# ΤΟ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΟ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟ ΕΝΟΣ ΠΑΡΑΤΑΓΜΑΤΟΣ ΥΠΕΡΕΠΙΠΕΔΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ
ΣΤΑ ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

της Χριστίνας Σαββίδου του Ανδρέα

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΧΡΗΣΤΟΣ Α. ΑΘΑΝΑΣΙΑΔΗΣ

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
2008

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εκπονήθηκε
στα πλαίσια των σπουδών για την απόκτηση
του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
στα Θεωρητικά Μαθηματικά που απονέμει το
Τμήμα Μαθηματικών του Εθνικού και Καποδιστριακού
Πανεπιστημίου Αθηνών.

Εγκρίθηκε στις 08/05/2008 από Εξεταστική επιτροπή αποτελούμενη από τους:

| **Ονοματεπώνυμο** | **Βαθμίδα** | **Υπογραφή** |
|---|---|---|
| Αθανασιάδης Χρήστος Α. (Επιβλέπων) | Αναπληρωτής Καθηγητής | .............................. |
| Παπάζογλου Παναγιώτης | Αναπληρωτής Καθηγητής | .............................. |
| Ταλέλλη Ολυμπία | Καθηγήτρια | .............................. |

# Περιεχόμενα

# Κεφάλαιο 1

# Πρόλογος

Στην παρούσα διπλωματική εργασία ασχολούμαστε με συνδυαστικά προβλήματα. Η Συνδυαστική είναι ένας κλάδος των Μαθηματικών που άρχισε να αναπτύσσεται στις αρχές του 20ου αιώνα, παράλληλα με την ανάπτυξη της επιστήμης της Πληροφορικής. Μετά τα μέσα του 20ου αιώνα, τα προβλήματα που αντιμετωπίζει η Συνδυαστική και οι τεχνικές που χρησιμοποιούνται σε αυτή σχετίζονται άμεσα με προβλήματα και τεχνικές που συναντώνται σε άλλους κλάδους των Θεωρητικών Μαθηματικών, όπως η Αλγεβρική Τοπολογία, η Αλγεβρική Γεωμετρία, η Μεταθετική Άλγεβρα και η Θεωρία Αναπαραστάσεων. Ένα παράδειγμα αυτής της αλληλεπίδρασης θα παρουσιάσουμε σε αυτή την εργασία.

Η μελέτη μας θα περιστραφεί γύρω από μια συνδυαστική αναλλοίωτη, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, που σχετίζεται με παρατάγματα υπερεπιπέδων σε γραμμικούς χώρους. Ορίζεται μέσω του συνόλου τομών του παρατάγματος υπερεπιπέδων και της συνάρτησης Möbius στο μερικώς διατεταγμένο αυτό σύνολο. Στόχος είναι να δούμε τι πληροφορίες μπορεί να μας δώσει αυτή η συνδυαστική αναλλοιώτη για τα παρατάγματα υπερεπιπέδων.

Στο Κεφάλαιο 2 θα ορίσουμε κάποιες βασικές έννοιες που θα χρειαστούμε, έτσι ώστε να είναι εφικτή η κατανόηση του κειμένου και για τους αναγνώστες που δεν είναι εξοικοιωμένοι με συνδυαστικές μεθόδους. Στο Κεφάλαιο 3 ασχολούμαστε αποκλειστικά με υπερεπίπεδα σε πραγματικούς χώρους. Με τη βοήθεια του χαρακτηριστικού πολυωνύμου υπολογίζουμε το πλήθος των συνεκτικών συνιστωσών που δημιουργούνται αν αφαιρέσουμε τα υπερεπίπεδα από το χώρο. Στο Κεφάλαιο 4 ασχολούμαστε με παρατάγματα υπερεπιπέδων στο χώρο $\mathbb{C}^n$ και υπολογίζουμε τις ομάδες συνομολογίας του συμπληρώματος της ένωσης των υπερεπιπέδων. Επίσης χρήσιμες πληροφορίες μας δίνει το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και για τις ομάδες Coxeter. Στο Κεφάλαιο 5 βλέπουμε τη σχέση που έχει με τους εκθέτες των ομάδων Coxeter. Τέλος παρουσιάζουμε επιγραμματικά μια μέθοδο υπολογισμού του χαρακτηριστικού πολυωνύμου.

Πριν προχωρήσουμε στο προκείμενο, θεωρώ απαραίτητο να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της παρούσης εργασίας, κ. Χ.Α. Αθανασιάδη, για τις χρήσιμες συμβουλές, την υπομονή και την επιμονή του μέχρι να πάρει αυτό το κείμενο την τελική του μορφή.

# Κεφάλαιο 2

# Βασικοί ορισμοί

## 2.1 Παρατάγματα υπερεπιπέδων

Αρχικά ορίζουμε τις βασικές έννοιες που θα μας απασχολήσουν. Εργαζόμαστε πάνω σε γραμμικούς χώρους πεπερασμένης διάστασης. Έστω $\mathbb{K}$ σώμα. Στον $\mathbb{K}^n$ καλούμε αφφινικό υπερεπίπεδο το σύνολο των σημείων $x$ που ικανοποιούν την εξίσωση $a \cdot x = b$, όπου $a \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ και $b \in \mathbb{K}$. Ένα αφφινικό υπερεπίπεδο αποτελεί γραμμικό υπόχωρο του $\mathbb{K}^n$ μόνο όταν $b = 0$. Εντούτοις, ανεξαρτήτως της τιμής του $b$, υπάρχει μία 1-1 και επί απεικόνιση από το αφφινικό υπερεπίπεδο στον $\mathbb{K}^{n-1}$ και μέσω αυτής μπορούμε πάντα να ορίσουμε γραμμική δομή στο αφφινικό υπερεπίπεδο.

