\alpha\colon \mathbb{R} \supseteq I_\alpha \to \mathbb{R}^3$ με $\alpha(I_\alpha) \subset S$ και $\alpha(0) = p$. Η πρώτη ισότητα στον παραπάνω ορισμό, σε συνδυασμό με τη δεύτερη συνθήκη του Ορισμού 4.1.1, συνεπάγεται ότι ο εφαπτόμενος χώρος είναι ένας *γραμμικός υπόχωρος του* $\mathbb{R}^3$ *διάστασης δύο*, δηλ. ένα επίπεδο που διέρχεται από την αρχή των αξονων. Επομένως,

$$E_p = p + T_pS.$$

Απ' το άλλο μέρος, είναι προφανές ότι

$$\boxed{\text{το } N \text{ υπάρχει γιατί η } S \text{ βρίσκεται εντός του } \mathbb{R}^3}$$

και η μεταβολή του αντανακλά το «σχήμα» της επιφάνειας, το οποίον ουσιαστικά προσδιορίζεται από ένα θεμελιώδες μέγεθος, την καμπυλότητα, που σήμερα είναι γνωστή ως ***καμπυλότητα Gauss*** (Gauss curvature), για να τιμηθεί η θεμελιώδης συμβολή του μεγάλου μαθηματικού στη θεωρία των επιφανειών.



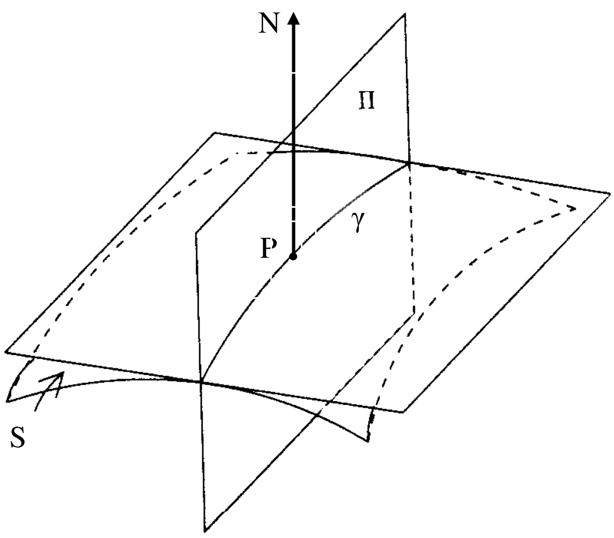
Σχήμα 4.9: Καμπυλότητα σφαιρικών επιφανειών

Χωρίς να μπούμε εδώ σε τεχνικές λεπτομέρειες, μπορούμε να πούμε ότι η καμπυλότητα του Gauss μετράει, σε κάθε σημείο, την «απόκλιση» της επιφάνειας από το να είναι το επίπεδο. Το προηγούμενο σχήμα παρουσιάζει, σε τομή, δύο σφαιρικές επιφάνειες που εφάπτονται σε ένα επίπεδο στο σημείο P. Τα σημεία της μεγάλης σφαίρας, που βρίσκονται κοντά στο P, απέχουν από το επίπεδο λιγότερο απ' ότι τα σημεία της μικρής σφαίρας, επίσης κοντά στο P. Διαισθητικά αντιλαμβανόμαστε ότι η σφαίρα με τη μεγαλύτερη ακτίνα έχει μικρότερη καμπυλότητα.

Ο Leonhard Euler (1707–1783) υπολόγισε την καμπυλότητα, με τον παρακάτω τρόπο, ο οποίος στηρίζεται στην ύπαρξη του καθέτου διανύσματος:

Εικονα 15. Leonhard Euler

Θεωρούμε όλα τα επίπεδα Π, που περιέχουν το κάθετο διάνυσμα N στο σημείο P της επιφάνειας S και είναι κάθετα στο εφαπτόμενο επίπεδο της S στο P (βλ. Σχήμα 4.10). Κάθε τέτοιο επίπεδο τέμνει την S κατά μήκος μιας καμπύλης γ, με αντίστοιχη καμπυλότητα στο P, κ_ν (βλ §§ 3.3, 3.4).



Σχήμα 4.10. Υπολογισμός της καμπυλότητας από τον Euler

Στο σύνολο των καμπυλοτήτων όλων των καμπυλών, που λαμβάνονται μ' αυτόν τον τρόπο, υπάρχει μία *ελάχιστη* τιμή κ_1 και μία *μέγιστη* κ_2. Τότε η καμπυλότητα Gauss K της S στο P δίνεται από τη σχέση

$$\boxed{K_p = \kappa_1 \cdot \kappa_2}.$$

Αργότερα όμως, Ο Carl Friedrich Gauss, παρακινούμενος από γεωδαιτικές μελέτες (ως Διευθυντής του Γαιωδαιτικού Ινστιτούτου του Göttingen), με σκοπό τη σύνταξη τοπογραφικών χαρτών μεγάλης κλίμακας στο (τότε) Βασίλειο του Ανοβέρου, κατέληξε στον υπολογισμό της καμπυλότητας μιας επιφάνειας S αποκλειστικά με μετρήσεις επί της S, δηλαδή χωρίς προσφυγή στον περιβάλλοντα χώρο και την ύπαρξη του καθέτου διανύσματος. Επιστέγασμα της προσέγγισης αυτής ήταν και η απόδειξη του επομένου διασήμου αποτελέσματος:

4.1.5 Θεώρημα (Egregium). *Η καμπυλότητα Gauss είναι ισομετρική αναλλοίωτη.*

Εικονα 16. Carl Friedrich Gauss

Συνέπεια του θεωρήματος αυτού του Gauss είναι και το

4.1.6 Πόρισμα. *Κάθε επιφάνεια S διαθέτει μια* ***εσωτερική γεωμετρία****. Δηλαδή η γεωμετρία της S δεν εξαρτάται από την εμβάπτισή της στον $\mathbb{R}^3$.*

Η ανάλυση των προηγουμένων οδηγεί και στο εξής συμπέρασμα:

> *Αν στη Γη κατοικούσαν 2-διάστατα όντα (χωρίς την αίσθηση της τρίτης διάστασης) και είχαν τις γνώσεις και την ευφυία του Gauss, τότε αυτά θα μπορούσαν να ανακαλύψουν το σχήμα της με μετρήσεις στην ίδια την επιφάνεια της Γης.*

Ένας σύγχρονος (και σχετικά εύκολος) τρόπος υπολογισμού της καμπυλότητας προκύπτει με «κατάλληλη» διαφόριση του N, από την οποίαν προκύπτει ένας αυτοσυζυγής (συμμετρικός) τελεστής του T_pS. Ένας τέτοιος τελεστής έχει δύο ιδιοτιμές (κύριες καμπυλότητες) κ_1, κ_2, οπότε, όπως και με τη μέθοδο του Euler, $K_p = \kappa_1 \cdot \kappa_2$. Κι εδώ η καμπυλότητα υπολογίζεται με τη βοήθεια του καθέτου διανύσματος, άρα τελικά *λαμβάνοντας υπόψη ότι η επιφάνεια είναι εμβαπτισμένη στο χώρο* $\mathbb{R}^3$.

4.1.7 Ασκήσεις.

1. Να αποδειχτούν οι τύποι της στερεογραφικής προβολής από το Βόρειο Πόλο (4.1.1) (4.1.2), και να βρεθούν οι αντιστοιχες εκφράσεις για τη στερεογραφική προβολή από το Νότιο Πόλο.

2. Να οριστούν τα συστήματα συντεταγμένων (χάρτες) της S^2 *ως επιφάνειας*, με την αυστηρή έννοια του Ορισμού 4.1.1, για τις στερεογραφικές προβολές και τα ημισφαίρια.

3. Να δικαιολογηθεί γιατί το γράφημα μιάς διαφορίσιμης συνάρτησης $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ (βλ. Παραδείγματα 4.1.3) είναι κανονική επιφάνεια.

4.2 Διαφορικές Πολλαπλότητες

Η έννοια της (διαφορικής) πολλαπλότητας αναπτύχθηκε από τον Bernhard Riemann (1826–1866), στη διάλεξή του *«Επί των υποθέσεων οι οποίες βρίσκονται στα θεμέλια της γεωμετρίας»** (βλ. και σχετικά σχόλια στη σελ. 28). Στη διάλεξη αυτή ο Riemann ανέπτυξε ριζοσπαστικές ιδέες για τον χώρο, ο οποίος δεν πρέπει να θεωρείται κατ' ανάγκην Ευκλείδειος, αλλά ότι είναι «καμπυλωμένος» και η καμπυλότητά του μπορεί να υπολογιστεί (όπως και στις επιφάνειες) με εσωτερικές μετρήσεις. Έτσι ο χώρος είναι μία «πολλαπλότητα», δηλαδή ένα γεωμετρικό αντικείμενο που δεν είναι απαραίτητα εμβαπτισμένο σε κάποιον Ευκλείδειο χώρο, και μπορεί να έχει διάσταση μεγαλύτερη του 3, ακόμη και άπειρη. Η ύπαρξη μιας μετρικής στην πολλαπλότητα, που σήμερα είναι γνωστή ως μετρική Riemann, οδηγεί στην εύρεση της αντίστοιχης καμπυλότητας άλλα και άλλων σχετικών μεγεθών, που αποκαλύπτουν τις γεωμετρικές ιδιότητες του αντικειμένου/χώρου.

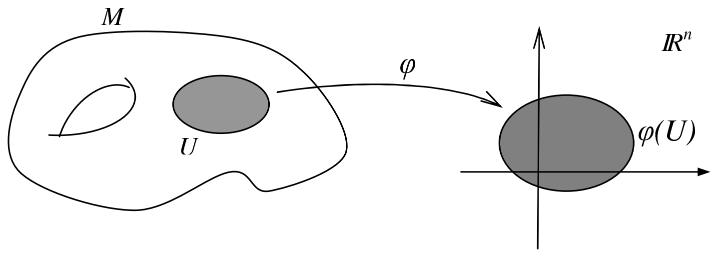
Είναι προφανές ότι οι ιδέες αυτές είχαν ως αφορμή την εσωτερική γεωμετρία του Gauss. Θυμίζουμε ότι ο Riemann υπήρξε μαθητής του Gauss και ο τελευταίος ήταν ίσως και ο μοναδικός καθηγητής του Göttingen που μπορούσε να κατανοήσει τις ριζοσπαστικές ιδέες του μαθητή του, όπως αυτός (δηλ. ο Riemann) τις διατύπωσε στην παραπάνω διάλεξη.

Στα επόμενα θα θεωρήσουμε ένα σύνολο $M \neq \emptyset$. Με σύγχρονη ορολογία και συμβολισμούς (που καθιερώθηκαν μετά τα μέσα της δεκαετίας του 1930), έχουμε πρώτα τον επόμενο τυπικό ορισμό (συγκρίνατε με τον Ορισμό 4.1.1):

4.2.1 Ορισμός. Ένας n-διάστατος ***χάρτης*** (chart) του M είναι ένα ζεύγος (U, φ) όπου:

* Για τη μετάφραση της διάλεξης στα Αγγλικά και εκτενή επεξηγηματικά σχόλια βλ. M. Spivak [38], σελίδες 132–178.

- $U \subseteq M$,
- $\varphi\colon U \xrightarrow{\cong} \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι απεικόνιση $1-1$ και επί, με $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ *ανοιχτό*.



Σχημα 4.11: Χάρτης πολλαπλότητας

Οι χάρτες κι εδώ ορίζουν *τοπικά* συστήματα συντεταγμένων. Το Σχήμα 4.11 παρουσιάζει ένα χάρτη του M και, συγκρινόμενο με το αντίστοιχο Σχήμα 4.4 της σελίδας 113, δείχνει τη σχέση των χαρτών μιας πολλαπλότητας με αυτούς μιας επιφάνειας. Συνολοθεωρητικά προσδιορίζονται από το ίδιο είδος απεικονίσεων (1–1 και επί) με εναλλαγή των πεδίων ορισμού και τιμών. Οι τοπολογικές απαιτήσεις και οι συνθήκες διαφορισιμότητας επί των χαρτών της επιφάνειας δεν έχουν έννοια εδώ, αφού το M είναι ένα σύνολο χωρίς καμιά δομή (προς το παρόν).

4.2.2 Ορισμός. Ένας n-διάστατος ***άτλαντας*** (atlas) του M είναι μία οικογένεια χαρτών $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) \,|\, i \in I\}$, τέτοια ώστε:

- $M = \bigcup_{i\in I} U_i$, δηλαδή ο $\mathcal{A}$ *καλύπτει* το M.
- Η αλλαγή των χαρτών/συντεταγμένων
$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}\colon \varphi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$$
είναι *αμφιδιαφόριση*, όπου υποθέτουμε ότι τα σύνολα
$$\varphi_i(U_i \cap U_j) \quad \text{και} \quad \varphi_j(U_i \cap U_j)$$
είναι ανοιχτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$.

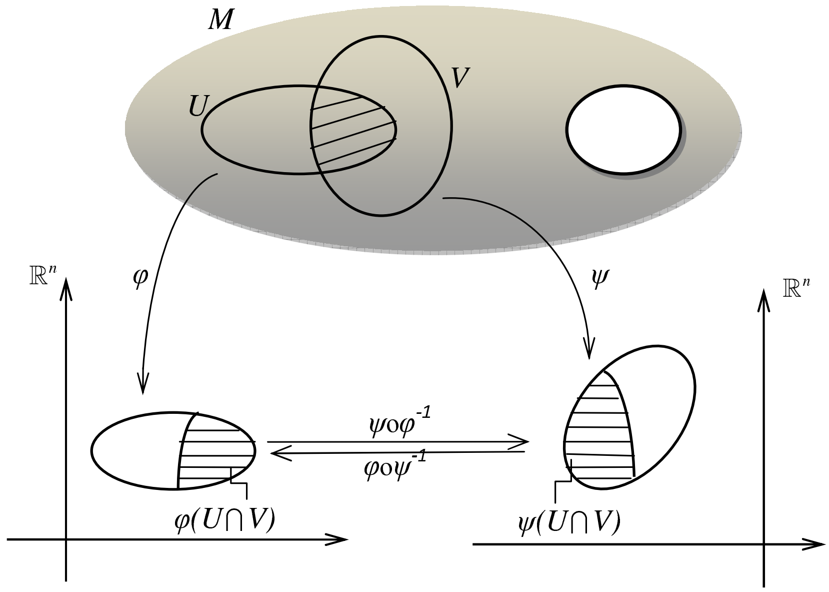
Βασική παρατήρηση: Η δεύτερη ιδιότητα του Ορισμού 4.2.2 (αμφιδιαφόριση αλλαγής χαρτών/συντεταγμένων) εδώ λαμβάνεται ως *αξίωμα* ενω στις επιφάνειες είναι ιδιότητα που *αποδεικνύεται*, όπως αναφέρεται στο Θεώρημα 4.1.4. Η αλλαγή των χαρτών μιας πολλαπλότητας απεικονίζεται στο Σχήμα 4.12 της επόμενης σελίδας, και είναι το ανάλογο του Σχήματος 4.7 (σελ. 115).

4.2.3 Ορισμός. Ένα σύνολο M εφοδιασμένο με ένα *μέγιστο* άτλαντα αποτελεί μία (n-διάστατη) ***διαφορική πολλαπλότητα***, οπότε λέμε, ισοδύναμα, ότι το M εφοδιάζεται με μία ***διαφορική δομή***.

