Martingales και κίνηση Brown
Τελική Εξέταση, 23 Ιουνίου 2010

1. (2 Βαθμοί) Έστω X, Y τυχαίες μεταβλητές σε χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, ώστε $E(X^4) < \infty$ και $E(X^2 \,|\, Y) = Y$. Να δειχθεί ότι

(α) $E(Y^2) < \infty$.

(β) $\mathrm{Cov}(X^2, Y) = \mathrm{Var}(Y)$.

2. (4 Βαθμοί) Έστω $(X_n)_{n \geq 0}$ supermartingale.

(α) Να δειχθεί ότι για $A \in \mathcal{F}_m$ και $n > m$ ισχύει

$$\int_A X_n \, dP \leq \int_A X_m \, dP.$$

(β) Υποθέτοντας ότι $X_n \geq 0$ για όλα τα n, να δειχθεί ότι για σταθερά $m \geq 0$, $i \geq 1$ έχουμε ότι

σχεδόν παντού στο $\{X_m = 0\}$ ισχύει $X_{m+i} = 0$.

(γ) Με την υπόθεση του (β), να δειχθεί ότι για σταθερό $m \geq 0$ έχουμε ότι

σχεδόν παντού στο $\{X_m = 0\}$ ισχύει $X_{m+i} = 0$ για κάθε $i \geq 1$.

3. (2 Βαθμοί) Έστω $(X_n)_{n \geq 0}$ supermartingale και $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ φθίνουσα κυρτή ώστε $E|\phi(X_n)| < \infty$ για κάθε $n \geq 0$. Να δειχθεί ότι η $(\phi(X_n))_{n \geq 0}$ είναι submartingale.

4. (2 Βαθμοί) Έστω $a \neq 0$ και B τυπική κίνηση Brown. Να δειχθεί ότι με πιθανότητα 1 το σύνολο $\{s \geq 0 : B_s = a\}$ είναι υπεραριθμήσιμο.

5. (4 Βαθμοί) **Το πρόβλημα εξόδου για την κίνηση Brown με ταχύτητα.** Έστω B τυπική κίνηση Brown, $\mu > 0$, και $x \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε την $X_t := x + B_t + \mu t$ για κάθε $t \geq 0$, δηλ. την κίνηση Brown με ταχύτητα μ που ξεκινάει απο το x. Για $r \in \mathbb{R}$, ορίζουμε $T_r := \inf\{s \geq 0 : X_s = r\}$ και $\phi(r) := e^{-2\mu r}$. Να δειχθεί ότι:

(α) Η $M_t := \phi(X_t), (t \geq 0)$ είναι martingale.

(β) Για $a < x < b$ ισχύει

$$P(T_a < T_b) = \frac{\phi(b) - \phi(x)}{\phi(b) - \phi(a)}.$$

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες. **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**

Μερικές λύσεις

1. (α) Απο την ανισότητα Jensen για την κυρτή $(x \mapsto x^2)$, έχουμε

$$Y^2 = (E(X^2 \,|\, Y))^2 \le E(X^4 \,|\, Y).$$

Τώρα παίρνουμε μέση τιμή και έχουμε

$$E(Y^2) \le E(E(X^4 \,|\, Y)) = E(X^4) < \infty.$$

(β) Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι

$$E(X^2) = E(E(X^2 \,|\, Y)) = E(Y),$$

και

$$E(X^2 Y) = E(E(X^2 Y \,|\, Y)) = E(Y E(X^2 \,|\, Y)) = E(Y^2).$$

2. (α) Ισχύει $E(X_n \,|\, \mathcal{F}_m) \le X_m$. Άρα για $A \in \mathcal{F}_m$ έχουμε

$$\int_A X_n \, dP = \int_A E(X_n \,|\, \mathcal{F}_m) \, dP \le \int_A X_m \, dP.$$

Στην πρώτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό της δεσμευμένης μέσης τιμής.

(β) Εφαρμόζουμε το (α) στο σύνολο $A := \{X_m = 0\}$ το οποίο ανήκει στο $\mathcal{F}_m$ γιατί η X_m είναι $\mathcal{F}_m$ μετρήσιμη. Έπεται ότι

$$0 \le \int_A X_{m+i} \, dP \le \int_A X_m \, dP = 0$$

επειδή $X_{m+i} \ge 0$. Άρα, πάλι επειδή $1_A X_{m+i} \ge 0$, έπειται ότι $1_A X_{m+i} = 0$ με πιθανότητα 1, δηλ., $P(1_A X_{m+i} > 0) = 0$. Επομένως

$$A \setminus \{X_{m+i} = 0\} \subset \{1_A X_{m+i} > 0\} \Longrightarrow P(A \setminus \{X_{m+i} = 0\}) = 0.$$

Η τελευταία σχέση σημαίνει ότι $X_{m+i} = 0$ σχεδόν παντού στο A.

(γ) Έστω $C_i := A \setminus \{X_{m+i} = 0\}$ για κάθε $i \ge 1$. Από το (β) έπεται ότι

$$P(\cup_{i=1}^{\infty} C_i) = 0$$

(**αριθμήσιμη** ένωση συνόλων μέτρου μηδέν). Τέλος, παρατηρούμε ότι

$$\cup_{i=1}^{\infty} C_i = A \setminus \{X_{m+i} = 0 \text{ για κάθε } i \ge 1\}.$$

3. Θεωρία.

4. Ο $T_a := \inf\{s \ge 0 : B_s = a\}$ είναι χρόνος στάσης σχεδόν παντού πεπερασμένος γιατί για την τυπική κίνηση Brown B έχουμε $\underline{\lim}_{t\to\infty} B_t = -\infty \; \overline{\lim}_{t\to\infty} B_t = \infty$. Η

$$B_t^* := B_{T_a+t} - B_{T_a} = B_{T_a+t} - a, \text{ για κάθε } t \ge 0$$

είναι τυπική κίνηση Brown (ισχυρή ιδιότητα Markov) και

$$\{s \ge 0 : B_s^* = 0\} = \{s \ge 0 : B_s = a\} - T_a.$$

Από γνωστό θεώρημα (Παράδειγμα 4.1, Κεφάλαιο 7 απο τον Durrett, 2η έκδοση), το πρώτο σύνολο στην τελευταία ισότητα είναι υπεραριθμήσιμο (μάλιστα είναι τέλειο και μή κενό) με πιθανότητα 1.

5. (α) Ξέρουμε ότι για $\lambda \in \mathbb{R}$ η

$$e^{\lambda B_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t}, t \ge 0$$

είναι martingale ως προς την γνωστή διήθηση. Για $\lambda := -2\mu$ παίρνουμε το ζητούμενο. Επίσης χρησιμοποιούμε το ότι για $Y_t, t \ge 0$, martingale, και $c \in \mathbb{R}$, η cY_t είναι martingale.

(β) Αποδεικνύεται όπως και το Θεώρημα 5.3 απο το Κεφάλαιο 7 του Durrett (2η έκδοση).