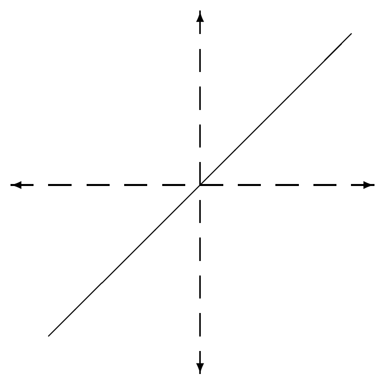
**Ορισμός 2.1** *Μια πεπερασμένη συλλογή $\mathcal{A} = \{H_1, H_2, ..., H_k\}$ αφφινικών υπερεπιπέδων στον $\mathbb{K}^n$ καλείται παράταγμα υπερεπιπέδων (hyperplane arrangement).*

Θα ασχοληθούμε κυρίως με παρατάγματα υπερεπιπέδων τα οποία ορίζονται σε πραγματικούς ή μιγαδικούς γραμμικούς χώρους. Τα ονομάζουμε πραγματικά ή μιγαδικά παρατάγματα υπερεπιπέδων αντίστοιχα. Στο τελευταίο κεφάλαιο θα συναντήσουμε και παρατάγματα υπερεπιπέδων που ορίζονται σε γραμμικούς χώρους πάνω σε πεπερασμένα σώματα.

**Παραδείγματα**

1. Στον $\mathbb{K}^n$ έχουμε το παράταγμα υπερεπιπέδων $\mathcal{E}_n = \{H_i : i = 1, ..., n\}$ που περιλαμβάνει τους άξονες των συντεταγμένων $H_i = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n : x_i = 0\}$.

2. Ένα άλλο παράταγμα υπερεπιπέδων στον $\mathbb{K}^n$ είναι το $\mathcal{A}_n$ που περιέχει τα υπερεπίπεδα $H_{ij} = \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n : x_i = x_j\}$, $1 \leq i < j \leq n$. Για παράδειγμα, το $\mathcal{A}_2$ περιέχει μόνο την ευθεία $x_1 = x_2$ στον $\mathbb{R}^2$ (βλ. σχήμα).



**Ορισμός 2.2** *Έστω $\mathcal{A} = \{H_1, ..., H_k\}$ παράταγμα υπερεπιπέδων στον $\mathbb{K}^n$, όπου το $H_i$ ορίζεται από την εξίσωση $a_i \cdot x = b_i$ για $1 \leq i \leq k$. Η διάσταση του χώρου που παράγουν τα $a_i$, $1 \leq i \leq k$, καλείται τάξη (rank) του $\mathcal{A}$ και συμβολίζεται με $\mathrm{rank}(\mathcal{A})$. Αν η τάξη του $\mathcal{A}$ είναι ίση με $n$, τότε το παράταγμα καλείται ουσιώδες (essential).*

Το παράταγμα $\mathcal{E}_n$, όπως ορίστηκε στο Παράδειγμα 1, είναι ουσιώδες. Αντιθέτως το παράταγμα $\mathcal{A}_n$, όπως το ορίσαμε στο Παράδειγμα 2, δεν είναι ουσιώδες αφού η τάξη του είναι $n-1$.

## 2.2 Μερικώς διατεταγμένα σύνολα

Για να μελετήσουμε τα παρατάγματα υπερεπιπέδων, θα χρησιμοποιήσουμε σαν εργαλείο τα μερικώς διατεταγμένα σύνολα.

**Ορισμός 2.3** *Ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο (poset) $(P, \leq)$ είναι ένα σύνολο $P$ με μια μερική διάταξη, δηλαδή μια διμελή σχέση $\leq$ με τις εξής ιδιότητες: (i) $x \leq x$ (ανακλαστική ιδιότητα), (ii) αν $x \leq y$ και $y \leq x$, τότε $x = y$ (αντισυμμετρία) και (iii) αν $x \leq y$ και $y \leq z$, τότε $x \leq z$ (μεταβατικότητα) για όλα τα $x, y, z \in P$.*

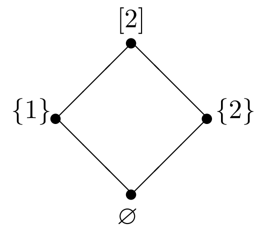
Θεωρούμε ότι το $y$ είναι μικρότερο από το $x$ ($y < x$) αν $y \leq x$ και $y \neq x$. Λέμε ότι το $x$ καλύπτει το $y$ αν $y < x$ και δεν υπάρχει $z \in P$ τέτοιο ώστε $y < z < x$. Στο διάγραμμα Hasse ενός μερικώς διατεταγμένου συνόλου $P$ παριστάνεται με κορυφή κάθε στοιχείο του $P$, όπου η κορυφή που αντιστοιχεί στο $x$ τοποθετείται πιο ψηλά από την κορυφή που αντιστοιχεί στο $y$ αν $y < x$, και παριστάνεται με ακμή που ενώνει τα $x$ και $y$ κάθε σχέση κάλυψης μεταξύ των $x$ και $y$. Αν στο μερικώς διατεταγμένο σύνολο υπάρχει ελάχιστο στοιχείο, τότε συμβολίζεται με $\hat{0}$. Δηλαδή έχουμε $\hat{0} \leq x$ για κάθε $x \in P$. Αντίστοιχα, αν υπάρχει μέγιστο στοιχείο, συμβολίζεται με $\hat{1}$.

Για $n \in \mathbb{N}$ χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $[n] := \{1, 2, ..., n\}$.

**Παραδείγματα**

1. Το σύνολο των υποσυνόλων ενός συνόλου είναι ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο με τη σχέση του εγκλεισμού. Αν το σύνολο μας είναι το $[n]$, τότε συμβολίζουμε με $B_n$ το μερικώς διατεταγμένο σύνολο που περιέχει τα υποσύνολα του $[n]$ με τη

διάταξη του εγκλεισμού.




Το διάγραμμα Hasse του $B_2$

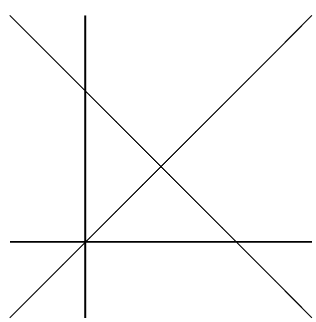
2. Το σύνολο των διαμερίσεων ενός συνόλου είναι ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο με τη σχέση $\leq$ να ορίζεται ως $x \leq y$ αν το $x$ είναι εκλέπτυνση του $y$, δηλαδή αν κάθε μέρος του $x$ περιέχεται σε κάποιο μέρος του $y$.