Μέγιστος είναι ένας άτλαντας, που περιέχει κάθε χάρτη για τον οποίον οι αλλαγές των συντεταγμένων με όλους τους χάρτες του άτλαντα είναι αμφιδιαφορίσεις. Αποδεικνύεται ότι για κάθε άτλαντα υπάρχει ένας μοναδικός μέγιστος που τον περιέχει.

Συνοπτικά μπορούμε να πούμε ότι, μέσω των χαρτών,

Μία n-διάστατη πολλαπλότητα **τοπικά μοιάζει** με τον Ευκλείδειο χώρο R^n.



Σχημα 4.12: Αλλαγή συντεταγμένων πολλαπλότητας

4.2.4 Παραδείγματα.

• Ολες οι επιφάνειες (προφανώς)

• Ένα πιό «αφηρημένο» πράδειγμα είναι ο (διδιάστατος) ***προβολικός χώρος*** (projective space) $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$. Γεωμετρικά, αποτελείται από το σύνολο όλων των ευθειών του $\mathbb{R}^3$, που διέρχονται από την αρχή των αξόνων. Όμως, κάθε τέτοια ευθεία καθορίζεται πλήρως από ένα οποιοδήποτε σημείο της. Ακριβέστερα, αν ℓ είναι ευθεία διερχόμενη από το 0 και (x, y, z) ένα τυχόν σημείο της, τοτε κάθε άλλο σημείο (x', y', z') της ℓ δίνεται από τη σχέση $(x', y', z') = \lambda(x, y, z)$, για ένα πραγματικό αριθμό $\lambda \neq 0$. Επομένως, ισοδύναμα, ο προβολικός χώρος περιγράφεται και αλγεβρικά ως εξής:

$$\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \equiv \left\{[x, y, z] \,\middle|\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3_*\right\},$$

όπου έχουμε θέσει

$$[x, y, z] := \{\lambda(x, y, z) \,|\, \lambda \in \mathbb{R}_*\}.$$

Μπορούμε να ορίσουμε τον άτλαντα $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) \mid i = 1, 2, 3\}$:

$$U_1 = \{[x, y, z] \,:\, x \neq 0\} \ni [x, y, z] \xrightarrow{\ \varphi_1\ } \left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) \in \mathbb{R}^2,$$

$$U_2 = \{[x, y, z] \,:\, y \neq 0\} \ni [x, y, z] \xrightarrow{\ \varphi_2\ } \left(\frac{x}{y}, \frac{z}{y}\right) \in \mathbb{R}^2,$$

$$U_3 = \{[x, y, z] \,:\, z \neq 0\} \ni [x, y, z] \xrightarrow{\ \varphi_3\ } \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) \in \mathbb{R}^2.$$

Προφανώς, ο $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ δεν είναι εμβαπτισμένος σε κάποιον Ευκλείδειο χώρο (ούτε και μπορεί να παρασταθεί), παρ' όλο που κατασκευάζεται από στοιχεία του $\mathbb{R}^3$. Με ανάλογο τρόπο κατασκευάζεται από τον $\mathbb{R}^{n+1}$ ο n-διάστατος προβολικός χώρος $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$.

Φυσικά υπάρχει πληθώρα μαθηματικών χώρων που είναι πολλαπλότητες, αλλά δεν μπορούν να εκτεθούν σ' αυτές τις σημειώσεις.

Μια πολλαπλότητα M αποκτά αρχικά μία *τοπολογική δομή* ορίζοντας ότι ένα $A \subseteq M$ είναι ***ανοιχτό*** (open) αν κάθε σύνολο

$$\varphi(A \cap U) \subseteq \mathbb{R}^n$$

είναι ανοιχτό (με τη συνήθη έννοια των Ευκλειδείων χώρων), για όλους τους χάρτες (U, φ) της διαφορικής δομής.

4.2.5 Πρόταση. *Με την προηγούμενη τοπολογία τα πεδία ορισμού U των χαρτών (U, φ) είναι ανοιχτά σύνολα στο M, και οι απεικονίσεις $\varphi\colon U \to \varphi(U)$ είναι ομοιομορφισμοί.*

Κατόπιν μπορούμε να ορίσουμε μίαν έννοια *διαφορισιμότητας*, που επεκτείνει τη συνήθη διαφορισιμότητα των Ευκλειδείων χώρων, και εισάγει ένα Διαφορικό Λογισμό σε πολλαπλότητες. Ακριβέστερα, μία απεικόνιση μεταξύ πολλαπλοτήτων $f\colon M \to N$ είναι ***διαφορίσιμη στο*** $p \in M$ (differentiable at p) αν υπάρχουν χάρτες (U, φ) και (V, ψ), των M και N αντίστιχα, με $p \in U$ και $f(U) \subseteq V$, έτσι ώστε η ***τοπική παράσταση*** (local representation) της f,

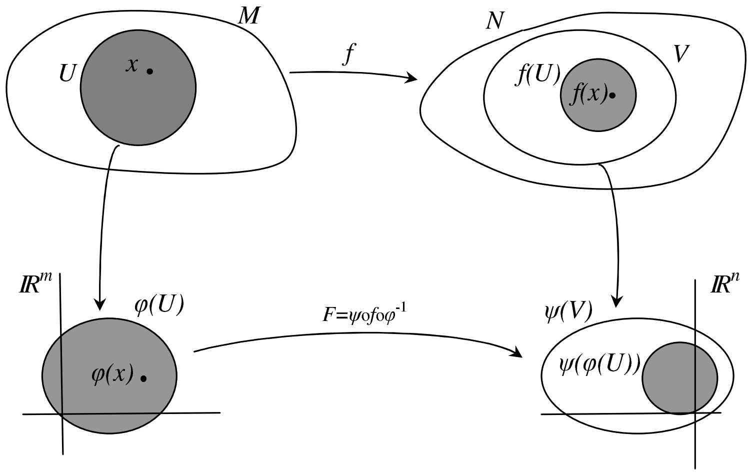
$$F = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}\colon \mathbb{R}^m \supseteq \varphi(U) \longrightarrow \psi(V) \subseteq \mathbb{R}^n,$$

να είναι διαφορίσιμη στο $\varphi(p)$ (με τη συνήθη έννοια πλέον των Ευκλειδείων χώρων).

Το Σχήμα 4.13 στην επόμενη σελίδα διαφωτίζει τον ορισμό της διαφορισιμότητας.

Ο Διαφορικός Λογισμός που προκύπτει με αυτόν τον τρόπο έχει όλες τις καλές ιδιότητες που ξέρουμε και ικανοποιεί τα περισσότερα γνωστά θεωρήματα, όπως το Θεώρημα της Αλυσίδας, της Αντίστροφης Συνάρτησης κλπ.

Όπως και στις επιφάνειες, σε κάθε σημείο μιας πολλαπλότητας μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα γραμμικό χώρο, που καλούμε ***εφαπτόμενο χώρο*** και προσεγγίζει γραμμικά την πολλαπλότητα. Η περιγραφή του είναι πιό πολύπλοκη απ' αυτήν του εφαπτομένου χώρου και του εφαπτομένου επιπέδου μιας επιφάνειας.



Σχημα 4.13: Τοπική παράσταση διαφορίσιμης απεικόνισης

Ο χώρος αυτός, λόγω της γραμμικής δομής του, επιτρέπει να ορίσουμε:

- Το ***διαφορικό*** (παράγωγο) μιας διαφορίσιμης απεικόνισης μεταξύ πολλαπλοτήτων. Ουσιωδώς αυτό ανάγεται στο αντίστοιχο διαφορικό της τοπικής παράστασης, που υπολογίζεται τώρα με τις συνήθεις μεθόδους διαφόρισης σε Ευκλείδειους χώρους (πεπερασμένης διάστασης).

- ***Εσωτερικό γινόμενο***, ***μετρική Minkowski*** κλπ., που προκύπτουν και πάλι από αντίστοιχα αντικείμενα σε Ευκλείδειους χώρους.

Συγκολλώντας τα εσωτερικά γινόμενα ή τις μετρικές των εφαπτομένων χώρων καθιστούμε την πολλαπλότητα μετρικό χώρο και ορίζουμε δομή ***πολλαπλότητας Riemann, πολλαπλότητας Lorentz*** κλπ.

Απο την προηγούμενη σύντομη αναφορά στις πολλαπλότητες, μπορεί να κατανοήσει κανείς, ότι με τη βοήθεια των χαρτών, μπορούμε να μεταφέρουμε (σχεδόν) όλο το μαθηματικό οπλοστάσιο των Ευκλειδείων χώρων και σ' αυτές. Πρέπει να πούμε εδώ ότι οι πολλαπλότητες – σε πρώτη ανάγνωση– φαντάζουν ως ένα μαθηματικό αντικείμενο πολύ δύσκολο. Για τον κοινό άνθρωπο αυτό είναι αλήθεια. Για τον μέσο μαθηματικό η μελέτη των πολλαπλοτήτων δεν είναι δυσκολότερη απ' αυτήν των επιφανειών που διδάσκονται στα μαθήματα γεωμετρίας των πανεπιστημίων.

4.2.6 Ασκήσεις.

1. Να αναφέρετε τη μορφή των χαρτών της σφαίρας *ως διαφορικής πολλαπλότητας*, μέσω των στερεογραφικών προβολών και των ημισφαιρίων. Κατόπιν να επαληθεύσετε ότι η αλλαγή των συντεταγμένων που αντιστοιχούν στα ημισφαίρια S_x^+ και S_y^- είναι αμφιδιαφόριση.

2. Να αποδειχθεί ότι η συλλογή $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i) \mid i = 1, 2, 3\}$, που αναφέρεται στο δεύτερο από τα Παραδείγματα 4.2.4, πραγματικά αποτελεί άτλαντα του προβολικού χώρου $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

4.3 Δυό λόγια για τη Θεωρία της Σχετικότητας

Στόχος μας εδώ είναι να περιγράψουμε μόνο τον χωρόχρονο ως πολλαπλότητα, για να δούμε, από τη μια μεριά το μαθηματικό υπόβαθρο της Θεωρίας της Σχετικότητας (Ειδικής και Γενικής), και από την άλλη το λόγο για τον οποίον είναι δύσκολο να εξηγήσουμε το υπόβαθρο αυτό σε μη μαθηματικό κοινό. Πριν απ' αυτό, ας αναφερθούμε σε μερικά διάσημα ονόματα τα οποία σχετίζονται, θετικά ή αρνητικά, με την παραπάνω θεωρία.

Bernhard Riemann (1826–1866): Όπως ήδη εξηγήσαμε και αλλού, γεωμετρία του υπήρξε θεμελιώδης για τη μαθηματική διατύπωση της Γ.Θ.Σ. Ο Einstein έτρεφε μεγάλοθαυμασμό γι' αυτόν. (Βλ. φωτογραφία του στη σελ. 26.)

Hermann Minkowski (1864–1909): Από τους πρώτους ένθερμους υποστηρικτές της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας (Ε.Θ.Σ), στην οποίαν εισήγαγε την έννοια του *χωροχρόνου* και μελέτησε τη γεωμετρία του.

Hermann Minkowski

Το 1908 δήλωσε:

> *Από εδώ και στο εξής, ο χώρος μόνος του και ο χρόνος μόνος του είναι καταδικασμένοι να εξασθενίσουν σε απλές σκιές, και μόνον ένα είδος ένωσης και των δυο θα αποτελέσει μιαν ανεξάρτητη πραγματικότητα.*

Henri Poincaré (1854–1912): Ασχολήθηκε (μεταξύ των άλλων) και με προβλήματα σχετικά με το φώς και είχε διερωτηθεί αν *η ταχύτητα του πρέπει να θεωρηθεί σταθερή*. Εντούτοις, παρέμεινε πολέμιος της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας (Γ.Θ.Σ). (Βλ. φωτογραφία του στη σελ. 18.)

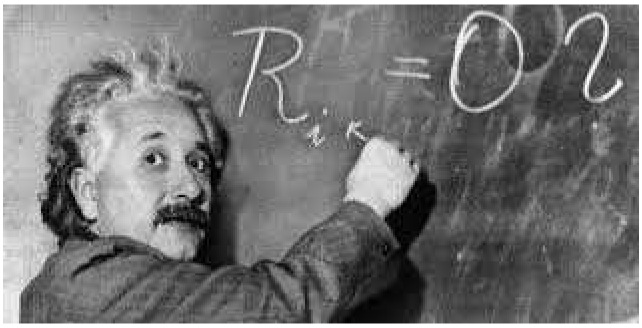
Hendrik Antoon Lorentz (1853–1928): Είχε αντιληφθεί το 1905 κάποια παράδοξα φυσικά φαινόμενα, χωρίς να μπορεί να κατανοήσει τη σημασία τους (όπως έγινε από τον Einstein με την Ε.Θ.Σ).

Hendrik Lorentz

Οι μετασχηματισμοί του (σήμερα γνωστοί ως μετασχηματισμοί Lorentz χρησιμοποιήθηκαν στην Γ.Θ.Σ.

David Hilbert (1862–1943): Είχε καταλήξει σε μερικά μαθηματικά αποτελέσματα της Γ.Θ.Σ, χωρίς να μπορεί να εκτιμήσει ή να ερμηνεύσει τη φυσική τους σημασία. Λόγω σχετικής παρεξήγησης που δημιουργήθηκε, ανεγνώρισε δημόσια ότι η Γ.Θ.Σ είναι δημιούργημα του Einstein. (Βλ. φωτογραφία του στη σελ. 14.)

Albert Einstein (1879–1955):



Για τον δημιουργό της Ειδικής και της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας, τον φυσικό που ανέτρεψε την εικόνα του κόσμου, που επικρατούσε πριν απ' αυτόν, δεν θα πούμε τίποτε εδώ. Είναι τεράστιο το πλήθος των βιβλίων και άρθρων που αναφέρονται στον άνθρωπο και επιστήμονα Einstein απο τα οποία μπορεί κανείς να αντλήσει κάθε είδους πληροφορία, επιστημονική, ιστορική, ακόμη και ανεκδοτολογική.

4.3.1 Χωρόχρονος και Διαφορική Γεωμετρία

Α. Ο ***χωρόχρονος*** της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας είναι μία

> *4-διάστατη, συνεκτική, χρονικώς προσανατολισμένη, πολλαπλότητα Lorentz, η οποία είναι ισομετρική με τον 4-διάστατο χώρο Minkowski.*

Διευκρινίζουμε ότι ο ***χώρος Minkowski*** είναι το $\mathbb{R}^4$ με την *ψευδομετρική* που εισάγεται από τα «γινόμενα» της μορφής

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot (y_1, y_2, y_3, y_4) = -x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3 + x_4 \cdot y_4 \quad \text{ή}$$
$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot (y_1, y_2, y_3, y_4) = -c^2\, x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3 + x_4 \cdot y_4$$

όπου c η ταχύτητα του φωτός (η δεύτερη μορφή χρησιμοποιείται συχνά στη φυσική). Μία πολλαπλότητα ***Lorentz*** είναι μία πολλαπλότητα εφοδιασμένη με τη μετρική Lorentz. Η τελευταία είναι μία (διαφορίσιμη) απεικόνιση που, σε κάθε σημείο p του χωρόχρονου M, αντιστοιχεί μία μετρική Minkowski στον αντίστοιχο εφαπτόμενο χώρο T_pM. Μερικές άλλες τεχνικές λεπτομέρειες δίνονται στην τελευταία υποπαράγραφο.

Στην Ε.Θ.Σ δεν υπεισέρχεται η βαρύτητα και υπάρχουν πολλά *παράδοξα* (όπως των διδύμων, της αλλοίωσης των διαστάσεων κλπ.), ας άμεση συνέπεια της γεωμετρίας του χωροχρόνου.

