ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2

Στις ασκήσεις πιο κάτω, αν δεν αναφέρεται, θεωρούμε ότι βρισκόμαστε σε χώρο μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

1. Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μονότονη, να δειχθεί οτι είναι Borel μετρήσιμη.

2. Αν στο μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$ οι f, g είναι μετρήσιμες, τότε και οι $\max\{f, g\}, \min\{f, g\}$ είναι μετρήσιμες.

3*. Έστω $f : X \to [0, \infty]$ μετρήσιμη. Να δειχθεί οτι υπάρχει ακολουθία $(s_n)_{n\geq 1}$ απλών συναρτήσεων με $s_n(x) \leq s_{n+1}(x)$ και $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$ για κάθε $x \in X$.

4. Αν f μετρήσιμη, $\mu(X) = 1$ και $\int f d\mu > a$, τότε $\mu\{f > a\} > 0$ και $\mu\{f > a + \frac{1}{n}\} > 0$ για μεγάλα n.

5*. Αν $\mu(X) = 1$ και τα $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ ικανοποιούν $\mu(A_1) + \cdots + \mu(A_n) > k - 1$ για κάποιο θετικό ακέραιο k, τότε υπάρχουν $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$ με $\mu(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) > 0$.

6. Αν $f : X \to \mathbb{N}$ είναι μετρήσιμη, τότε

$$\int f d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \mu\{f \geq k\}.$$

7. Αν $f \geq 0$ είναι μετρήσιμη, τότε

$$\int \min\{f, n\}\, d\mu \to \int f d\mu$$

για $n \to \infty$.

8. Έστω $f, f_n \geq 0$ μετρήσιμες για $n \geq 1$ ώστε $f_n \to f$ σχεδόν παντού, και $\int f_n d\mu \to 0$. Να δειχθεί ότι $\int f\, d\mu = 0$, και άρα $f = 0$ σχεδόν παντού.

9. Έστω $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ και $E_n := \{x : |f(x)| \geq n\} = \{|f| \geq n\}$. Να δειχθεί ότι $n\mu(E_n) \to 0$.

10. Έστω $f_n \geq 0$ μετρήσιμες με $\mu\{f_n > 0\} = n^{-2}$ για κάθε $n \geq 1$. Να δειχθεί ότι για μ-σχεδόν όλα τα x, υπάρχει n_x φυσικός ώστε $f_n(x) = 0$ για $n \geq n_x$. Και άρα $f_n \to 0$ μ-σχεδον παντού.

11. Έστω $(r_k)_{k\geq 1}$ μια ακολουθία στο $(0, 1)$ (ενδεχομένως μια αρίθμηση των ρητών του διαστήματος). Θέτουμε $f : [0, 1] \to [0, \infty]$ με

$$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \frac{1}{\sqrt{|x - r_k|}}.$$

Να δειχθεί ότι $f(x) < \infty$ Lebesgue-σχεδόν παντού στο $(0, 1)$.

12. Έστω μια ακολουθία $(Z_n)_{n\geq 1}$ απο ανεξάρτητες ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με κατανομή $N(0, 1)$. Να δειχθεί ότι

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{Z_n}{\sqrt{\log n}} = c$$

για κάποια σταθερά $c \in (0, \infty)$ και να προσδιοριστεί η c.

13. Έστω $\Omega := \{K, \Gamma\}^3$ ο δειγματικός χώρος που αντιστοιχεί σε τρείς ανεξάρτητες ρίψεις ενός νομίσματος, και P_p το μέτρο σε αυτό το χώρο για την περίπτωση που το νόμισμα έχει πιθανότητα επιτυχίας p.

α) Για ποιές τιμές των $p_1, p_2 \in [0, 1]$ έχουμε $P_{p_2} \ll P_{p_1}$?

β) Να βρεθεί η Radon-Nikodym παράγωγος dP_{p_2}/dP_{p_1} για δεδομένα $p_1, p_2 \in (0, 1)$.

14*. Έστω μ, ν μέτρα ώστε υπάρχει $f : X \to [0, \infty)$ μετρήσιμη με $\nu(A) = \int_A f d\mu$ για $A \in \mathcal{A}$ (και άρα $\nu \ll \mu$). Αν $\mu(f = 0) = 0$, τότε $\mu \ll \nu$ και $d\mu/d\nu = 1/f$.

Υποδείξεις

1. Έστω ότι η f είναι αύξουσα. Τι μορφή έχει το $f^{-1}((-\infty, a])$ για $a \in \mathbb{R}$?

3. Williams σελίδα 51.

5. Με χρήση της προηγούμενη άσκησης.

6. Ισχύει ότι $f = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{f \geq k\}}$.

7. Κάποιο θεώρημα σύγλισης δίνει αμέσως το αποτέλεσμα.

8. Λήμμα Fatou.

9. Απο τον ορισμό του E_n, έχουμε

$$n\mu(E_n) \leq \int_{E_n} |f| \, d\mu = \int |f| \mathbf{1}_{|f| \geq n} \, d\mu.$$

Όμως η $|f| \in \mathcal{L}^1(\mu)$ και κυριαρχεί όλες τις $|f|\mathbf{1}_{|f| \geq n}$.

10. Πρώτο Borel-Cantelli.

11. Beppo-Levi μαζί με άσκηση που είδαμε στην τάξη.

12. Με χρήση των δύο λημμάτων Borel-Cantelli.

13. Έστω $f := dP_{p_2}/dP_{p_1}$. Αρκεί να έχουμε την ισότητα $P_{p_2}(A) = \int_A f dP_{p_1}$ για όλα τα A που είναι μονοσύνολα του Ω.

14. Για το δεύτερο ερώτημα, υπολογίζουμε το $\int_A (1/f) \, d\nu$ για $A \in \mathcal{A}$ χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της παραγράφου 5.14 απο τον Williams. Το έχουμε καλύψει στην τάξη.