Το παράδειγμα που μας ενδιαφέρει άμεσα ως μερικώς διατεταγμένο σύνολο είναι το σύνολο τομών ενός παρατάγματος υπερεπιπέδων. Έστω $\mathcal{A} = \{H_1, ..., H_k\}$ παράταγμα υπερεπιπέδων στον $\mathbb{K}^n$. Ορίζουμε σαν σύνολο τομών του $\mathcal{A}$ το σύνολο $L(\mathcal{A}) = \{\cap_{i \in I} H_i : I \subseteq [k]\}$. Στο $L(\mathcal{A})$ ορίζουμε μερική διάταξη μέσω του αντίστροφου εγκλεισμού, δηλαδή $x \leq y$ αν $y \subseteq x$. Το συνολο δεικτών $I$ μπορεί να είναι το κενό σύνολο. Κατά συνέπεια, ο $\mathbb{K}^n$ ανήκει στο $L(\mathcal{A})$ και το μερικώς διατεταγμένο σύνολο $L(\mathcal{A})$ έχει πάντα ελάχιστο στοιχείο, τον $\mathbb{K}^n$.

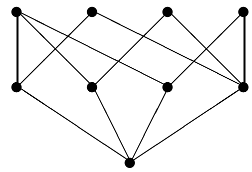
**Παραδείγματα**

1. Αν $\mathcal{E}_n = \{\{x_i = 0\} : 1 \leq i \leq n\}$, τότε $L(\mathcal{E}_n) = \{\{x_i = 0 : i \in S\} : S \subseteq [n]\}$ και $\{x_i = 0 : i \in S_1\} \leq \{x_i = 0 : i \in S_2\}$ αν και μόνο αν $S_1 \subseteq S_2$. Άρα το σύνολο τομών του $\mathcal{E}_n$ ταυτίζεται σαν μερικώς διατεταγμένο σύνολο με το $B_n$.

2. Έστω $\mathcal{A}$ το παράταγμα υπερεπιπέδων στον $\mathbb{R}^2$ που περιέχει τις ευθείες του σχήματος:



Το διάγραμμα Hasse του $L(\mathcal{A})$ είναι:



Αν το $\mathcal{A} = \{H_1, ..., H_k\}$ δεν είναι ουσιώδες, τότε υπάρχει ένα παράταγμα, το οποίο έχει ισόμορφο σύνολο τομών με το $\mathcal{A}$ και είναι ουσιώδες. Έστω ότι το $\mathcal{A}$ είναι πραγματικό ή μιγαδικό παράταγμα και ότι κάθε $H_i$ ορίζεται από την εξίσωση $a_i \cdot x = b_i$ για $1 \leq i \leq k$. Καλούμε $X$ το γραμμικό χώρο που παράγουν τα $a_i$, $1 \leq i \leq k$. Υπό αυτές τις συνθήκες, το $\mathcal{A}_X = \{H \cap X : H \in A\}$ είναι ουσιώδες και έχει ισόμορφο σύνολο τομών με το $\mathcal{A}$. Για παράδειγμα, το παράταγμα $\mathcal{A}_n = \{\{x_i = x_j\} : 1 \leq i < j \leq n\}$, όπως είπαμε πιο πάνω, δεν είναι ουσιώδες αλλά ο περιορισμός του στον γραμμικό υπόχωρο $\{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n : x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\}$ του $\mathbb{K}^n$ είναι ουσιώδες παράταγμα.

Για το υπόλοιπο της ενότητας αυτής, θα εξετάσουμε κάποιες ιδιότητες των μερικώς διατεταγμένων συνόλων που θα μας είναι χρήσιμες στη συνέχεια.

Το κλειστό διάστημα $[x, y]$ σε ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο $P$ ορίζεται ως $[x, y] = \{z \in P : x \leq z \leq y\}$. Το σύνολο των κλειστών διαστημάτων του $P$ συμβολίζεται με $Int(P)$.

**Ορισμός 2.4** *Έστω $P$ ένα πεπερασμένο μερικώς διατεταγμένο σύνολο. Ορίζουμε τη συνάρτηση Möbius του $P$, $\mu : Int(P) \to \mathbb{Z}$, αναδρομικά ως εξής:*

$$\mu([x, y]) = \begin{cases} 1, & x = y \\ -\sum_{x \leq z < y} \mu([x, z]), & x < y. \end{cases}$$

Συνήθως αντί για $\mu([x, y])$ γράφουμε $\mu(x, y)$. Επίσης, αν το $P$ έχει ελάχιστο στοιχείο, τότε γράφουμε $\mu(x)$ αντί για $\mu(\hat{0}, x)$.

Ισοδύναμα, η συνάρτηση Möbius του $P$ ορίζεται ως η μοναδική συνάρτηση από το $Int(P)$ στους ακεραίους για την οποία ισχύει

$$\sum_{x \leq z \leq y} \mu(x, z) = \delta(x, y) \ \forall x, y \in P, \ x \leq y, \tag{2.1}$$

όπου με $\delta(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \neq y \\ 1, & \text{αν } x = y \end{cases}$ συμβολίζουμε το δέλτα του Kronecker.

**Παρατήρηση:** Ένας άλλος ισοδύναμος τρόπος για να οριστεί η συνάρτηση Möbius του $P$ είναι ως η μοναδική συνάρτηση από το $Int(P)$ στους ακέραιους για την οποία ισχύει

$$\sum_{x \leq z \leq y} \mu(z, y) = \delta(x, y) \ \forall x, y \in P, \ x \leq y. \tag{2.2}$$

Πράγματι, αν συμβολίσουμε με $\mu_1$ τη συνάρτηση που ορίζεται μέσω της σχέσης (2.1) και με $\mu_2$ τη συνάρτηση που ορίζεται μέσω της σχέσης (2.2), τότε

$$\begin{aligned}
\mu_1(x,y) = \sum_{x\le z\le y} \mu_1(x,z)\delta(z,y) &= \sum_{x\le z\le y} \mu_1(x,z)\left(\sum_{z\le w\le y} \mu_2(w,y)\right) \\
&= \sum_{x\le w\le y} \mu_2(w,y) \sum_{x\le z\le w} \mu_1(x,z) \\
&= \sum_{x\le w\le y} \mu_2(w,y)\delta(x,w) = \mu_2(x,y)\ \forall x,y\in P.
\end{aligned}$$

Συνεπώς οι δύο συναρτήσεις ταυτίζονται και οι δύο ορισμοί είναι ισοδύναμοι. □

**Θεώρημα 2.1** *(Αντιστροφή Möbius) Έστω $P$ πεπερασμένο μερικώς διατεταγμένο σύνολο και $f,g:P\to\mathbb{C}$. Οι ακόλουθες σχέσεις είναι ισοδύναμες:*

1. $g(x)=\sum_{y\le x} f(y)\ \forall x\in P$,
2. $f(x)=\sum_{y\le x} \mu(y,x)g(y)\ \forall x\in P$.