B. Ο ***χωρόχρονος*** της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας είναι μία

> *4-διάστατη, συνεκτική, χρονικώς προσανατολισμένη, πολλαπλότητα Lorentz, η οποία είναι τοπικώς ισόμορφη με τον 4-διάστατο χώρο Minkowski.*

Στην περίπτωση αυτή, η εξίσωση του Einstein

$$G = 8\pi T$$

όπου G είναι ο τανυστής της *βαρύτητας*, και T ο τανυστής *stress-energy* που καθορίζεται από την *καμπυλότητα* (Ricci) της πολλαπλότητας, οδηγεί στο συμπέρασμα ότι

$$\text{βαρύτητα} \quad \equiv \quad \text{καμπυλότητα},$$

επομένως, η Γ.Θ.Σ αποτελεί **γεωμετρική ερμηνεία του μακροκόσμου**.

Ο μεγάλος στόχος της σύγχρονης έρευνας είναι η ενοποίηση της Θεωρίας της Σχετικότητας (που περιγράφει τον μακρόκοσμο) με την *Κβαντική Θεωρία* (που περιγράφει τον μικρόκοσμο). Κυρίαρχο εργαλείο φαίνεται να είναι κι εδώ η γεωμετρία, όπως χρησιμοποιείται στη *Θεωρία Βαθμίδος* (gauge theory), στη *Θεωρία των Υπερχορδών* (string theory) κλπ. Φυσικά, είναι έξω από τα όρια αυτών των σημειώσεων να περιγράψουμε τι ακριβώς εννοούμε σήμερα πια τον όρο γεωμετρία, τα εξαιρετικά προηγμένα μαθηματικά εργαλεία που χρησιμοποιεί, καιτη σύμπλεξή της με τους άλλους κλαδους των μαθηματικών.

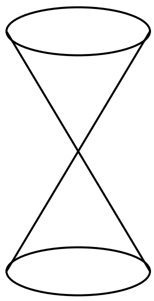
4.3.2 Μερικές τεχνικές λεπτομέρειες

• Η (τοπολογική) υπόθεση της *συνεκτικότητας* σημαίνει (από φυσική άποψη) ότι δεν υπάρχουν περιοχές του χωρόχρονου ανάμεσα στις οποίες δεν υπάρχει «επικοινωνία» (μετάδοση σήματος).

• Η μετρική Minkowski διαχωρίζει τα διανύσματα u (του $\mathbb{R}^4$ ή τουT_pM) σε

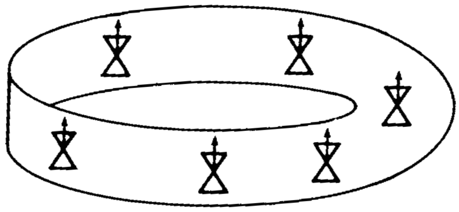
$$\begin{aligned} &\text{χωρικά :} && \text{αν} \quad u\cdot u > 0 \quad \text{ή} \quad u = 0, \\ &\text{μηδενικά :} && \text{αν} \quad u\cdot u = 0 \quad \text{και} \quad u \neq 0, \\ &\text{χρονικά :} && \text{αν} \quad u\cdot u < 0, \end{aligned}$$

οπότε σχηματίζονται δύο *διπλοί κώνοι*, όπως στο Σχήμα 4.14. Ο άνω και κάτω κώνος αποτελούνται από τα χρονικά διανύσματα, ο δεξιά και αριστερά από τα χωρικά, ενώ στην επιφάνεια ανήκουν τα μηδενικά (ή φωτεινά) διανύσματα



Σχημα 4.14: Ο κώνος φωτός

• Χρονικός προσανατολισμός σημαίνει ότι επιλέγουμε τον έναν από τους κώνους των χρονικών διανυσμάτων, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα, που δανειζόμαστε από το βιβλίο [30].



Σχημα 4.15: Χρονικός προσανατολισμός

Σημείωση. Για τη στοιχειώδη γεωμετρία των επιφανειών παραπέμπουμε κυρίως στα βιβλία [24], [30], [34] και τις σημειώσεις [7]. Για μια πρώτη γνωριμία με τη διαφορική γεωμετρία των πολλαπλοτήτων προτεινουμε το [44] και τις χειρόγραφες σημειώσεις [6]. Η σχετική βιβλιογραφία είναι πολλή μεγάλη. Μια πλήρης μαθηματική έκθεση της Ε.Θ.Σ και της Γ.Θ.Σ, μαζί με τα απαραίτητα στοιχεία της γεωμετρίας των πολλαπλοτήτων Riemann και άλλων βασικών θεμάτων, περιέχεται στο [29].

Πολλά ιστορικά στοιχεία και πληροφορίες για τα θέματα που θίξαμε σ' αυτό το σύντομο κεφάλαιο, όπως και απλοποιημένες παρουσιάσεις των θεωριών του Einstein και των συνεπειών τους, περιέχονται στα βιβλία [11], [26], [32].

Βιβλιογραφία

[1] Δ. Αναπολιτανος: *Εισαγωγή στη φιλοσοφία των μαθηματικών*, Εκδόσεις Νεφέλη, Αθήνα 1985.

[2] Σ. Ανδρεαδακης: *Γραμμική Άλγεβρα*. Αθήνα, 1980.

[3] Ι. Αραχωβιτης – Ε. Βασιλειου: *Σημειώσεις Γραμμικής Γεωμετρίας*, Πανεπιστήμιο Αθηνών, Αθήνα 1985.

[4] Δ. Βαρσος κ.α. (συγγραφική ομάδα): *Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα, Τόμος Α*, Εκδόσεις Σοφία, Θεσσαλονίκη, 2003.

[5] Ε. Βασιλειου: *Στοιχεία Προβολικής Γεωμετρίας*, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 2009.

[6] Ε. Βασιλειου–Μ. Παπατριανταφυλλου: *Σημειώσεις Διαφορικής Γεωμετρίας Ι*, Πανεπιστήμιο Αθηνών, 2009. http://Lecture Notes on Curves and Surfaces

[7] Ε. Βασιλειου–Μ. Παπατριανταφυλλου: *Σημειώσεις Διαφορικής Γεωμετρίας Καμπυλών και Επιφανειών*, Πανεπιστήμιο Αθηνών, 20010.

[8] E. T. Bell: *The Development of Mathematics*, Dover, New York, 1992.

[9] J. W. Blattner: *Projective plane geometry*, Holden-Day, San Francisco, 1968.

[10] J. N. Cederberg: *A Course in Modern Geometries*, Springer, New York, 1989.

[11] D. D. Davis: *Η Φύση και η Δύναμη των Μαθηματικών*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 2005.

[12] M. P. Do Carmo: *Differential geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, Englegood Cliffs, New Jersey , 1976.

[13] P. Dombrowski: *150 Years after Gauss' "disquisitiones generales circa superficies curvas"*, Astérisque 62, Soc. Math. de France, Paris, 1979.

[14] N. V. Efimov – E. R. Rozendorn: *Linear Algebra and Multidimensional Geometry*, MIR Publishers, Moscow, 1975

[15] R. L. Faber: *Foundations of Euclidean and non-Euclidean Geometry*, Marcel Dekker, New York, 1983.

[16] G. H. Hardy: *A Mathematician's Apology*, Cambridge Univ. Press, Canto edition, Cambridge, 2002.

[17] M. Henle: *Modern Geometry: The Analytic Approach*, Prentice Hall, New Jersey, 1997.

[18] D. Hilbert: *Foundations of Geometry (Grunlangen der Geometrie)*, Open Court, Illinois, 1971. Ελληνική μετάφραση: *Θεμέλια της Γεωμετρίας*, Τροχαλια, Αθήνα, 1995.

[19] S. Hollingdale: *Makers of Mathematics*, Penguin, London, 1991.

[20] M. Kline: *Mathematics in Western Culture*, Oxford Univ. Press, 1953. Ελληνική μετάφραση: *Τα Μαθηματικά στο Δυτικό Πολιτισμό* (τόμοι Α-Β), Κώδικας, Αθήνα, 2002.

[21] W. Klingenberg: *A Course in Differential Geometry*, Springer, New York, 1978.

[22] Δ. Κουτρουφιωτη: *Στοιχειώδης Διαφορική Γεωμετρία*, Leader Books, Αθήνα, 2006.

[23] M. Lipschutz: *Differential Geometry*, Schaum's Outline Series, McGraw Hill, New York, 1974. Ελληνική μετάφραση: *Διαφορική Γεωμετρία*, ΕΣΠΙ, Ε. Περσίδης, Αθήνα, 1981.

[24] J. McCleary: *Geometry from a Differential Point of View*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994.

[25] R. J. Mihalek: *Projective Geometry and Algebraic Structures*, Academic Press, New York, 1972.

[26] L. Mlodinov: *Euclid's Window. The Story of Geometry from Parallel Lines to Hyperspace*, Allen Lane, The Penguin Press, London, 2002. Ελληνική μετάφραση: *Το Παράθυρο του Ευκλείδη*, Τραυλός, Αθήνα 2007.

[27] S. Negrepontis–D. Lamprinidis: *The Platonic Anthyphairetic Interpretation of Pappus' account of analysis and synthesis*, History and Epistemology in Mathematics Education, Proceedings of the 5th European Summer University, Prague, 2007, pp. 501–511

[28] Μ. Μπρικας: *Μαθήματα Προβολικής Γεωμετρίας*, Αθήνα, 1964.

[29] B. O'Neill: *Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity*, Academic Press, New York, 1983.

[30] B. O'Neill: *Elementary Differential Geometry*, Academic Press, New York, 1997. Ελληνική μετάφραση: *Στοιχειώδης Διαφορική Γεωμετρία*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2002.

[31] J. Oprea: *Differential Geometry and its Applications*, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1997.

[32] R. Osserman: *Poetry of the Universe*, Anchor Books Doubleday, New York, 1995. Ελληνική μετάφραση *Η Ποίηση του Σύμπαντος*, Τραυλός, Αθήνα, 1998.

[33] Β. Παπαντωνιου: *Διαφορική Γεωμετρία Ι: Θεωρία Καμπυλών*, Πάτρα, 1996.

[34] A. Pressley: *Elementary Differential Geometry*, Springer, London, 2001.

[35] J. Pierpont: *The history of mathematics in the nineteenth century*, Bull. Amer. Math. Soc. **37** (2000), 3–8 [reprinted from Bull. Amer. Math. Soc. **11** (1905), 238–246].

[36] H. Poincaré: *Dernières Pensées*, Flammarion, Paris, 1913.

[37] C. Reid: *Ο προκλητικός Κος Χίλμπερτ*, Εκδοτικός Οικος Τραυλός, Αθήνα, 2007.

[38] M. Spivak: *Differential Geometry, Vol. II*, Publish or Perish, Wilmington, 1979.

[39] Ε. Σταματης: *Εὐκλείδου Γεωμετρία*, Τόμος Ι (Στοιχείων Βιβλία Ι–IV), Εκδόσεις Ν. Σάκκουλα, Αθήνα, 1952.

[40] F. W. Stevenson: *Projetive Planes*, W. H. Freeman, San Francisco, 1972.

[41] Χ. Στραντζαλος: *Η εξέλιξη των Ευκλειδείων και μη Ευκλειδείων Γεωμετριών* (Μέρος Α), Εκδόσεις Καρδαμίτσα, Αθήνα, 1987.

[42] D. J. Struik: *Συνοπτική Ιστορία των Μαθηματικών*, Εκδόσεις Ι. Ζαχαρόπουλος, Αθήνα, 1982.

[43] M. B. W. Tent: *Καρλ Φρίντριχ Γκάους, Ο Πρίγκηπας των Μαθηματικών*, Εκδοτικός Οικος Τραυλός, Αθήνα, 2007.

[44] L.W. TU: *An Introductiion to Manifolds* (2nd edition), Springer, New York, 2011.

[45] I. M. YAGLOM: *Felix Klein and Sophus Lie*, Birkhäuser, Boston, 1988.

Πίνακας εννοιών

Υποδείξεις λύσεων

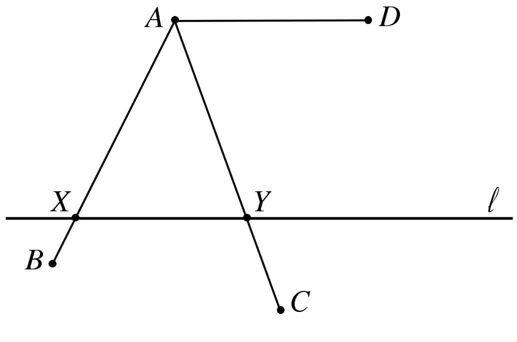
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

(Περιλαμβάνονται οι λύσεις επιλεγμένων ασκήσεων)

2.1.11 (2). Έστω ℓ τυχούσα ευθεία ενός συσχετισμένου επιπέδου. Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1.9, υπάρχουν 4 διαφορετικά σημεία A, B, C, D, που είναι ανά 3 μη συγγραμμικά. Στην ακραία περίπτωση που δύο (το πολύ) από τα A, B, C, D ανήκουν στην ℓ, έχουμε αμέσως το αποτέλεσμα.

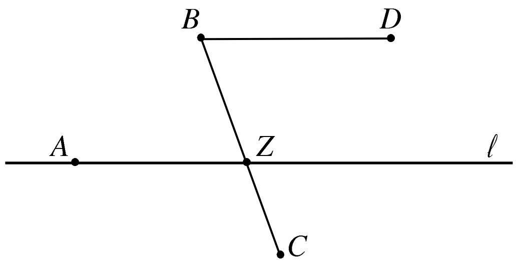
Διακρίνουμε τις εξής δύο μη τετριμμένες περιπτώσεις:

i) Κανένα από τα προηγούμενα σημεία δεν ανήκει στην ℓ.



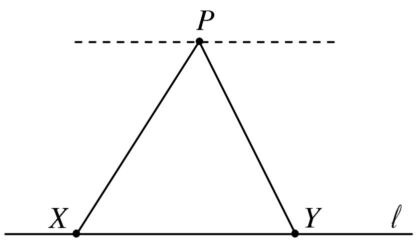
Τότε ορίζονται οι ευθείες $A \vee B$, $A \vee C$ και $A \vee D$, που είναι διαφορετικές μεταξύ τους καθώς και προς την ℓ (βλ. και την απόδειξη της Πρότασης 2.2.6). Απ' αυτές, μία το πολύ μπορεί να είναι παράλληλη προς την ℓ, ας πούμε η $A \vee D$. Επομένως, οι $A \vee B$, $A \vee C$ θα τέμνουν την ℓ στα αντίστοιχα σημεία X και Y. Παρατηρούμε ότι $X \neq Y$, γιατί διαφορετικά θα είχαμε ότι $A \vee B = A \vee X = A \vee Y = A \vee C$ (άτοπο).

ii) Ένα από τα A, B, C, D βρίσκεται επί της ℓ, ας πούμε το A. Τότε προσδιορίζουμε ένα δεύτερο σημείο $Z \neq A$ ακολουθώντας παρόμοια με την προηγουμένη διαδικασία, όπως συνοπτικά απεικονίζεται και το επόμενο σχήμα.