Το θεώρημα αυτό αποδεικνύεται στο πρώτο μέρος του [26], χρησιμοποιώντας την άλγεβρα των συναρτήσεων από το $Int(P)$ στο $\mathbb{C}$ με γινόμενο τη συνέλιξη συναρτήσεων. Εδώ θα δώσουμε μια διαφορετική απόδειξη.

Απόδειξη: Αν ισχύει η σχέση 2, τότε παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
\sum_{y\le x} f(y) &= \sum_{y\le x}\sum_{z\le y} \mu(z,y)g(z) \\
&= \sum_{z\le x}\sum_{z\le y\le x} \mu(z,y)g(z) \\
&= \sum_{z\le x} g(z) \sum_{z\le y\le x} \mu(z,y) \\
&\overset{(2.1)}{=} \sum_{z\le x} g(z)\delta(z,x) = g(x).
\end{aligned}$$

Άρα η σχέση 2 συνεπάγεται τη σχέση 1. Επίσης, αν ισχύει η σχέση 1, τότε έχουμε:

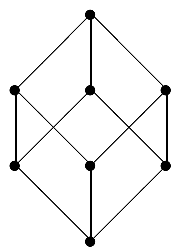
$$\begin{aligned}
\sum_{y\le x} \mu(y,x)g(y) &= \sum_{y\le x} \mu(y,x) \sum_{z\le y} f(z) \\
&= \sum_{z\le x} f(z) \sum_{z\le y\le x} \mu(y,x) \\
&\overset{(2.2)}{=} \sum_{z\le x} f(z)\delta(x,z) = f(x).
\end{aligned}$$

Συνεπώς η ισοδυναμία ισχύει. □

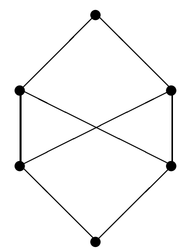
Συνεχίζουμε μελετώντας τα μερικώς διατεταγμένα σύνολα και ειδικότερα μια κατηγορία μερικών διατεταγμένων συνόλων, τους συνδέσμους.

Έστω $(P, \leq)$ μερικώς διατεταγμένο σύνολο και $x, y \in P$. Λέμε ότι το $z \in P$ είναι άνω φράγμα των $x$ και $y$ αν $x \leq z$ και $y \leq z$. Ανάλογα, το $z \in P$ είναι κάτω φράγμα των $x$ και $y$ αν $z \leq x$ και $z \leq y$. Το $z$ είναι *ελάχιστο άνω φράγμα (join) (μέγιστο κάτω φράγμα (meet)* αντίστοιχα) για τα $x, y$ αν το $z$ είναι άνω (κάτω) φράγμα των $x, y$ και για κάθε άλλο άνω (κάτω) φράγμα $w$ των $x, y$, ισχύει $z \leq w$ $(w \leq z)$.

**Ορισμός 2.5** *Λέμε ότι το μερικώς διατεταγμένο σύνολο $P$ είναι σύνδεσμος (lattice) αν κάθε ζεύγος $x, y \in P$ έχει μέγιστο κάτω φράγμα και ελάχιστο άνω φράγμα.*



Αυτή η μερική διάταξη είναι σύνδεσμος.



Αυτή η μερική διάταξη δεν είναι σύνδεσμος.

**Πρόταση 2.1** *Αν το $P$ είναι ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο με ελάχιστο στοιχείο $\hat{0}$, τέτοιο ώστε κάθε ζεύγος στοιχείων του να έχει ελάχιστο άνω φράγμα, τότε το $P$ είναι σύνδεσμος.*

Απόδειξη: Πρέπει να δείξουμε ότι κάθε ζεύγος στοιχείων του $P$ έχει μέγιστο κάτω φράγμα. Έστω $x, y \in P$. Ονομάζουμε $S$ το σύνολο που περιέχει όλα τα κάτω φράγματα του ζεύγους $x, y$. Το $S$ είναι μη κενό, αφού περιέχει το $\hat{0}$, και κατά συνέπεια έχει ελάχιστο άνω φράγμα $z$. Αφού τα $x, y$ είναι άνω φράγματα του συνόλου $S$ και το $z$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα, ισχύει ότι $z \leq x$ και $z \leq y$, δηλαδή το $z$ είναι κάτω φράγμα των $x, y$. Επίσης, για κάθε κάτω φράγμα των $x, y$, δηλαδή για κάθε στοιχείο $w \in S$, ισχύει $w \leq z$. Άρα το $z$ είναι το μέγιστο κάτω φράγμα των $x, y$. $\square$

**Πόρισμα 2.1** *Αν για το παράταγμα υπερεπιπέδων $\mathcal{A}$ ισχύει ότι $\cap_{H \in \mathcal{A}} H \neq \varnothing$, τότε το $L(\mathcal{A})$ είναι σύνδεσμος. Ο σύνδεσμος αυτός ονομάζεται σύνδεσμος τομών (intersection lattice) του $\mathcal{A}$.*

Απόδειξη: Από την προηγούμενη πρόταση, αρκεί να δείξουμε ότι το $L(\mathcal{A})$ έχει ελάχιστο στοιχείο και κάθε ζεύγος στοιχείων του έχει ελάχιστο άνω φράγμα. Πράγματι, το ελάχιστο στοιχείο του $L(\mathcal{A})$ είναι ο χώρος $\mathbb{K}^n$. Επιπλέον, για κάθε δύο στοιχεία στο $L(\mathcal{A})$ το ελάχιστο άνω φράγμα τους είναι η τομή τους. $\square$

Η ακόλουθη πρόταση θα μας δώσει μια χρήσιμη έκφραση για τη συνάρτηση Möbius ενός συνδέσμου.

**Πρόταση 2.2** *Έστω $P$ πεπερασμένος σύνδεσμος με ελάχιστο στοιχείο $\hat{0}$ και $Y$ υποσύνολο του $P$, τέτοιο ώστε το $\hat{0}$ να μην ανήκει στο $Y$ και για όλα τα $x \in P$, $x \neq \hat{0}$, να υπάρχει $y \in Y$ με $y \leq x$. Αν $N_k(x)$ είναι το πλήθος των υποσυνόλων του $Y$ με $k$ στοιχεία και ελάχιστο άνω φράγμα το $x$, τότε $\mu(x) = \sum_k (-1)^k N_k(x)$.*

Απόδειξη: Αν το $S$ είναι υποσύνολο του $P$, τότε συμβολίζουμε με $\vee S$ το ελάχιστο άνω φράγμα του συνόλου $S$ και με $|S|$ τον πληθάριθμο του $S$. Έστω $f(x) = \sum_k (-1)^k N_k(x) = \sum_{S\subseteq Y, \vee S = x} (-1)^{|S|}$. Για να δείξουμε ότι η $f$ είναι η συνάρτηση Möbius του $P$, αρκεί να δείξουμε ότι $\sum_{\hat{0}\leq x\leq y} f(x) = 0$ για όλα τα $y \neq \hat{0}$ και ότι $f(\hat{0}) = 1$. Προφανώς $f(\hat{0}) = (-1)^{|\varnothing|} = 1$. Επίσης,

$$\begin{aligned}
\sum_{\hat{0}\leq x\leq y} f(x) &= \sum_{\hat{0}\leq x\leq y} \sum_{S\subseteq Y, \vee S = x} (-1)^{|S|} \\
&= \sum_{S\subseteq Y, \vee S \leq y} (-1)^{|S|} \\
&= \sum_{S\subseteq Y_y} (-1)^{|S|} = (1-1)^{|Y_y|} = 0,
\end{aligned}$$

όπου $Y_y = \{x \in Y \mid x \leq y\} \neq \varnothing$. □

**Σημείωση**: Το σύνολο τομών $L(\mathcal{A})$ ενός παρατάγματος υπερεπιπέδων $\mathcal{A}$ δεν είναι πάντοτε σύνδεσμος. Εντούτοις, η Πρόταση 2.2 ισχύει πάντοτε για το $L(\mathcal{A})$, επειδή το κλειστό διάστημα $[\hat{0}, x] \subseteq L(\mathcal{A})$ είναι σύνδεσμος για όλα τα $x \in L(\mathcal{A})$.

Περισσότερες πληροφορίες για τα μερικώς διατεταγμένα σύνολα υπάρχουν στο τρίτο κεφάλαιο του [25].

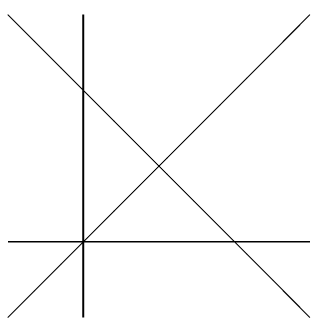
## 2.3 Χαρακτηριστικό πολυώνυμο

Επιστρέφουμε στα παρατάγματα υπερεπιπέδων και στην έννοια του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, η οποία είναι στο επίκεντρο του ενδιαφέροντός μας.

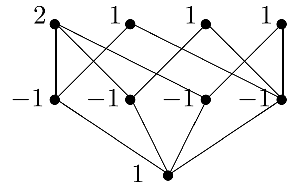
**Ορισμός 2.6** *Έστω $\mathcal{A}$ παράταγμα υπερεπιπέδων στον $\mathbb{K}^n$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_{\mathcal{A}}(t)$ του $\mathcal{A}$ δίνεται από τον τύπο $\chi_{\mathcal{A}}(t) = \sum_{x\in L(\mathcal{A})} \mu(x) t^{\dim x}$.*

**Παραδείγματα**

1. Αν $\mathcal{A}$ είναι το παράταγμα υπερεπιπέδων που συναντήσαμε και πιο πάνω,



   τότε το διάγραμμα Hasse του $L(\mathcal{A})$, με κάθε σημείο να έχει στα αριστερά του την τιμή της συνάρτησης Möbius σε αυτό, είναι το:




Συνεπώς, σε αυτή την περίπτωση έχουμε $\chi_{\mathcal{A}}(t) = t^2 - 4t + 5$.

2. Έστω $\mathcal{E}_n = \{\{x_i = 0\} \subseteq \mathbb{K}^n$ για $i = 1, ..., n\}$. Ήδη παρατηρήσαμε ότι το $L(\mathcal{E}_n)$ ταυτίζεται σαν σύνδεσμος με το $B_n$. Με τη βοήθεια της Πρότασης 2.2 και θεωρώντας ως $Y$ το σύνολο των μονοσυνόλων $\{\{1\}, \{2\}, ..., \{n\}\}$, μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνάρτηση Möbius στο $B_n$. Βρίσκουμε ότι $\mu(S) = (-1)^{|S|}$ για όλα τα $S \subseteq [n]$. Ισχύει ότι αν $K \in L(\mathcal{E}_n)$ και $K = \{x = (x_1, ..., x_n) : x_i = 0 \ \forall i \in S\}$ με $S \subseteq [n]$, τότε $\mu(K) = (-1)^{|S|}$ και $\dim K = n - |S|$. Άρα $\chi_{\mathcal{E}_n}(t) = \sum_{S \subseteq [n]} (-1)^{|S|} t^{n-|S|} = (t-1)^n$.

Η ιδιότητα διαγραφής - περιορισμού, που περιγράφει η επόμενη πρόταση, είναι ένα χρήσιμο εργαλείο για την απόδειξη αποτελεσμάτων που αφορούν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και αποδεικνύονται με τη μέθοδο της επαγωγής. Η ιδιότητα αυτή εκφράζει το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός παρατάγματος $k$ υπερεπιπέδων ως συνάρτηση των χαρακτηριστικών πολυωνύμων δύο παραταγμάτων, που περιέχουν το πολύ $k-1$ υπερεπίπεδα. Συγκεκριμένα, αν το $\mathcal{A}$ είναι παράταγμα υπερεπιπέδων στον $\mathbb{K}^n$ και $H \in \mathcal{A}$, τότε ορίζουμε $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \setminus \{H\}$ και $\mathcal{A}'' = \{H \cap H' \neq \varnothing : H' \in \mathcal{A}'\}$. Το $\mathcal{A}'$ είναι παράταγμα υπερεπιπέδων στον $\mathbb{K}^n$, ενώ το $\mathcal{A}''$ είναι παράταγμα υπερεπιπέδων στον $H \cong \mathbb{K}^{n-1}$.