2.1.11 (3). Α΄ Τρόπος: Έστω P τυχόν σημείο ενός Σ.Ε. Πρώτα παρατηρούμε ότι υπάρχει μία ευθεία ℓ, η οποία δεν περιέχει το P. Πραγματικά, από το (ΣΕ 3) εξασφαλίζεται η ύπαρξη 3 διαφορετικών και μη συγγραμμικών σημείων A, B, C. Αν το P συμπίπτει με ένα απο τα προηγούμενα σημεία, τότε μπορούμε να πάρουμε ως ℓ την ευθεία που ορίζουν τα άλλα δύο. Αν το P δεν συμπίπτει με κανένα απο τα σημεία αυτά, τότε θα ανήκει το πολύ σε μία από τις 3 ευθείες που ορίζουν ανά 2 τα A, B, C, άρα μπορούμε να επιλέξουμε τη μια από τις υπόλοιπες.

Σύμφωνα με την προηγουμένη διαπίστωση, μπορούμε να θεωρήσουμε τώρα μια ευθεία ℓ, που δεν περιέχει το P. Κατά την παραπάνω Άσκηση 2.1.11 (2), η ℓ περιέχει δύο διαφορετικά σημεία, ας τα καλέσουμε X και Y.



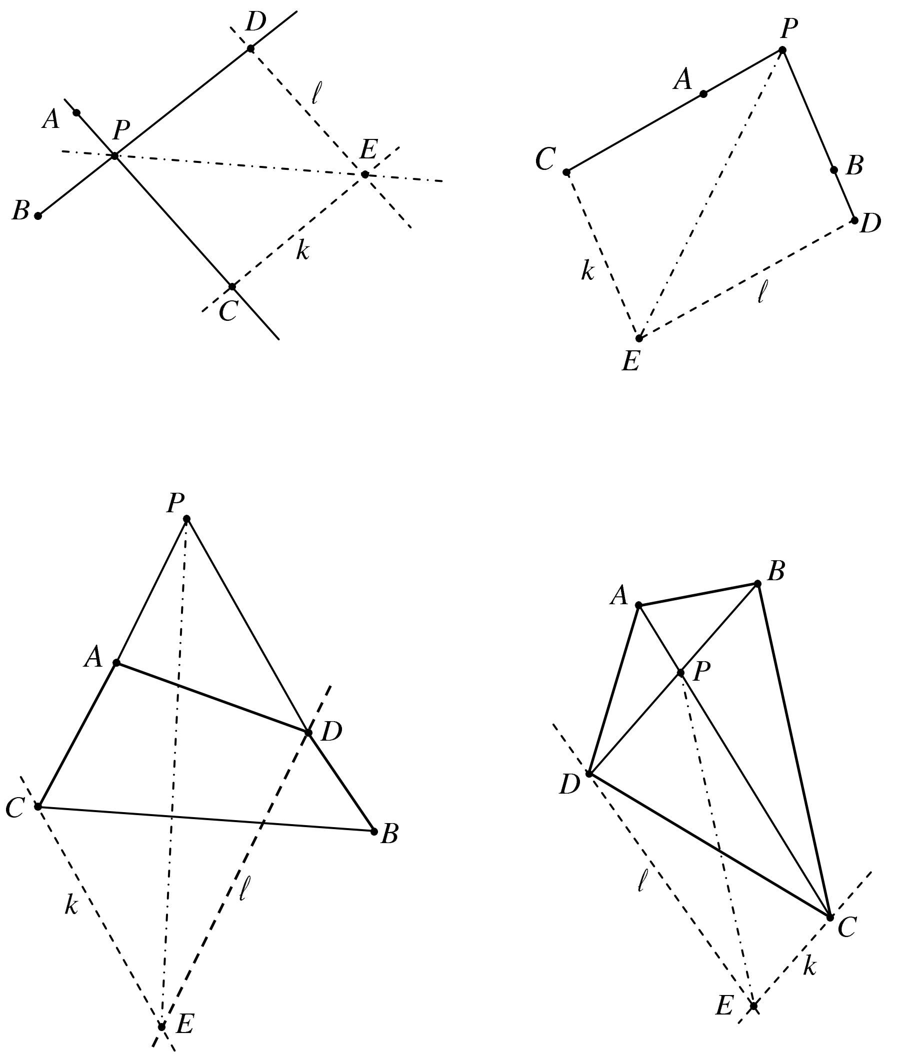
Επειδή $X \neq P \neq Y$, ορίζονται οι $P \vee X$ και $P \vee Y$. Επίσης, κατά το (ΣΕ 2), υπάρχει μία μοναδική ευθεία k, που είναι παράλληλη προς την ℓ και διέρχεται από το P. Διαπιστώνουμε εύκολα ότι οι $k, P \vee X, P \vee Y$ είναι 3 διαφορετικές διαφορετικές ευθείες που διέρχονται από το P.

Β΄ Τρόπος: Θεωρούμε τα 4 σημεία A, B, C, D του Θεωρήματος 2.1.9 και διακρίνουμε διάφορες δυνατές περιπτώσεις, σε σχέση με τη θέση του P ως προς τα A, B, C, D.

i) Το P συμπίπτει με ένα από τα προηγούμενα σημεία, π.χ. το A. Τότε οι ευθείες $P \vee B$, $P \vee C$ και $P \vee D$ αποδεικνύουν τον ισχυρισμό της άσκησης, επειδή είναι μεταξύ τους διαφορετικές [αν ήταν, για παράδειγμα, $P \vee B = P \vee C$, τότε τα $P = A$ και B, C θα ήσαν συγγραμμικά (άτοπο)].

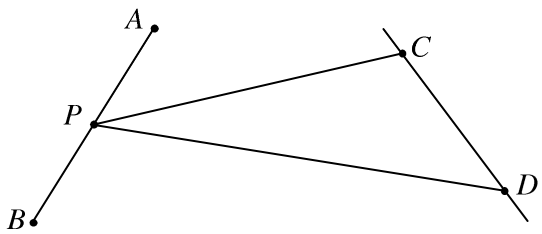
ii) Το P βρίσκεται στην τομή δύο ευθειών, από αυτές που ορίζουν ανά 2 τα

A, B, C, D, όπως στην ομάδα των παρακάτω τεσσάρων σχημάτων.



Στην περίπτωση που, για παράδειγμα, $P = (A \vee C) \wedge (B \vee D)$, φέρνουμε από το C την $k /\!/ B \vee D$ και από το D την $\ell /\!/ A \vee C$. Παρατηρούμε ότι $k \neq \ell$ [διαφορετικά η $k = \ell$ θα συνεπάγονταν ότι το C θα ήταν σημείο της ℓ (άτοπο)]. Επίσης $k \not\parallel \ell$ [στην αντίθετη περίπτωση θα ήταν και $B \vee D /\!/ \ell$ (άτοπο)]. Επομένως ορίζεται το $E = k \wedge \ell$. Επειδή $E \neq P$, ορίζεται και η $P \vee E$. Οι ευθείες $P \vee E$, $A \vee C$ και $B \vee D$ επαληθεύουν τον ισχυρισμό, αφού είναι μεταξύ τους διάφορες [αν, π.χ., ήταν $P \vee E = A \vee C$, τότε το E θα ανήκε στην $A \vee C$ (άτοπο)].

iii) Το P βρίσκεται σε μία από τις ευθείες που ορίζουν 2 από τα προηγούμενα



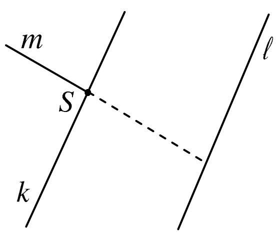
σημεία, ας πούμε την $A \vee B$ (βλ. το προηγούμενο σχήμα). Οι $P \vee C$ και $P \vee D$ είναι διαφορετικές μεταξύ τους καθώς και προς την $A \vee B$. Πραγματικά, αν ήταν $P \vee C = P \vee D$ τότε θα είχαμε ότι

$$C = (P \vee C) \wedge (C \vee D) = (P \vee D) \wedge (C \vee D) = D,$$

που είναι άτοπο. Επίσης, η $A \vee B = P \vee C$, για παράδειγμα, θα συνεπάγονταν ότι τα A, B, C θα ήσαν συγγραμμικά, που είναι επίσης άτοπο. Οι $A \vee B, P \vee C, P \vee D$ αποτελούν τις ζητούμενες ευθείες.

iv) Αν το P δεν συμπίπτει με κανένα από τα A, B, C, D, τότε μπορούμε να πάρουμε τις ευθείες $P \vee A, P \vee B, P \vee C$, οι οποίες είναι διαφορετικές μεταξύ τους.

2.1.11 (4). Αν $S = k \wedge m$ και υποθέσουμε ότι η m δεν τέμνει την ℓ, τότε από το

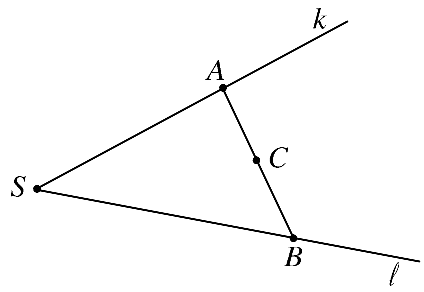


S θα είχαμε δύο παράλληλες προς την ℓ, πράγμα που αντιβαίνει στο (ΣΕ 2).

2.2.9 (2). Το συμπέρασμα είναι άμεση συνέπεια του αξιώματος (ΠΕ 3) [αντιστοίχως του (ΣΕ 3)].

2.2.9 (3). Αν ℓ είναι οποιαδήποτε ευθεία, τότε, από τα 4 σημεία του (ΠΕ 3), τουλάχιστον 2 βρίσκονται εκτός της ℓ. Αν τώρα δίνεται ένα σημείο P, τουλάχιστον 2 από τις ευθείες, που ορίζονται από τα ίδια 4 προηγούμενα σημεία, δεν περιέχουν το P.

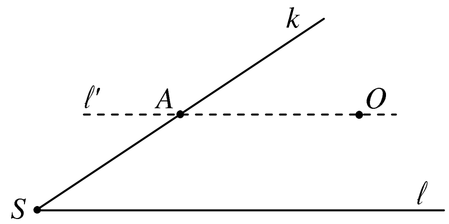
2.2.9 (4). Αν $S = k \wedge \ell$, τότε υπάρχει σημείο A της k, με $A \neq S$, και σημείο B της ℓ, με $B \neq S$. Επειδή $A \neq B$, ορίζεται η $A \vee B$. Σύμφωνα με την Πρόταση 2.2.6,



η $A \vee B$ διαθέτει ακόμη ένα σημείο C διαφορετικό από τα A και B. Το C είναι το ζητούμενο επειδή δεν ανήκει σε καμιά από τις δύο ευθείες. Πραγματικά αν, για παράδειγμα, $(C, k) \in \mathcal{I}$, τότε $k = A \vee C = A \vee B$, άρα $(B, k) \in \mathcal{I}$ (άτοπο).

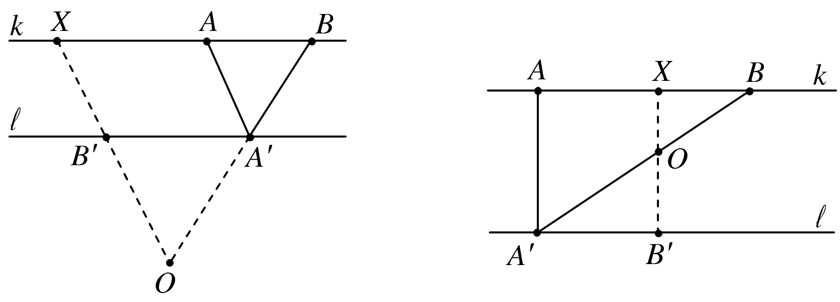
Στην περίπτωση ενός συσχετισμένου επιπέδου διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

i) Αν οι k και ℓ τέμνονται, θέτουμε $S = k \wedge \ell$.



Επειδή η k διαθέτει τουλάχιστον ένα σημείο $A \neq S$ [βλ. Άσκηση 2.1.11 (2)], μπορούμε να φέρουμε από το A μία (μοναδική) ευθεία $\ell' /\!/ \ell$. Η ℓ' διαθέτει και ένα σημείο $O \neq A$. Διαπιστώνουμε αμέσως ότι το O είναι ένα σημείο όπως το ζητούμενο.

ii) Ας υποθέσουμε τώρα ότι οι k και ℓ είναι παράλληλες. Η k διαθέτει τουλάχιστον δύο διαφορετικά σημεία A, B και η ℓ άλλα δύο A', B'. Αν το επίπεδο έχει μόνον 4 σημεία, τότε δεν υπάρχει σημείο με τη ζητουμένη ιδιότητα. Αν υπάρχουν περισσότερα από 4, τότε υπάρχει ένα X διαφορετικό από τα προηγούμενα. Στην περίπτωση που το X δεν βρίσκεται σε καμιά από τις k, ℓ, τότε αυτό είναι το ζητούμενο. Αν το X ανήκει, ας πούμε, στην k, τότε ορίζονται οι ευθείες $A \vee A'$ και $B \vee A'$, από τις οποίες το πολύ μία είναι παράλληλη προς την $X \vee B'$.



Η τομή της τελευταίας με την μη παράλληλη από τις προηγούμενες δίνει ένα σημείο O με τη ζητουμένη ιδιότητα. Παρόμοια εξετάζεται η περίπτωση κατά την οποίαν το σημείο X ανήκει στην ευθεία ℓ.

2.2.9 (5). Η επαλήθευση των αξιωμάτων του προβολικού επιπέδου είναι άμεση. Το επίπεδο αυτό βρίσκεται σε 1 – 1 και επί αντιστοιχία με το $\mathbb{P}_2$. Πραγματικά, κάθε ευθεία του $\mathbb{R}^3$, που περνάει από την αρχή των αξόνων 0, τέμνει τη μοναδιαία σφαίρα σε δύο αντιδιαμετρικά σημεία. Αντιστρόφως, δύο αντιδιαμετρικά σημεία ορίζουν μια διάμετρο, άρα ευθεία που περνάει από το 0. Επίσης, κάθε μέγιστος κύκλος ορίζει ένα επίπεδο που περνάει από το 0 και αντιστρόφως.

2.3.4 (1). Το ίδιο το επίπεδο των 7 σημείων.

2.3.4 (2). Αυτό διαπιστώνεται με πολλούς τρόπους. Για παράδειγμα:
– Από το δυϊκό του (ΣΕ 1), που δεν αληθεύει πάντοτε λόγω της ύπαρξης παραλλήλων ευθειών.
– Από τη δυϊκή διατύπωση του αξιώματος (ΣΕ 2), που οδηγεί στη μη οριζομένη έννοια παραλληλίας σημείων [παραλληλία δύο διαφορετικών σημείων, δυϊκώς προς αυτήν των ευθειών, θα σήμαινε ανυπαρξία «κοινής» ευθείας (που περιέχει τα σημεία αυτά), σε αντίφαση με το (ΣΕ 1)].
– Το δυϊκό συμπέρασμα της Άσκησης 2.1.11 (3) συνεπάγεται ότι κάθε ευθεία διαθέτει τουλάχιστον 3 διαφορετικά σημεία, πράγμα που δεν είναι γενικώς αληθές (: στο συσχετισένο επίπεδο των τεσσάρων σημείων οι ευθείες έχουν ακριβώς δύο διαφορετικά σημεία).

2.3.4 (3). Όχι, αφού το δυϊκό του (ΠΕ 3) δεν περιέχεται στο σύστημα των αξιωμάτων (ΠΕ 1) – (ΠΕ 3). Θα πρέπει να προστεθούν οι Προτάσεις 2.2.4 και 2.2.7.

2.4.10 (1). Η απόδειξη γίνεται με συλλογισμούς δυϊκούς προς αυτούς της Πρότασης 2.4.4.

2.4.10 (2). Το συμπέρασμα είναι δυϊκό του Πορίσματος 2.4.7.