**Πρόταση 2.3** *Για την τριάδα* $(\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}'')$ *ισχύει*

$$\chi_{\mathcal{A}}(t) = \chi_{\mathcal{A}'}(t) - \chi_{\mathcal{A}''}(t). \tag{2.3}$$

Απόδειξη: Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 2.2 για $P = L(\mathcal{A})$ και $Y = \mathcal{A}$, βλέπουμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός παρατάγματος υπερεπιπέδων μπορεί να γραφτεί ως:

$$\begin{aligned}
\chi_{\mathcal{A}}(t) &= \sum_{x \in L(\mathcal{A})} \mu(x) t^{\dim x} \\
&= \sum_{x \in L(\mathcal{A})} \sum_{S \subseteq \mathcal{A}, \cap S = x} (-1)^{|S|} t^{\dim x} \\
&= \sum_{S \subseteq \mathcal{A}} (-1)^{|S|} t^{\dim(\cap S)}.
\end{aligned}$$

Άρα,

$$\begin{aligned}
\chi_{\mathcal{A}}(t) &= \sum_{S\subseteq\mathcal{A}} (-1)^{|S|} t^{\dim(\cap S)} \\
&= \sum_{S\subseteq\mathcal{A}, H\notin S} (-1)^{|S|} t^{\dim(\cap S)} + \sum_{S\subseteq\mathcal{A}, H\in S} (-1)^{|S|} t^{\dim(\cap S)} \\
&= \sum_{S\subseteq\mathcal{A}'} (-1)^{|S|} t^{\dim(\cap S)} + \sum_{S'\subseteq\mathcal{A}''} (-1)^{|S'|+1} t^{\dim(\cap S')} \\
&= \sum_{S\subseteq\mathcal{A}'} (-1)^{|S|} t^{\dim(\cap S)} - \sum_{S\subseteq\mathcal{A}''} (-1)^{|S|} t^{\dim(\cap S)} \\
&= \chi_{\mathcal{A}'}(t) - \chi_{\mathcal{A}''}(t),
\end{aligned}$$

όπου το σύνολο $S'$, που εμφανίζεται στο δεύτερο άθροισμα της τρίτης γραμμής, είναι το σύνολο $S$ του δεύτερου αθροίσματος στη δεύτερη γραμμή, αν από αυτό αφαιρέσουμε το υπερεπίπεδο $H$. $\square$

## 2.4 Χρωματικό πολυώνυμο

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός παρατάγματος υπερεπιπέδων αποτελεί γενίκευση μιας οικείας έννοιας για όσους έχουν ασχοληθεί με γραφήματα, την έννοια του χρωματικού πολυωνύμου. Σε αυτή την παράγραφο θα δούμε ποια είναι η σχέση που υπάρχει μεταξύ αυτών των δύο πολυωνύμων.

**Ορισμός 2.7** *Ένα απλό γράφημα $G$ είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος $(V(G), E(G))$ που αποτελείται από ένα μη κενό σύνολο κορυφών $V(G)$ και από ένα σύνολο ακμών $E(G)$, το οποίο περιέχει υποσύνολα του $V(G)$ με δύο στοιχεία.*

Ένα γράφημα μπορεί να παρασταθεί σχηματικά. Καθε κορυφή παριστάνεται από ένα σημείο και κάθε ακμή $\{x, y\}$ από μια γραμμή που ενώνει το ζεύγος κορυφών $x$ και $y$.

Αν έχουμε ένα απλό γράφημα $G$ στο σύνολο κορυφών $V(G) = [n]$, τότε μπορούμε να αντιστοιχίσουμε σε αυτό ένα παράταγμα υπερεπιπέδων $\mathcal{A}_G$ στον $\mathbb{K}^n$. Το $\mathcal{A}_G$ περιέχει όλα τα υπερεπίπεδα της μορφής $H_{ij} = \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n : x_i = x_j\}$ για $\{i, j\} \in E(G)$. Αντίστροφα, από κάθε παράταγμα υπερεπιπέδων $\mathcal{A} = \{H_{ij}$ για κάποια $\{i, j\} \subseteq [n]\}$ στον $\mathbb{K}^n$, μπορούμε να ορίσουμε ένα γράφημα με σύνολο κορυφών $V(G) = [n]$ και σύνολο ακμών $E(G) = \{\{i, j\} : H_{ij} \in \mathcal{A}\}$.

**Ορισμός 2.8** *Έστω $G$ απλό γράφημα στο σύνολο κορυφών $[n]$ και $q \in \mathbb{N}$. Μια απεικόνιση $k : [n] \to [q]$ λέγεται χρωματισμός του $G$ με χρώματα $1, 2, ..., q$. Ο χρωματισμός $k$ ονομάζεται γνήσιος αν $k(i) \neq k(j)$ για κάθε $\{i, j\} \in E(G)$. Συμβολίζουμε με $\chi_G(q)$ το πλήθος των γνήσιων χρωματισμών του $G$ με χρώματα $1, 2, ..., q$. Η συνάρτηση $\chi_G(q)$ λέγεται χρωματικό πολυώνυμο του $G$.*

Το επόμενο θεώρημα μας δίνει τη σχέση που προαναγγείλαμε· το χρωματικό πολυώνυμο του απλού γραφήματος $G$ στο σύνολο κορυφών $[n]$ ταυτίζεται με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του αντίστοιχου παρατάγματος υπερεπιπέδων $\mathcal{A}_G$.