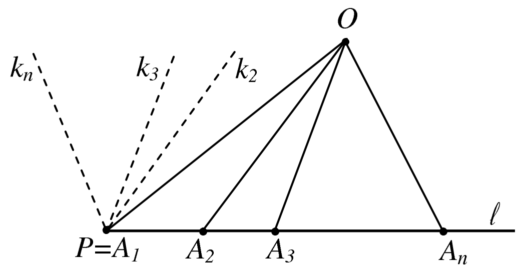
2.4.10 (3). Θεωρούμε τυχόν σημείο O εκτός της ℓ. Τότε, σύμφωνα με την προηγούμένη άσκηση και το Πόρισμα 2.4.6, έχουμε ότι $|J(A)| = |J(O)| = |J(\ell)|$. Επομένως το Πόρισμα 2.4.6 ισχύει είτε το O βρίσκεται επί της m είτε όχι.

2.4.10 (4). Σε ένα τέτοιο προβολικό επίπεδο όλες οι ευθείες θα περιέχουν τουλάχιστον 4 διαφορετικά σημεία (αλλιώς θα αναγόμαστε στο επίπεδο των 7 σημείων). Επομένως, το πλήθος των σημείων θα είναι τουλάχιστον $3^2 + 3 + 1 = 13$.

2.4.10 (6). Επειδή από το O διέρχεται μία ευθεία παράλληλη προς την m, στην περίπτωση που το συσχετισμένο επίπεδο περιέχει άπειρο πλήθος σημείων δεν ισχύει η Πρόταση 2.4.4 και τα Πορίσματα 2.4.6 και 2.4.7. Αν όμως το επίπεδο έχει πεπερασμένο πλήθος σημείων, τότε το ανάλογο του Πορίσματος 2.4.6 είναι $|J(m)| = |J(O)| - 1$. Με τις ίδιες προϋποθέσεις [και χρησιμοποιώντας την Άσκηση2.2.9 (4) για το συσχετισμένο επίπεδο], η παραπάνω σχέση οδηγεί στην $|J(k)| = |J(\ell)|$, που δίνει το συσχετισμένο ανάλογο του Πορίσματος 2.4.7.

2.4.10 (7). Ακολουθούμε τη συλλογιστική της Πρότασης2.4.8: Θεωρούμε ένα σημείο O εκτός της ℓ. Ορίζονται οι n διαφορετικές ευθείες $O \vee A_i$, όπου A_i $(i = 1, \ldots, n)$ τα σημεία της ℓ. Επίσης από το O διέρχεται και μία m παράλληλη προς την ℓ. Κάθε μία από τις προηγούμενες ευθείες διαθέτει $n-1$ διαφορετικά σημεία από το O. Επομένως, μαζί με το O, έχουμε $(n+1)(n-1)+1 = n^2$ διαφορετικά σημεία. Αποδεικνύουμε ότι αυτά είναι ακριβώς τα σημεία του επιπέδου: αν υπάρχει ακόμη ένα σημείο Q διαφορετικό από τα προηγούμενα, τότε ορίζεται η $O \vee Q$, η οποία αναγκαστικά θα συμπίπτει είτε με την m, είτε με μία από τις $O \vee A_i$. Επομένως το Q είναι ένα από τα προηγούμενα n^2 σημεία.

2.4.10 (8). Έστω ℓ τυχούσα ευθεία και A_i $(i = 1, \ldots, n)$ τα σημεία της. Αν P τυχόν σημείον του επιπέδου, που δεν ανήκει στην ℓ, τότε [βλ. τη λύση της παραπάνω Άσκησης 2.4.10 (6) για πεπερασμένα συσχετισμένα επίπεδα] είναι $|J(P)| = |J(\ell)|+1 = n+1$.



Αν το P ανήκει στην ℓ, τότε αυτό συμπίπτει με κάποιο απο τα A_i. Χωρίς βλάβη της γενικότητας ας υποθέσουμε ότι $P = A_1$. Θεωρούμε και ένα O εκτός της ℓ. Επομένως από το P διέρχονται οι ευθείες ℓ, $P \vee O$ και $k_j \,/\!/\, O \vee A_j$ $(j = 2, \ldots, n)$, δηλαδή συνολικά $n+1$ ευθείες (βλ. και το παραπάνω σχήμα). Εύκολα διαπιστώνουμε ότι όλες είναι διαφορετικές μεταξύ τους.

2.5.8 (3). Οι ευθείες $\{A, B\}$ και $\{C, D\}$ είναι παράλληλες, άρα ορίζουν το ιδεατό σημείο

$$k^{\bullet} = \{A, B\}^{\bullet} = \{C, D\}^{\bullet}.$$

Παρόμοια, οι παράλληλες $\{A, D\}$ και $\{B, C\}$ ορίζουν το

$$l^{\bullet} = \{A, D\}^{\bullet} = \{B, C\}^{\bullet},$$

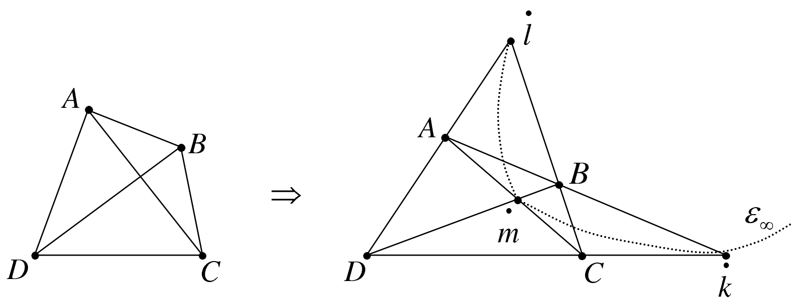
ενώ οι παράλληλες $\{A, C\}$, $\{B, D\}$ ορίζουν το

$$m^{\bullet} = \{A, C\}^{\bullet} = \{B, D\}^{\bullet}.$$

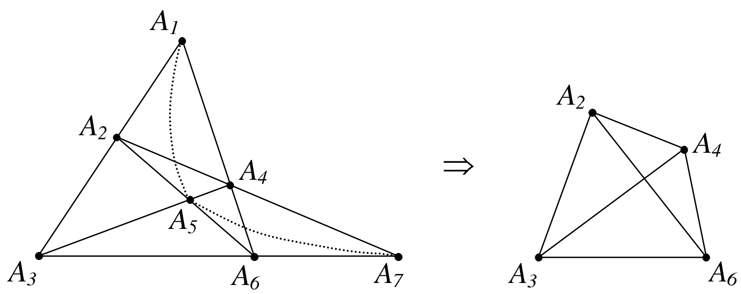
Συνεπώς, η πλήρωση αποτελείται από τα πραγματικά σημεία A, B, C, D και τα ιδεατά $k^{\bullet}, l^{\bullet}, m^{\bullet}$, δηλαδή καταλήγουμε στο προβολικό επίπεδο των 7 σημείων. Οι ευθείες της πλήρωσης είναι, προφανώς, οι

$$\{A, B, k^{\bullet}\},\ \{C, D, k^{\bullet}\},\ \{A, D, l^{\bullet}\},\ \{B, C, l^{\bullet}\},\ \{A, C, m^{\bullet}\},\ \{B, D, m^{\bullet}\},\ \mathcal{E}_{\infty} = \{k^{\bullet}, l^{\bullet}, m^{\bullet}\}.$$

Το παρακάτω σχήμα αποτελεί μια απεικόνιση της προηγούμενης διαδικασίας.



2.5.8 (4). Αν αφαιρέσουμε μιαν ευθεία, για παράδειγμα την $\{A_1, A_5, A_7\}$ τότε παίρνουμε το συσχετισμένο επίπεδο των 4 σημείων, όπως φαίνεται και στο επόμενο βοηθητικό σχήμα.



2.6.10 (1). Ας υποθέσουμε ότι $\phi(P) \in \psi(\ell)$. Θεωρούμε τυχόν σημείο $X \in \ell$, οπότε $\phi(X) \in \psi(\ell)$. Επειδή $X \neq P$, ορίζεται η $X \vee P$, άρα $\psi(X \vee P) = \phi(X) \vee \phi(P) = \psi(\ell)$. Επομένως, το $1-1$ του μορφισμού συνεπάγεται ότι $X \vee P = \ell$ (άτοπο).

Αν υποθέσουμε ότι ο μορφισμός δεν είναι $1-1$, ισχυριζόμαστε ότι δεν ισχύει το προηγούμενο συμπέρασμα, δηλαδή μπορούμε να βρούμε $Q \in \mathcal{P}$ και $k \in \mathcal{L}$, έτσι ώστε $Q \notin k$ και $\phi(Q) \in \psi(k)$. Πραγματικά, αφού η ψ δεν είναι $1-1$, υπάρχουν τουλαχιστον δύο ευθείες k, m, τέτοιες ώστε $k \neq m$ και $\psi(k) = \psi(m)$. Θέτουμε $S = k \wedge m$ και επί της m επιλέγουμε και ένα σημείο $Q \neq S$. Προφανώς $Q \notin k$. Επιπλέον, αφού (ϕ, ψ) είναι μορφισμός, η $Q \in m$ συνεπάγεται ότι $\phi(Q) \in \psi(m) = \psi(k)$, επομένως καταλήγουμε στον ισχυρισμό.

2.6.10 (2). Πρόκειται για την αντιθετοαντιστροφή της προηγουμένης άσκησης [: αν ήταν $P \notin \ell$, τότε αναγκαίως θα είχαμε ότι $\phi(P) \notin \psi(\ell)$ (άτοπο)].

2.6.10 (3). Έστω τυχόν $(P', \ell') \in \mathcal{P}' \times \mathcal{L}'$ με $P' \in \ell'$. Λόγω της υπόθεσης υπάρχουν $P \in \mathcal{P}$ και $\ell \in \mathcal{L}$, τέτοια ώστε $\phi(P) = P'$ και $\psi(\ell) = \ell'$. Επομένως $\phi(P) \in \psi(\ell)$. Εφαρμόζοντας τώρα την Άσκηση 2.6.10 (2), από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι $P \in \ell$, και, ισοδύναμα, $\phi^{-1}(P') \in \psi^{-1}(\ell')$, με την οποίαν καταλήγουμε στο συμπέρασμα.

2.6.10 (4). Εκφράζουμε πρώτα την ψ μέσω της ϕ: αν ℓ είναι μία ευθεία του πρώτου επιπέδου, θεωρούμε δύο τυχόντα σημεία της A, B. Τότε $\psi(\ell) = \psi(A \vee B) = \phi(A) \vee \phi(B)$. Προφανώς, αν πάρουμε δύο άλλα σημεία της ℓ, ας πούμε τα C, D (ή τα A, C, αν έχουμε το επίπεδο των 7 σημείων, οπότε οι ευθείες έχουν ακριβώς 3 σημεία) θα έχουμε ότι $\ell = A \vee B = C \vee D$, άρα $\psi(\ell) = \varphi(C) \vee \varphi(D) = \varphi(A) \vee \varphi(B)$.

Αναλόγως εκφράζεται η φ μέσω της ψ.

2.6.10 (5). Έστω ℓ τυχούσα ευθεία του πρώτου επιπέδου. Σύμφωνα με την προηγουμένη άσκηση, θα είναι $\psi(\ell) = \varphi(A) \vee \varphi(B) = \psi'(\ell)$, για οποιαδήποτε σημεία A, B της ℓ. Επειδή η τελευταία ισχύει για κάθε $\ell \in \mathcal{L}$, συνάγεται ότι $\psi = \psi'$.

2.6.10 (7). Για οποιοδήποτε $(P, \ell) \in \mathcal{P}_1 \times \mathcal{L}_1$ με $P \in \ell$, ο ορισμός του μορφισμού συνεπάγεται το επόμενο μεταθετικό διάγραμμα, που αποδεικνύει τον ισχυρισμό.

$$\begin{tikzcd}
(P,\ell)\in\mathcal{I}_1 \arrow[r, "(\varphi_1,\psi_1)"] \arrow[dr, "(\varphi_2\circ\varphi_1,\psi_2\circ\psi_1)"'] & (\varphi_1(P),\psi_1(\ell))\in\mathcal{I}_2 \arrow[d, "(\varphi_2,\psi_2)"] \\
& (\varphi_2(\varphi_1(P)),\psi_2(\psi_1(\ell)))\in\mathcal{I}_3
\end{tikzcd}$$

2.6.10 (8). Για τυχούσα ευθεία ℓ θέτουμε $\psi(\ell) := \varphi(A) \vee \varphi(B)$, όπου A, B είναι δύο οποιαδήποτε διαφορετικά σημεία της ℓ. Η ψ είναι καλά ορισμένη: πραγματικά, αν πάρουμε δύο άλλα σημεία της C και D, διαφορετικά μεταξύ τους καθώς και προς τα προηγούμενα (ή τα A, C, αν η ευθεία διαθέτει μόνον 3 σημεία), τότε η συγγραμμικότητα των A, B, C, D και η υπόθεση συνεπάγονται τη συγγραμμικότητα των $\varphi(A), \varphi(B), \varphi(C), \varphi(D)$. Επομένως, $\psi(\ell) = \varphi(A) \vee \varphi(B) = \varphi(C) \vee \varphi(D)$, που αποδεικνύει ότι ο ορισμός της $\psi(\ell)$ είναι ανεξάρτητος της επιλογής των σημείων της ℓ.

Κατόπιν διαπιστώνουμε ότι το ζεύγος (φ, ψ) ορίζει μορφισμό προβολικών επιπέδων: για τυχόν (P, ℓ) με $P \in \ell$, μπορούμε να γράψουμε ότι $\ell = A \vee B$, οπότε, όπως προηγουμένως, $\varphi(P) \in \varphi(A) \vee \varphi(B) = \psi(\ell)$.

Επειδή η φ είναι 1 – 1 και επί, το (φ, ψ) είναι ισομορφισός (βλ. Πόρισμα 2.6.6). Τέλος, το μονοσήμαντο της ψ είναι συνέπεια της Άσκησης 2.6.10 (5).

2.6.10 (9). Η σύνθεση δύο συγγραμμικοτήτων είναι προφανώς συγγραμμικότητα, σύμφωνα με την Άσκηση 2.6.10 (7). Το ουδέτερο στοιχείο είναι η συγγραμμικότητα $(1_{\mathcal{P}}, 1_{\mathcal{L}})$. Οποιαδήποτε συγγραμμικότητα $(\varphi, \psi) \in \mathcal{A}ut(\mathcal{P})$ διαθέτει αντίστροφη, την

$$(\varphi, \psi)^{-1} := (\varphi^{-1}, \psi^{-1})$$

[βλ. και την Άσκηση 2.6.10 (3)]. Η προσεταιριστική ιδιότητα ισχύει ως αποτέλεσμα της αντίστοιχης ιδιότητας, που έχει η σύνθεση των συνήθων απεικονίσεων.

2.7.3 (3). α) $[2, 1, 3] \vee [1, 0, -1] = < 1, -5, 1 >$.
β) Δεν ορίζεται ευθεία αφού $[-2, 0, 4] = [-2(1, 0, -2)] = [1, 0, -2]$, δηλαδή τα δεδομένα σημεία συμπίπτουν.

2.7.3 (4). α) Δεν υπάρχει τομή. β) $< 1, 0, 0 > \wedge < 1, -2, 1 > = [0, 1, 2]$.

2.7.3 (5). Είναι τα $[t, 1, 0]$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

(Περιλαμβάνονται οι λύσεις όλων των ασκήσεων)

3.6 (1). (i) Αν p, q είναι τα αντίστοιχα διανύσματα θέσης των P, Q, το ευθύγραμμο τμήμα $\overline{PQ}$ είναι εικόνα της παραμετρημένης καμπύλης

$$\alpha\colon [0,\ 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3\colon t \mapsto \alpha(t) := p + t(q-p).$$

(ii) Παρατηρούμε ότι

$$\|\alpha'(t)\| = \|q-p\| \neq 0,$$

δηλαδή η καμπύλη είναι κανονική, και το μήκος της δίνεται από την σχέση

$$L(\alpha) = \int_0^1 \|\alpha'(u)\|\, du = \int_0^1 \|q-p\| du = \|q-p\|.$$

Απ' το άλλο μέρος, επειδή $\alpha''(t) = 0$, το Θεώρημα 3.4.2 συνεπάγεται ότι $k_\alpha(t) = 0$, για κάθε $t \in [0,\ 1]$.

(iii) Επειδή το μήκος τόξου της α είναι

$$s(t) = \int_0^t \|\alpha'(u)\|\, du = \int_0^t \|q-p\|\, du = \|q-p\|t,$$

βλέπουμε ότι η απεικόνιση

$$s\colon [0, 1] \longrightarrow [0, \|q-p\|]\colon t \mapsto \|q-p\|t$$

είναι αμφιδιαφόριση με αντίστροφη την

$$h := s^{-1}\colon [0, \|q-p\|] \longrightarrow [0, 1]\colon s \mapsto \frac{s}{\|q-p\|},$$

οπότε η ζητούμενη αναπαραμέτρηση είναι η $\beta\colon [0, \|q-p\|] \to \mathbb{R}^3$ με

$$\beta(s) := (\alpha \circ h)(s) = \alpha\left(\frac{s}{\|q-p\|}\right) = p + \frac{q-p}{\|q-p\|}s.$$

(iv) Επειδή $\beta'(s) = \dfrac{q-p}{\|q-p\|}$, το μήκος της β είναι επίσης

$$L(\beta) = \int_0^{\|q-p\|} \|\beta'(u)\| du = \int_0^{\|q-p\|} du = \|q-p\|.$$

Τέλος, για την καμπυλότητα k_β της β έχουμε ότι $T(s) = \beta'(s) = \dfrac{q-p}{\|q-p\|}$, άρα $T'(s) = 0$ και [από την (3.3.2)] $k_\beta(s) = 0$.

3.6 (2). (i) Από την

$$\alpha'(t) = (-r\sin t, r\cos t),$$

προκύπτει ότι $\|\alpha'(t)\| = r \neq 0$, άρα $\alpha'(t) = r \neq 0$, δηλαδή η α είναι παραμέτρηση κανονικής καμπύλης.

(ii) Κάθε χρονική στιγμή t η ακτίνα συμπίπτει με την θέση του κινητού, δηλαδή με το σημείο $\alpha(t)$ και η ταχύτητα είναι $\alpha'(t)$. Επομένως,

$$< \alpha(t), \alpha'(t) >= -r^2 \cos t \sin t + r^2 \cos t \sin t = 0,$$

που σημαίνει ότι $\alpha(t) \perp \alpha'(t)$.

(iii) $\alpha''(t) = (-r\cos t, -r\sin t) = -\alpha(t)$.

(iv) Για το μήκος της α έχουμε $\|\alpha'(t)\| = r$, άρα

$$L(\alpha) = \int_0^{2\pi} \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r.$$

(v) Είναι $\|\alpha'(t)\| = r \neq 0$. Ορίζουμε την συνάρτηση μήκους τόξου

$$s\colon [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}\colon t \mapsto s(t) := \int_0^t \|\alpha'(u)\|\, du = rt.$$

Άρα η $s\colon [0, 2\pi] \to [0, 2\pi r]$ είναι αμφιδιαφόριση, με αντίστροφη την

$$h := s^{-1}\colon [0, 2\pi r] \longrightarrow [0, 2\pi]\colon s \mapsto \frac{s}{r},$$

και η ζητούμενη αναπαραμέτρηση είναι η $\beta\colon [0, 2\pi r] \to \mathbb{R}^2$ με

$$\beta(s) = (\alpha \circ h)(s) = \alpha\left(\frac{s}{r}\right) = \left(r\cos\frac{s}{r}, r\sin\frac{s}{r}\right).$$

Για την καμπυλότητα της τελευταίας έχουμε ότι

$$T(s) = \beta'(s) = \left(-\sin\frac{s}{r}, \cos\frac{s}{r}\right),$$

απ' όπου παίρνουμε

$$T'(s) = \left(-\frac{1}{r}\cos\frac{s}{r}, -\frac{1}{r}\sin\frac{s}{r}\right),$$

και

$$k(s) = \|T'(s)\| = \frac{1}{r}\cdot$$

3.6 (3). Προφανώς, η

$$\alpha(t) = (t, t^2); \qquad t \in \mathbb{R},$$

είναι μία παραμέτρηση της αναφερόμενης παραβολής. Είναι κανονική, αφού

$$\alpha'(t) = (1, 2t) \neq 0, \qquad \forall\ t \in \mathbb{R}.$$

Επειδή η α δεν είναι μοναδιαίας ταχύτητας, η καμπυλότητα υπολογίζεται από το Θεώρημα 3.4.2. Εφ' όσον

$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= (1, 2t) \equiv (1, 2t, 0),\\ \alpha''(t) &= (0, 2) \equiv (0, 2, 0),\\ \alpha'(t) \times \alpha''(t) &= (0, 0, 2)\end{aligned}$$

βρίσκουμε ότι

$$k(t) = 2(1 + 4t^2)^{-3/2}.$$

Η β είναι μία καμπύλη της οποίας η εικόνα είναι η ίδια παραβολή, όμως δεν είναι κανονικη, αφού $\beta'(t) = (3t^2, 6t^5)$, άρα το $t = 0$ είναι σημείο ανωμαλίας.

3.6 (4). Η καμπύλη $\alpha(t) = (t, f(t))$, $t \in \mathbb{R}$, έχει εικόνα ακριβώς το γράφημα της f. Για την α έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= (1, f'(t)) \equiv (1, f'(t), 0),\\ \alpha''(t) &= (0, f''(t)) \equiv (0, f''(t), 0),\\ \alpha'''(t) &= (0, f'''(t)) \equiv (0, f'''(t), 0),\\ \alpha'(t) \times \alpha''(t) &= (0, 0, f''(t)).\end{aligned}$$

Επειδή

$$\|\alpha'(t)\| = \left(1 + f'(t)^2\right)^{1/2} \neq 0; \qquad \forall\ t \in \mathbb{R},$$

έχουμε κανονική καμπύλη, που εν γένει δεν είναι μοναδιαίας ταχύτητας. Οπότε, σύμφωνα με Θεώρημα 3.5.1, είναι:

$$T(t) = \frac{1}{(1 + f'(t)^2)^{1/2}} \cdot (1, f'(t), 0) \equiv \frac{1}{(1 + f'(t)^2)^{1/2}} \cdot (1, f'(t)),$$

$$\begin{aligned}N(t) &= \frac{f''(t)}{|f''(t)| \cdot (1 + f'(t)^2)^{1/2}} \cdot (-f'(t), 1, 0)\\ &\equiv \frac{f''(t)}{|f''(t)| \cdot (1 + f'(t)^2)^{1/2}} \cdot (-f'(t), 1),\end{aligned}$$

$$B(t) = \left(0, 0, \frac{f''}{|f''|}\right) = (0, 0, \pm 1) = \pm e_3.$$

Η καμπυλότητα, βάσει του Θεωρήματος 3.4.2, είναι

$$k(t) = \frac{|f''(t)|}{(1 + f'(t)^2)^{3/2}}.$$

Είδαμε ότι $B(t) = \pm e_3$ (σταθερά). Αυτό συμβαίνει σε όλες τις επίπεδες καμπύλες. Για λέπτομέρειες παραπέμπουμε στις Σημειώσεις [7]. Προφανώς, αφού η $\alpha(t)$ είναι επίπεδη καμπύλη, $\tau = 0$ (βλ. Θεώρημα 3.3.5).

3.6(5). Είναι

$$T(t) = \alpha'(t) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t, \cos t, -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\right),$$

άρα

$$\|\alpha'(t)\| = \left(\frac{1}{2}\sin^2 t + \cos^2 t + \frac{1}{2}\sin^2 t\right)^{1/2} = 1,$$

δηλαδή η α είναι καμπύλη *μοναδιαίας ταχύτητας*, με

$$L(\alpha) = \int_0^{2\pi} \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi.$$

Για την καμπυλότητα έχουμε

$$T'(t) = \alpha''(t) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t, -\sin t, -\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\right),$$

οπότε

$$k(t) = \|T'(t)\| = \left(\frac{1}{2}\cos^2 t + \sin^2 t + \frac{1}{2}\cos^2 t\right)^{1/2} = 1.$$

Παρατηρούμε ότι

$$B(t) = T(t) \times N(t) = \alpha'(t) \times \alpha''(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-e_1 + e_3) = c$$

άρα $B'(t) = 0$, και

$$\tau(t) = - < N(t), B'(t) >= 0,$$

δηλαδή, τελικά, η α είναι επίπεδη καμπύλη.

3.6(6). Θέτοντας $x = a\cos t$ και $y = b\sin t$, έχουμε ότι

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

άρα πρόκειται για έλλειψη.

Βρίσκουμε:

$$\alpha'(t) = (-a\sin t, b\cos t) \equiv (-a\sin t, b\cos t, 0),$$

άρα

$$\|\alpha'(t)\| = \left(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\right)^{1/2}.$$

Επίσης

$$\alpha''(t) = (-a\cos t, -b\sin t) \equiv (-a\cos t, -b\sin t, 0)$$

και

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = abe_3,$$

απ᾽ όπου
$$\|a'(t)\times a''(t)\| = ab,$$
και τελικά
$$k(t) = \frac{\|a'(t)\times a''(t)\|}{\|a'(t)\|^3} = \frac{ab}{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}\cdot$$

3.6 (7). (i) Είναι
$$a'(t) = (-r\sin t, r\cos t, b),$$
επομένως
$$\|a'(t)\| = (r^2+b^2)^{1/2} =: c > 0.$$
Θεωρούμε την
$$s\colon [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}\colon t \mapsto \int_0^t \|a'(u)\|du = tc$$
και την αντίστροφή της
$$h\colon [0,2\pi c] \longrightarrow [0,2\pi]\colon s \mapsto \frac{s}{c}\cdot$$
Αρα η ζητούμενη αναπαραμέτρηση είναι η
$$\beta\colon [0,2\pi c] \longrightarrow \mathbb{R}^3\colon s \mapsto \beta(s) = (a\circ h)(s) = \Big(r\cos\frac{s}{c}\,,\ r\sin\frac{s}{c}\,,\ \frac{b}{c}s\Big).$$
(ii) Για την καμπυλότητα της β έχουμε
$$T(s) = \beta'(s) = \Big(-\frac{r}{c}\sin\frac{s}{c}\,,\ \frac{r}{c}\cos\frac{s}{c}\,,\ \frac{b}{c}\Big),$$
άρα
$$T'(s) = \Big(-\frac{r}{c^2}\cos\frac{s}{c}\,,\ -\frac{r}{c^2}\sin\frac{s}{c}\,,\ 0\Big)$$
και
$$k(s) = \|T'(s)\| = \frac{r}{c^2} \neq 0.$$
Σχετικά με την στρέψη, είναι:
$$N(s) = \frac{1}{k(s)}T'(s) = \Big(-\cos\frac{s}{c}\,,\ -\sin\frac{s}{c}\,,\ 0\Big),$$
$$B(s) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ T_1 & T_2 & T_3 \\ N_1 & N_2 & N_3 \end{vmatrix} = \Big(\frac{b}{c}\sin\frac{s}{c}\,,\ -\frac{b}{c}\cos\frac{s}{c}\,,\ \frac{r}{c}\Big),$$
απ΄ όπου προκύπτει ότι
$$B'(s) = \Big(\frac{b}{c^2}\cos\frac{s}{c}, \frac{b}{c^2}\sin\frac{s}{c}, 0\Big)$$

και

$$\tau(s) = - < N(s), B'(s) > = \frac{b}{c^2} \cdot$$

(iii) Για τη γωνία φ έχουμε ότι

$$\cos\varphi = \frac{< \alpha'(t), e_3 >}{\|\alpha'(t)\| \cdot \|e_3\|} = \frac{b}{c} \cdot$$

Παρατηρούμε ότι η φ δίνεται και από τη σχέση

$$\cos\varphi = \frac{< T(s), e_3 >}{\|T(s)\| \cdot \|e_3\|} = < T(s), e_3 > = \frac{b}{c} \cdot$$

(iv) Η ***δεύτερη κάθετος*** της β στο σημείο $\beta(s)$ είναι η ευθεία

$$\epsilon_s(t) = \beta(s) + tB(s); \qquad t \in \mathbb{R},$$

δηλαδή η ευθεία που διέρχεται από το $\beta(s)$ και έχει κατεύθυνση το δεύτερο κάθετο διάνυσμα $B(s)$. Επομένως, για την γωνία ω του τελευταίου ερωτήματος έχουμε ότι

$$\cos\omega = \frac{< B(s), e_3 >}{\|B(s)\| \cdot \|e_3\|} = < B(s), e_3 > = \frac{r}{c} \cdot$$

3.6 (8). Είναι:

$$\begin{aligned}
&\alpha'(t) = (1, t) \equiv (1, t, 0),\\
&\|\alpha'(t)\| = (1 + t^2)^{1/2} > 0,\\
&\alpha''(t) = (0, 1) \equiv (0, 1, 0),\\
&\alpha'(t) \times \alpha''(t) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = e_3,\\
&\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\| = 1.
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$k(t) = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{1}{(1 + t^2)^{3/2}} \cdot$$

3.6 (9). Παρατηρούμε ότι

$$\alpha'(t) = (2t, 3t^2)$$

άρα $a'(0) = (0,0)$ και η a δεν είναι κανονική σε όλο το $\mathbb{R}$. Είναι όμως κανονική στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$. Για $t \neq 0$ έχουμε

$$\begin{aligned} \|a'(t)\| &= (4t^2 + 9t^4)^{1/2}, \\ a''(t) &= (2, 6t), \\ a'(t) \times a''(t) &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2t & 3t^2 & 0 \\ 2 & 6t & 0 \end{vmatrix} = 6t^2 e_3 = (0, 0, 6t^2), \\ \|a'(t) \times a''(t)\| &= 6t^2, \end{aligned}$$

οπότε

$$k(t) = \frac{\|a'(t) \times a''(t)\|}{\|a'(t)\|^3} = \frac{6t^2}{(4t^2 + 9t^4)^{3/2}}.$$

3.6 (10). Η $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ διαγράφει τον κύκλο με φορά αντίθετη των δεικτών του ωρολογίου και έχει $\gamma(0) = (1, 0)$.

Η $\beta(t) = (\cos(t + \pi/2), \sin(t + \pi/2))$ διαγράφει τον κύκλο με την ίδια φορά, με $\beta(0) = (0, 1)$.

Η ***αντίθετη καμπύλη*** της β, δηλαδή η

$$a(t) = \beta(-t) = (\cos(\pi/2 - t), \sin(\pi/2 - t)),$$

διαγράφει τον κύκλο με την αντίθετη φορά και έχει $a(0) = \beta(0) = (0, 1)$.