**Θεώρημα 2.2** *Για κάθε $q \in \mathbb{N}$, ισχύει $\chi_{\mathcal{A}_G}(q) = \chi_G(q)$.*

Απόδειξη: Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο πλήθος των ακμών του $G$. Αν το $G$ δεν έχει ακμές, δηλαδή αν $E(G) = \varnothing$, τότε οι γνήσιοι χρωματισμοί του $G$ είναι όλοι οι χρωματισμοί του. Άρα θα έχουμε $\chi_G(q) = q^n$. Από την άλλη, το αντίστοιχο παράταγμα υπερεπιπέδων $\mathcal{A}_G$ είναι κενό και το χαρακτηριστικό πολυώνυμό του είναι το $\chi_{\mathcal{A}_G}(q) = q^n$. Συνεπώς αν το $G$ δεν έχει ακμές, το θεώρημα ισχύει. Υποθέτουμε ότι το θεώρημα ισχύει για κάθε γράφημα με λιγότερες από $k$ ακμές και θεωρούμε το απλό γράφημα $G$ με $k$ ακμές. Έστω $e = \{i, j\} \in E(G)$ και $H = H_{ij} \in \mathcal{A}_G$. Συμβολίζουμε με $G'$ το γράφημα $G' = (V(G), E(G) \setminus \{e\})$ και με $G''$ το γράφημα που προκύπτει αν στο $G$ ταυτίσουμε τις κορυφές $i, j$ και αγνοήσουμε τις θηλιές και τις πολλαπλές ακμές που δημιουργούνται. Οι γνήσιοι χρωματισμοί του $G'$ είναι οι γνήσιοι χρωματισμοί στους οποίους το $i$ και το $j$ έχουν διαφορετικό χρώμα (που είναι όσοι και οι γνήσιοι χρωματισμοί του $G$) και οι γνήσιοι χρωματισμοί στους οποίους τα $i$ και $j$ έχουν το ίδιο χρώμα (που είναι όσοι και οι χρωματισμοί του $G''$). Δηλαδή ισχύουν:

$$\begin{aligned} \chi_{G'}(q) &= \chi_G(q) + \chi_{G''}(q), \\ \chi_G(q) &= \chi_{G'}(q) - \chi_{G''}(q). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Προφανώς $\mathcal{A}'_G = \mathcal{A}_{G'}$, ενώ τα παρατάγματα $\mathcal{A}''_G$ και $\mathcal{A}_{G''}$ είναι γραμμικά ισόμορφα, γιατί ο περιορισμός του $\mathcal{A}_G$ στο υπερεπίπεδο $x_i = x_j$ αντιστοιχεί στην ταύτιση των κορυφών $i$ και $j$ του $G$. Συνεπώς, $\chi_{\mathcal{A}'_G}(q) = \chi_{\mathcal{A}_{G'}}(q)$ και $\chi_{\mathcal{A}''_G}(q) = \chi_{\mathcal{A}_{G''}}(q)$. Από τις σχέσεις (2.3), (2.4) και την υπόθεση της επαγωγής έχουμε το ζητούμενο. $\square$

**Εφαρμογή:** Με τη βοήθεια του προηγούμενου θεωρήματος, θα υπολογίσουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του $\mathcal{A}_n = \{H_{ij} : 1 \leq i < j \leq n\}$. Το γράφημα $G$ που αντιστοιχεί σε αυτό το παράταγμα είναι το πλήρες γράφημα στο σύνολο κορυφών $[n]$, δηλαδή το γράφημα με σύνολο ακμών $E(G) = \{\{i, j\} : 1 \leq i < j \leq n\}$. Αν προσπαθήσουμε να χρωματίσουμε τις κορυφές του $G$, θα έχουμε $q$ επιλογές για την πρώτη, $q - 1$ επιλογές για τη δεύτερη, επειδή έχει ακμή που τη συνδέει με την πρώτη, άρα δεν πρέπει να έχει το χρώμα της, $q - 2$ επιλογές για την τρίτη, επειδή δεν μπορεί να έχει το χρώμα των προηγούμενων δύο, κ.ο.κ., μέχρι την $n$-οστή κορυφή, στην οποία μένουν $q - n + 1$ επιλογές χρώματος. Άρα το χρωματικό πολυώνυμο του $G$ είναι $\chi_G(q) = q(q-1)\cdots(q-n+1)$. Αφού ταυτίζεται με το χαρακτηριστίκο πολυώνυμο του $\mathcal{A}_n$ για άπειρα $q$, θα έχουμε

$$\chi_{\mathcal{A}_n}(t) = t(t-1)\cdots(t-n+1) \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Περισσότερα για τη θεωρία γραφημάτων υπάρχουν στο [20].

# Κεφάλαιο 3

# Απαρίθμηση πλευρών

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με πραγματικά παρατάγματα υπερεπιπέδων. Στόχος μας είναι να δείξουμε τη σχέση του χαρακτηριστικού πολυωνύμου ενός πραγματικού παρατάγματος υπερεπιπέδων με το πλήθος των περιοχών του παρατάγματος.

Συμβολίζουμε με $B^n$ τη μοναδιαία μπάλα στον $\mathbb{R}^n$, δηλαδή το σύνολο $\{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}$, και με $S^{n-1}$ τη μοναδιαία $n$-διάστατη σφαίρα, δηλαδή το σύνορο της $B^n$.

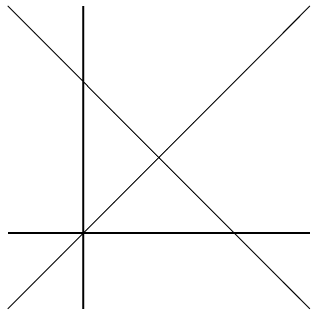
## 3.1 Περιοχές παραταγμάτων

Έστω $\mathcal{A}$ παράταγμα υπερεπιπέδων στον $\mathbb{R}^n$. Οι συνεκτικές συνιστώσες του $\mathbb{R}^n \setminus \cup_{H \in \mathcal{A}} H$ ονομάζονται *περιοχές (regions)* του $\mathcal{A}$. Συμβολίζουμε με $r(\mathcal{A})$ το πλήθος των περιοχών του $\mathcal{A}$. Οι περιοχές του $\mathcal{A}$ είναι ανοικτά, κυρτά σύνολα, που είναι ομοιομορφικά με το εσωτερικό της $n$-διάστατης μπάλας. Αν το παράταγμα $\mathcal{A}$ είναι ουσιώδες, λέμε ότι μια περιοχή του $\mathcal{A}$ είναι *σχετικά φραγμένη (relatively bounded)* όταν είναι φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Αν το $\mathcal{A}$ δεν είναι ουσιώδες, τότε λέμε ότι μια περιοχή $R$ του $\mathcal{A}$ είναι σχετικά φραγμένη όταν η αντίστοιχη περιοχή στο παράταγμα $\mathcal{A}_X$, δηλαδή η περιοχή $R \cap X$ [1], είναι φραγμένη. Συμβολίζουμε με $b(\mathcal{A})$ το πλήθος των σχετικά φραγμένων περιοχών του $\mathcal{A}$.

**Παραδείγματα**

1. Στο παράταγμα του σχήματος έχουμε $r(\mathcal{A}) = 10$ και $b(\mathcal{A}) = 2$.