3.6 (11). Αφού $< a(0), v >= 0$, αρκεί να δείξουμε ότι $< a(t), v >$ είναι σταθερό ή, ισοδύναμα, ότι $< a(t), v >' = 0$. Πράγματι,

$$< a(t), v >' \equiv < a, v >' (t) = < a'(t), v > + < a(t), v' > = 0 + < a(t), 0 >= 0.$$

3.6 (12). Η εφαπτομένη της a στο τυχόν σημείο $a(t)$ είναι η ευθεία

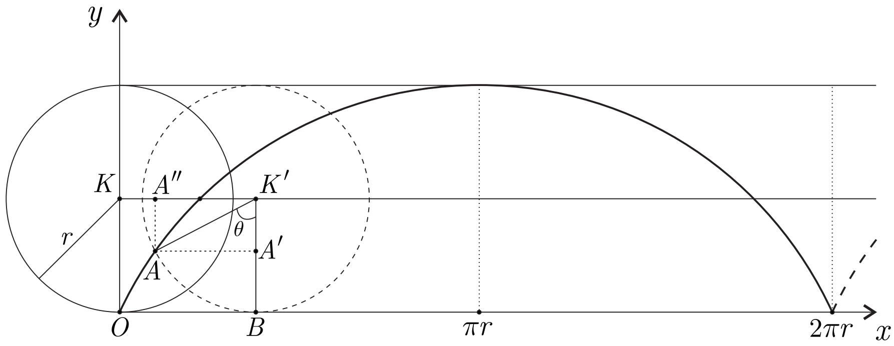
$$\epsilon_t(s) = a(t) + s a'(t); \qquad t \in \mathbb{R},$$

που είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $a'(t) = (3, 6t, 6t^2)$ (να σημειωθεί εδώ ότι το s δεν είναι κατ' ανάγκην μήκος τόξου). Η ευθεία που ορίζεται από τις συνθήκες $y = 0$ και $x = z$ περιέχει το διάνυσμα $v = (1, 0, 1)$. Επειδή η ζητούμενη γωνία ϑ είναι η γωνία των ανωτέρω διανυσμάτων, βρίσκουμε ότι

$$\cos \vartheta = \frac{< a'(t), v >}{\|a'(t)\| \cdot \|v\|} = \frac{3 + 6t^2}{\sqrt{9 + 36t^2 + 36t^4} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

3.6 (13). (i) Έστω ότι το A, από την αρχική του θέση στο $(0, 0)$, μετακινείται στη θέση $A = (x, y)$, οπότε το κέντρο $K = (0, r)$ του κύκλου θα μετακινηθεί κατά ένα μήκος a

και θα έρθει στο σημείο $K' = (a, r)$.



Τότε στον άξονα $x'Ox$ ακουμπά το σημείο B και το τόξο AB έχει μήκος a. Αν ϑ είναι η γωνία $\widehat{AKB}$ τότε $a = r\vartheta$. Συμβολίζουμε με A' και A'' τις προβολές του A στις ευθείες $K'B$ και KK'. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} x &= OB - AA' = r\vartheta - r\sin\vartheta = r(\vartheta - \sin\vartheta), \\ y &= OK - AA'' = r - r\cos\vartheta = r(1 - \cos\vartheta), \end{aligned}$$

άρα η κυκλοειδής περιγράφεται από την παραμέτρηση

$$a(\vartheta) = \big(r(\vartheta - \sin\vartheta), r(1 - \cos\vartheta)\big).$$

(ii) Παρατηρούμε ότι

$$a'(\vartheta) = \big(r(1 - \cos\vartheta), r\sin\vartheta\big),$$

απ᾽ όπου παίρνουμε

$$a'(0) = (0,0), \;\; a'(\pi) = (2r,0), \;\; a'(2\pi) = (0,0).$$

Άρα, για $\vartheta = 0$ και $\vartheta = 2\pi$, η εφαπτομένη δεν ορίζεται, ενώ για $\vartheta = \pi$ είναι

$$\begin{aligned} \epsilon_\pi(s) &= a(\pi) + s a'(\pi) \\ &= \big(r(\pi - \sin\pi), r(1 - \cos\pi)\big) + s\big(r(1 - \cos\pi), r\sin\pi\big) \\ &= (r\pi, 2r) + s(2r, 0) = (r\pi + 2rs, 2r). \end{aligned}$$

(iii) Χρησιμοποιώντας τους γνωστούς τριγωνομετρικούς τύπους του διπλασίου τόξου, βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} \|a'(\vartheta)\|^2 &= r^2(1 + \cos^2\vartheta - 2\cos\vartheta + \sin^2\vartheta) \\ &= 2r^2(1 - \cos\vartheta) = 2r^2\left(1 - \cos^2\frac{\vartheta}{2} + \sin^2\frac{\vartheta}{2}\right) \\ &= 4r^2\sin^2\frac{\vartheta}{2}, \end{aligned}$$

οπότε

$$\|\alpha'(\vartheta)\| = 2r\left|\sin\frac{\vartheta}{2}\right| = 2r\sin\frac{\vartheta}{2}, \qquad 0 \le \vartheta \le 2\pi.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} L(\alpha) &= \int_0^{2\pi} \|\alpha'(\vartheta)\| d\vartheta = 2r\int_0^{2\pi} \sin\frac{\vartheta}{2}\, d\vartheta \\ &= 2r\int_0^{\pi} 2\sin\varphi\, d\varphi = 4r\left(-\cos\varphi\Big|_0^{\pi}\right) \\ &= 4r(-\cos\pi + \cos 0) = 8r. \end{aligned}$$

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι ανάλογα συμπεράσματα ισχύουν για όλα τα διαστήματα της μορφής $(2k\pi, 2(k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Η καμπύλη είναι κανονική μόνο σε αυτά.

3.6 (14) (i) Θέτουμε $\omega = xT + yN + zB$, και θα προσδιορίσουμε τους συντελεστές x, y, z. Τότε

$$\begin{aligned} \omega \times T &= xT \times T + yN \times T + zB \times T \\ &= x0 - yB + zN = -yB + zN \end{aligned}$$

οπότε, βάσει της υπόθεσης $T' = \omega \times T$,

$$-yB + zN = T' = kN,$$

απ' την οποίαν προκύπτει ότι $y = 0$ και $z = k$. Αναλόγως,

$$\begin{aligned} \omega \times N &= xT \times N + yN \times N + zB \times N \\ &= xB + y0 + -zT = xB - zT \end{aligned}$$

άρα, λόγω της υπόθεσης $N' = \omega \times N$,

$$xB - zT = N' = -kT + \tau B$$

οπότε $x = \tau$ και $z = k$. Δηλαδή, αν υπάρχει τέτοιο διάνυσμα, θα είναι το

$$\omega = \tau T + kB.$$

Αποδεικνύουμε ότι το ω ικανοποιεί και την τρίτη ισότητα:

$$\omega \times B = (\tau T + kB) \times B = (\tau T \times B) + kB \times B = -\tau N + 0 = B'.$$

Άρα αποδείχθηκε η ύπαρξη (και το μονοσήμαντο) του ω.

(ii) Από τη σχέση $T' = kN$ παίρνουμε ότι

$$T'' = k'N + kN' = k'N + k(-kT + \tau B) = -k^2T + k'N + \tau kB.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} T' \times T'' &= kN \times (-k^2T + k'N + \tau kB) \\ &= -k^3(N \times T) + kk'(N \times N) + \tau k^2(N \times B) \\ &= k^3B + 0 + \tau k^2T = k^2(kB + \tau T) = k^2\omega. \end{aligned}$$

3.6 (15). Η εξίσωση της εφαπτομένης της β στο $\beta(s)$ είναι $\epsilon_s(t) = \beta(s) + t\beta'(s)$, $t \in \mathbb{R}$. Λόγω της υπόθεσης, θα υπάρχει $t_s \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε $\epsilon_s(t_s) = p$, όπου $p \in \mathbb{R}^3$ είναι το διάνυσμα θέσης του P, δηλαδή

$$\beta(s) + t_s\beta'(s) = p.$$

Αν πάρουμε ένα άλλο σημείο της καμπύλης, π.χ. $\beta(\underline{s})$, τότε, για την εφαπτομένη $\epsilon_{\underline{s}}(t) = \beta(\underline{s}) + t\beta'(\underline{s})$ θα υπάρχει $t_{\underline{s}}$, έτσι ώστε

$$\beta(\underline{s}) + t_{\underline{s}}\beta'(\underline{s}) = p,$$

και παρόμοια και για τα άλλα $s \in J$. Επομένως, για κάθε $s \in J$, υπάρχει $\lambda(s) \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε

$$(*) \qquad \beta(s) + \lambda(s)\beta'(s) = p,$$

που εκφράζει ακριβώς την συνθήκη της εκφώνησης.

Η απεικόνιση $s \mapsto \lambda(s)$ είναι διαφορίσιμη, αφού

$$\begin{aligned} (*) &\Rightarrow \lambda(s)\beta'(s) = p - \beta(s) \\ &\Rightarrow < \lambda(s)\beta'(s), \beta'(s) > = < p - \beta(s), \beta'(s) > \\ &\Rightarrow \lambda(s) < T(s), T(s) > = < p - \beta(s), \beta'(s) > \\ &\Rightarrow \lambda(s) = < p - \beta(s), \beta'(s) > . \end{aligned}$$

Παραγωγίζοντας την $(*)$ έχουμε, για κάθε $s \in J$:

$$\begin{aligned} (*) &\Rightarrow \beta'(s) + \lambda'(s)\beta'(s) + \lambda(s)\beta''(s) = 0 \\ &\Rightarrow T(s) + \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) = 0 \\ &\Rightarrow (1 + \lambda'(s))T(s) + \lambda(s)k(s)N(s) = 0 \\ &\Rightarrow 1 + \lambda'(s) = \lambda(s)k(s) = 0 \\ &\Rightarrow \lambda'(s) = -1 \quad \text{και} \quad \lambda(s)k(s) = 0 \\ &\Rightarrow \lambda(s) = c - s \quad \text{και} \quad (c - s)k(s) = 0 \\ &\Rightarrow k(s) = 0, \end{aligned}$$

που ισοδυναμεί με το ότι η β είναι ευθεία. Προφανώς $c - s \neq 0$, διαφορετικά θα είχαμε ότι $\lambda'(s) = 0$ (άτοπο). Άλλωστε, και η $\lambda(s) = 0$ συνεπάγεται ότι $\beta(s) = p$, $\forall\ s \in J$, δηλαδή η β θα εκφυλιζόταν σε σημείο (επίσης άτοπο).

3.6(16). Η ***πρώτη κάθετος*** της α στο $\alpha(s)$ είναι η ευθεία

$$\epsilon_s(t) = \alpha(s) + t\,N(s); \qquad t \in \mathbb{R},$$

δηλαδή η ευθεία που διέρχεται από το $\alpha(s)$ και έχει κατεύθυνση το πρώτο κάθετο διάνυσμα $N(s)$. Ακολουθώντας το σκεπτικό της προηγούμενης άσκησης, η υπόθεση συνεπάγεται ότι, για κάθε $s \in J$, υπάρχει $\lambda(s) \in \mathbb{R}$ με την ιδιότητα

$$(*) \qquad \alpha(s) + \lambda(s)N(s) = p,$$

(: p το διάνυσμα θέσης του P). Η λ είναι διαφορίσιμη συνάρτηση: από την $(*)$ προκύπτει ότι

$$\lambda(s) = \langle \lambda(s)N(s), N(s) \rangle = \langle p - \alpha(s), N(s) \rangle.$$

Παραγωγίζοντας τώρα την $(*)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} (*) &\Rightarrow\ \alpha'(s) + \lambda'(s)N(s) + \lambda(s)N'(s) = 0 \\ &\Rightarrow\ T(s) + \lambda'(s)N(s) + \lambda(s)(-k(s)T(s) + \tau(s)B(s)) = 0 \\ &\Rightarrow\ (1 - \lambda(s)k(s))T(s) + \lambda'(s)N(s) + \lambda(s)\tau(s)B(s) = 0 \\ &\Rightarrow\ 1 - \lambda(s)k(s) = \lambda'(s) = \lambda(s)\tau(s) = 0 \\ &\Rightarrow\ \lambda = c \text{ (σταθερά)}, \ \ \lambda k(s) = 1 \ \text{ και } \ \lambda\tau(s) = 0. \end{aligned}$$

Η δεύτερη ισότητα δίνει $\lambda \neq 0$, η τελευταία δίνει $\tau = 0$, δηλαδή η α είναι επίπεδη καμπύλη, και από την $k(s) = 1/\lambda =$ σταθερά έχουμε ότι η α είναι τμήμα κύκλου.

Το αντίστροφο είναι άμεσο: το P είναι το κέντρο του κύκλου.

3.6(17). Υπενθυμίζεται ότι η ***δεύτερη κάθετος*** της α στο $\alpha(s)$ [βλ. λύση της Άσκησης 3.6(7)] είναι η ευθεία που διέρχεται από το $\alpha(s)$ και έχει κατεύθυνση το δεύτερο κάθετο διάνυσμα $B(s)$, δηλαδή η

$$\epsilon_s(t) = \alpha(s) + tB(s); \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Με τους συλλογισμούς των δύο προηγουμένων ασκήσεων, ας υποθέσουμε ότι, για κάθε $s \in J$, υπάρχει $\lambda(s) \in \mathbb{R}$ με

$$(*) \qquad \alpha(s) + \lambda(s)B(s) = p.$$

Η λ είναι διαφορίσιμη επειδή

$$\lambda(s) = \langle \lambda(s)B(s), B(s) \rangle = \langle P - \alpha(s), B(s) \rangle,$$

άρα, παραγωγίζοντας την $(*)$, έχουμε ότι

$$\alpha'(s) + \lambda(s)B'(s) + \lambda'(s)B(s) = 0,$$

ή, ισοδύναμα,

$$T(s) - \lambda(s)\tau(s)N(s) + \lambda'(s)B(s) = 0,$$

η οποία ισχύει μόνο όταν

$$1 = -\lambda(s)\tau(s) = \lambda'(s) = 0,$$

που είναι άτοπο.

3.6 (18). $(\Leftarrow)$: Προφανές.
$(\Rightarrow)$: Από την υπόθεση, για κάθε $s \in J$, υπάρχει $\lambda(s) \in \mathbb{R}$ ώστε

$$(*) \qquad \lambda(s)T(s) = u = \text{σταθ.}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\lambda(s) = < \lambda(s)T(s), T(s) > = < u, T(s) >,$$

δηλαδή η $\lambda(s)$ είναι διαφορίσιμη συνάρτηση. Παραγωγίζοντας την $(*)$ έχουμε:

$$\begin{aligned}(*) \ \Rightarrow\ & \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)T'(s) = 0\\ \Rightarrow\ & \lambda'(s)T(s) + \lambda(s)k(s)N(s) = 0\\ \Rightarrow\ & \lambda'(s) = \lambda(s)k(s) = 0.\end{aligned}$$

Από την ισότητα $\lambda'(s) = 0$ προκύπτει ότι $\lambda(s) = c$. Αν $c = 0$, τότε $u = c\,T = 0$, που είναι άτοπο. Άρα $c \neq 0$, και η ισότητα $c\,k(s) = 0$ δίνει ότι $k = 0$, που ισοδυναμεί με το ότι η α είναι ευθεία (Θεώρημα 3.3.5).

3.6 (19). (i) Έστω ότι έχουμε καμπύλη $\beta(s)$ μοναδιαίας ταχύτητας. Ενα $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ είναι σημείο του κάθετου επίπεδου στο σημείο $\beta(s_o)$ εάν και μόνο εάν η διαφορά $(x, y, z) - \beta(s_o)$ ανήκει στον υπόχωρο που παράγουν τα $N(s_o)$ και $B(s_o)$, δηλαδή είναι κάθετη στο $T(s_o) = \beta'(s_o)$. Άρα τα σημεία (x, y, z) του κάθετου επίπεδου στο $\beta(s_o)$ ικανοποιούν την σχέση

$$(*) \qquad < (x, y, z) - \beta(s_o), T(s_o) > = 0,$$

ή, ισοδύναμα,

$$< (x, y, z) - \beta(s_o), \beta'(s_o) > = 0.$$

(ii) Έστω τώρα ότι έχουμε μια κανονική καμπύλη $\alpha(t)$, όχι κατ' ανάγκη μοναδιαίας ταχύτητας. Τα σημεία (x, y, z) του κάθετου επίπεδου στο $\alpha(t_o)$ ικανοποιούν την αντίστοιχη της $(*)$

$$< (x, y, z) - \alpha(t_o), T(t_o) > = 0.$$

Μέσω της (3.5.1), η προηγούμενη μετασχηματίζεται στην

$$\left\langle (x, y, z) - a(t_o), \frac{a'(t_o)}{\|a(t_o)\|} \right\rangle = 0,$$

ή, ισοδύναμα,

$$< (x, y, z) - a(t_o), a'(t_o) > = 0.$$

Εφαρμογή. Σύμφωνα με αυτά που είπαμε προηγουμένως, το σημείο $(0, 0, 0)$ ανήκει στο κάθετο επίπεδο σε κάθε σημείο $\beta(t)$, αν

$$< (0, 0, 0) - \beta(t), \beta'(t) > = < \beta(t), \beta'(t) > = 0, \qquad \forall\ t \in \mathbb{R}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\beta'(t) = (2a \sin t \cos t, a(\cos^2 t - \sin^2 t), -a \sin t).$$

Συνεπώς,

$$\begin{gathered} < \beta(t), \beta'(t) > = \\ < (a \sin^2 t, a \sin t \cos t, a \cos t), (2a \sin t \cos t, a(\cos^2 t - \sin^2 t), -a \sin t) > = \\ 2a^2 \sin^3 t \cos t + a^2 \sin t \cos^3 t - a^2 \sin^3 t \cos t - a^2 \sin t \cos t = \\ a^2 \sin^3 t \cos t + a^2 \sin t \cos^3 t - a^2 \sin t \cos t = \\ a^2 \sin t \cos t(\sin^2 t + \cos^2 t) - a^2 \sin t \cos t = 0. \end{gathered}$$

3.6 (20). (i) Έστω ότι έχουμε καμπύλη $\beta(s)$ μοναδιαίας ταχύτητας. Ενα $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ είναι σημείο του εγγύτατου επίπεδου στο σημείο $\beta(s_o)$ εάν και μόνο εάν η διαφορά $(x, y, z) - \beta(s_o)$ ανήκει στον υπόχωρο που παράγουν τα $T(s_o)$ και $N(s_o)$, δηλαδή είναι κάθετη στο $B(s_o)$. Άρα τα σημεία (x, y, z) του εγγύτατου επίπεδου στο $\beta(s_o)$ ικανοποιούν την σχέση

$$(*) \qquad < (x, y, z) - \beta(s_o), B(s_o) > = 0.$$

Επειδή

$$B(s_o) = T(s_o) \times N(s_o) = \beta'(s_o) \times \frac{T'(s_o)}{k(s_o)} = \beta'(s_o) \times \frac{\beta''(s_o)}{k(s_o)},$$

η $(*)$ ισοδυναμεί με την

$$< (x, y, z) - \beta(s_o), \beta'(s_o) \times \beta''(s_o) > = 0.$$

(ii) Έστω τώρα ότι έχουμε μια κανονική καμπύλη $a(t)$, όχι κατ' ανάγκη μοναδιαίας ταχύτητας. Τα σημεία (x, y, z) του εγγυτάτου επίπεδου στο $a(t_o)$ ικανοποιούν την αντίστοιχη της $(*)$

$$< (x, y, z) - a(t_o), B(t_o) > = 0.$$

Χρησιμοποιώντας την ισότητα [βλ. (3.5.3)]

$$B(t_o) = \frac{a'(t_o) \times a''(t_o)}{\|a'(t_o) \times a''(t_o)\|}$$

παίρνουμε την συνθήκη

$$\left\langle (x, y, z) - a(t_o), \frac{a'(t_o) \times a''(t_o)}{\|a'(t_o) \times a''(t_o)\|} \right\rangle = 0,$$

και, ισοδύναμα,

$$< (x, y, z) - a(t_o), a'(t_o) \times a''(t_o) > = 0.$$

Εφαρμογή. Τα σημεία του ζητούμενου εγγύτατου επίπεδου ικανοποιούν την συνθήκη

$$< (x, y, z) - a\left(\frac{\pi}{2}\right), \ a'\left(\frac{\pi}{2}\right) \times a''\left(\frac{\pi}{2}\right) > = 0.$$

Υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}
&a\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\cos\frac{\pi}{2}, \sin\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \left(0, 1, \frac{\pi}{2}\right)\\
&a'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)\\
&a'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(-\sin\frac{\pi}{2}, \cos\frac{\pi}{2}, 1\right) = (-1, 0, 1)\\
&a''(t) = (-\cos t, -\sin t, 0)\\
&a''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(-\cos\frac{\pi}{2}, -\sin\frac{\pi}{2}, 0\right) = (0, -1, 0)
\end{aligned}$$

Άρα η εξίσωση του εγγύτατου επίπεδου γίνεται

$$\left\langle (x, y, z) - \left(0, 1, \frac{\pi}{2}\right), \ (-1, 0, 1) \times (0, -1, 0) \right\rangle = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\left\langle \left(x, y-1, z-\frac{\pi}{2}\right), \ (-1, 0, 1) \times (0, -1, 0) \right\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z-\frac{\pi}{2} \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \ \Leftrightarrow$$

$$x + z = \frac{\pi}{2} \cdot$$

3.6 (21). (i) Έστω ότι έχουμε καμπύλη $\beta(s)$ μοναδιαίας ταχύτητας. Ενα $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ είναι σημείο του ευθειοποιούντος επιπέδου στο σημείο $\beta(s_o)$ εάν και μόνο εάν η διαφορά $(x, y, z) - \beta(s_o)$ ανήκει στον υπόχωρο που παράγουν τα $T(s_o)$ και $B(s_o)$, δηλαδή είναι κάθετη στο $N(s_o)$. Άρα τα σημεία (x, y, z) του ευθειοποιούντος επιπέδου στο $\beta(s_o)$ ικανοποιούν την συνθήκη

$$(*) \qquad < (x, y, z) - \beta(s_o), N(s_o) > = 0.$$

Επειδή

$$N(s_o) = \frac{T'(s_o)}{k(s_o)} = \frac{\beta''(s_o)}{k(s_o)},$$

η $(*)$ μετασχηματίζεται στην

$$\left\langle (x,y,z) - \beta(s_o),\ \frac{\beta''(s_o)}{k(s_o)} \right\rangle = 0,$$

ή, ισοδύναμα, στην

$$< (x,y,z) - \beta(s_o),\ \beta''(s_o) > = 0.$$

(ii) Έστω τώρα ότι έχουμε μια κανονική καμπύλη $\alpha(t)$, όχι κατ' ανάγκη μοναδιαίας ταχύτητας. Τα σημεία (x,y,z) του ευθειοποιούντος επιπέδου στο $\alpha(t_o)$ ικανοποιούν την αντίστοιχη της $(*)$

$$< (x,y,z) - \alpha(t_o), N(t_o) > = 0.$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι [βλ. (3.5.2)]

$$N(t_o) = \frac{(\alpha'(t_o) \times \alpha''(t_o)) \times \alpha'(t_o)}{\|\alpha'(t_o) \times \alpha''(t_o)\| \cdot \|\alpha'(t_o)\|},$$

βρίσκουμε ότι

$$\left\langle (x,y,z) - \alpha(t_o),\ \frac{(\alpha'(t_o) \times \alpha''(t_o))\alpha'(t_o)}{\|\alpha'(t_o) \times \alpha''(t_o)\| \cdot \|\alpha'(t_o)\|} \right\rangle = 0,$$

και, ισοδύναμα,

$$(**) \qquad < (x,y,z) - \alpha(t_o),\ (\alpha'(t_o) \times \alpha''(t_o)) \times \alpha'(t_o) > = 0.$$

Εφαρμογή. Σύμφωνα με την $(**)$, τα σημεία του ζητούμενου ευθειοποιούντος επιπέδου ικανοποιούν την συνθήκη

$$< (x,y,z) - \alpha(1),\ (\alpha'(1) \times \alpha''(1)) \times \alpha'(1) > = 0.$$

Υπολογίζουμε:

$$\alpha(1) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$$

$$(x,y,z) - \alpha(1) = (x-1, y-\frac{1}{2}, z-\frac{1}{3})$$

$$\alpha'(t) = (1, t, t^2)$$

$$\alpha'(1) = (1,1,1)$$

$$\alpha''(t) = (0,1,2t)$$

$$\alpha''(1) = (0,1,2)$$

$$\alpha'(1) \times \alpha''(1) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (1,-2,1)$$

Άρα η ζητούμενη συνθήκη είναι

$$< (x-1, y-1/2, z-1/3), (1,-2,1)\times(1,1,1) > = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

που ισοδυναμεί με την

$$x - z = \frac{2}{3}\cdot$$

3.6 (22). (i) Παρατηρούμε ότι $\beta'(s) = T'(s) = k(s)N(s)$. Επομένως, $\|\beta'(s)\| = k(s) \neq 0$, δηλαδή η β είναι κανονική καμπύλη.

(ii) Εφ' όσον η συνάρτηση μήκους τόξου δίνεται από την σχέση

$$\sigma(s) = \int_{s_o}^{s} \|\beta'(u)\|\, du,$$

έχουμε ότι

$$\sigma'(s) = \|\beta'(s)\| = \|T'(s)\| = \|k(s)N(s)\| = k(s).$$

(iii) Επειδή η β δεν είναι απαραίτητα μοναδιαίας ταχύτητας (κάτι τέτοιο θα συνέβαινε αν $k = 1$, πράγμα που δεν δηλώνεται εδώ), θα χρησιμοποιήσουμε τους τύπους της καμπυλότης και στρέψης που δίνονται από τα Θεωρήματα 3.4.2 και 3.4.3 αντιστοίχως.

Για το σκοπό αυτό βρίσκουμε (παραλείποντας τη μεταβλητή s):

$$\begin{aligned} \beta' &= T' = kN, \\ \beta'' &= k'N + kN' \\ &= k'N + k(-kT + \tau B) \\ &= -k^2T + k'N + k\tau B, \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} \beta' \times \beta'' &= kN \times (-k^2 + k'N + k\tau B) \\ &= -k^3 N\times T + kk'N\times N + k^2\tau N\times B \\ &= k^2\tau T + 0 + k^3B = k^2\tau T + 0N + k^3B, \end{aligned}$$

και

$$\|\beta' \times \beta''\|^2 = k^6 + k^4\tau^2 = k^4(k^2 + \tau^2).$$

Επομένως,

$$\bar{k} = \frac{\|\beta' \times \beta''\|}{\|\beta'\|^3} = \frac{k^2(k^2+\tau^2)^{1/2}}{k^3} = \frac{(k^2+\tau^2)^{1/2}}{k}\cdot$$

Για τον προσδιορισμό της στρέψης χρειαζόμαστε και την β'''. Παραγωγίζοντας την β'', που βρήκαμε πιό πάνω, έχουμε:

$$\begin{aligned}\beta''' &= -2kk'T - k^2T' + k''N + k'N' + k'\tau B + k\tau' B + k\tau B'\\ &= -2kk'T - k^3N + k''N + k'(-kT + \tau B) + (k'\tau + k\tau')B + k\tau(-\tau N)\\ &= -3kk'T + (-k^3 + k'' - k\tau^2)N + (2k'\tau + k\tau')B.\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\overline{\tau} = \frac{<\beta' \times \beta'', \beta'''>}{\|\beta' \times \beta''\|^2} = \frac{k^3(k\tau' - k'\tau)}{k^4(k^2+\tau^2)} = \frac{k\tau' - k'\tau}{k(k^2+\tau^2)}.$$

3.6 (23). (α) Η β είναι κανονική:

$$\beta'(s) = \alpha'(s) + N'(s) = T(s) - k(s)\cdot T(s) = (1 - k(s))\cdot T(s) \neq 0.$$

(β) Η β δεν είναι καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας, άρα υπολογίζουμε την καμπυλότητά της από τον τύπο του Θεωρήματα 3.4.2. Παραλείποντας την μεταβλητή s, έχουμε

$$\|\beta'\| = \|(1-k)T\| = |1-k| = 1-k$$

$$\beta'' = (1-k)'T + (1-k)T' = (1-k)'T + (1-k)kN$$

$$\begin{aligned}\beta' \times \beta'' &= (1-k)T \times ((1-k)'T + (1-k)kN\\ &= (1-k)(1-k)'T \times T + (1-k)^2 kT \times N\\ &= k(1-k)B\end{aligned}$$

$$\|\beta' \times \beta''\| = k(1-k)^2$$

$$k_\beta = \frac{k(1-k)^2}{(1-k)^3} = \frac{k}{1-k}.$$

3.6 (24). Από τον τύπο των Frenet-Serret για την παράγωγο του B, παίρνουμε ότι

$$N(s) = -\frac{B'(s)}{\tau(s)},$$

οπότε από τον ορισμό της καμπυλότητας έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}k(s) &= \|T'(s)\| = \|(N(s)\times B(s))'\|\\ &= \left\|\left(-\frac{B'(s)}{\tau(s)} \times B(s)\right)'\right\|\\ &= \left\|\left(-\frac{B'(s)}{\tau(s)}\right)' \times B(s) + \left(-\frac{B'(s)}{\tau(s)}\right)\times B'(s)\right\|\\ &= \left\|\frac{-B''(s)\tau(s) + B'(s)\tau'(s)}{\tau(s)^2} \times B(s) + 0\right\|\\ &= \frac{1}{\tau(s)^2}\left\|(\tau'(s)B'(s) - \tau(s)B''(s)) \times B(s)\right\|.\end{aligned}$$

3.6 (25). Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η γ είναι μοναδιαίας ταχύτητας. Ακολουθώντας την μεθοδολογία των Ασκήσεων 3.6 15–3.6 18, μπορούμε να γράψουμε την συνθήκη της άσκησης με την μορφή

$$(*) \qquad p = \gamma(s) + \lambda(s)(N(s) + B(s)),$$

όπου p το διάνυσμα θέσης του δοσμένου σταθερού σημείου και $\lambda(s)$ διαφορίσιμη συνάρτηση. Παραγωγίζουμε την (*) και, παραλείποντας το s, βρίσκουμε

$$T + \lambda'(N + B) + \lambda(-kT + \tau B - \tau N) = 0,$$

ή, ισοδύναμα,

$$(1 - \lambda k)T + (\lambda' - \lambda\tau)N + (\lambda' + \lambda\tau)B = 0,$$

οπότε

$$1 - \lambda k = 0, \qquad \lambda' - \lambda\tau = 0, \qquad \lambda' + \lambda\tau = 0.$$

Αθροίζοντας τις δύο τελευταίες βρίσκουμε $\lambda' = 0$, άρα $\lambda = c =$ σταθερό και το σύστημα των παραπάνω ισοτήτων γίνεται

$$1 - ck = 0, \qquad c\tau = 0.$$

Από την πρώτη προκύπτει $c \neq 0$ και $k = 1/c$ σταθερό, και από την δεύτερη $\tau = 0$. Αρα η γ είναι κύκλος ακτίνας c.