[1] Θυμίζουμε ότι αν το $\mathcal{A} = \{H_1, ..., H_k\}$ είναι ένα παράταγμα υπερεπιπέδων στον $\mathbb{R}^n$, όπου κάθε $H_i$ ορίζεται από μια εξίσωση της μορφής $a_i \cdot x = b_i$, με $a_i \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ και $b_i \in \mathbb{R}$, τότε συμβολίζουμε με $X$ το γραμμικό χώρο που παράγεται από τα $a_i$ για $i = 1, ..., k$.



2. Έστω το παράταγμα $\mathcal{E}_n = \{H_i,\ 1 \leq i \leq n\}$ στον $\mathbb{R}^n$, όπου $H_i$ είναι το υπερεπίπεδο που ορίζεται από την εξίσωση $x_i = 0$ για $i = 1, 2, ..., n$. Κάθε υπερεπίπεδο $H_i$ χωρίζει τον $\mathbb{R}^n$ σε δύο μέρη, σε αυτό που έχει τα στοιχεία του $\mathbb{R}^n$ με αρνητικό $x_i$ και σε αυτό που έχει τα στοιχεία του $\mathbb{R}^n$ με θετικό $x_i$. Συνεπώς, κάθε περιοχή καθορίζεται από τα πρόσημα που έχουν οι συντεταγμένες των στοιχείων της. Αφού έχουμε 2 επιλογές προσήμου για καθεμιά από τις $n$ συντεταγμένες, ισχύει ότι $r(\mathcal{E}_n) = 2^n$. Το $\mathcal{E}_n$ είναι ουσιώδες και καμία από τις περιοχές του δεν είναι φραγμένη. Άρα $b(\mathcal{E}_n) = 0$.

## 3.2 CW - συμπλέγματα

Ένα χρήσιμο εργαλείο για την απόδειξη του κύριου θεωρήματος σε αυτό το κεφάλαιο είναι τα CW-συμπλέγματα. Θα ασχοληθούμε μόνο με πεπερασμένα CW-συμπλέγματα. Δίνουμε εδώ σε συντομία όσα έχουν σχέση με αυτά και θα μας χρειαστούν στη συνέχεια.

**Ορισμός 3.1** *Έστω $X$ τοπολογικός χώρος Hausdorff. Μια CW-δομή για τον $X$ είναι ένα πεπερασμένο σύνολο $\mathcal{X}$ υποσυνόλων του $X$, που καλούμε κύτταρα (cells) και για το οποίο ισχύουν:*

1. *Το $\mathcal{X}$ είναι διαμέριση του $X$.*
2. *Για κάθε $e \in \mathcal{X}$, υπάρχει $|e| \in \mathbb{N}$ (ο οποίος καλείται διάσταση του $e$) και συνεχής απεικόνιση $\varphi_e : B^{|e|} \to X$ τέτοια ώστε η $\varphi_e \big|_{int(B^{|e|})}$ να είναι ομοιομορφισμός από το $int(B^{|e|})$ στο $e$ και η $\varphi_e(S^{|e|-1})$ να είναι ένωση κυττάρων μικρότερης διάστασης.*

*Ένα CW-σύμπλεγμα (CW-complex) είναι ένα ζεύγος $(X, \mathcal{X})$, που αποτελείται από ένα τοπολογικό χώρο Hausdorff $X$ και μια CW-δομή $\mathcal{X}$ του $X$.*

Δηλαδή, μια CW-δομή σε ένα χώρο είναι μια διαμέριση του χώρου σε κομμάτια ομοιομορφικά με το εσωτερικό μπαλών $B^n$, τα οποία συμβολίζουμε με $e^n$ και τα οποία συνδέονται στο χώρο με τέτοιο τρόπο ώστε το σύνορο κάθε $e^n$ να είναι ένωση κάποιων $e^m$ με $m < n$. Αν οι απεικονίσεις $\varphi_e$ είναι ομοιομορφισμοί για κάθε κύτταρο $e$ του $X$, τότε λέμε ότι έχουμε *κανονικό CW-σύμπλεγμα (regular CW-complex)*. Δεν αποκλείεται στον ίδιο χώρο να ορίζονται διαφορετικές CW-δομές.

**Ορισμός 3.2** *Αν στον χώρο $X$ ορίζεται CW-δομή, τότε η χαρακτηριστική Euler $\chi(X)$ του $X$ είναι το πλήθος των κυττάρων άρτιας διάστασης πλην το πλήθος των κυττάρων περιττής διάστασης.*

Η χαρακτηριστική Euler ενός χώρου είναι ανεξάρτητη από τη CW-δομή που θα ορίσουμε σε αυτόν. Εξαρτάται μόνο από την τοπολογία του χώρου· εξού και καλείται χαρακτηριστική.

**Παραδείγματα**

1. Στη σφαίρα $S^{n-1}$ μπορούμε να ορίσουμε διάφορες CW-δομές. Θα παρουσιάσουμε δύο από αυτές.

    (a) Αν αφαιρέσουμε το βόρειο πόλο από τη σφαίρα $S^{n-1}$, τότε αυτό που μένει είναι ομοιομορφικό με το εσωτερικό της $B^{n-1}$. Άρα έχουμε $S^{n-1} = e^{n-1} \cup e^0$. Με αυτή τη CW-δομή, η $S^{n-1}$ δεν είναι κανονικό CW-σύμπλεγμα. Η χαρακτηριστική Euler της $S^{n-1}$ είναι 0 αν ο $n$ είναι άρτιος και 2 αν ο $n$ είναι περιττός.

    (b) Επαγωγικά, αν θεωρήσουμε ότι η $S^{n-2}$ έχει μια CW-δομή, μπορούμε να πάρουμε την $S^{n-1}$ από την $S^{n-2}$ με την προσθήκη δύο $(n-1)$-κυττάρων $e_+^{n-1}, e_-^{n-1}$ ως το βόρειο και το νότιο ημισφαίριο αντίστοιχα. Με επαγωγή επαληθεύουμε ότι και με αυτή την CW-δομή παίρνουμε την ίδια χαρακτηριστική Euler για την $S^{n-1}$. Σε αυτή την περίπτωση η CW-δομή είναι κανονική.

2. Αν έχουμε ένα παράταγμα υπερεπιπέδων $\mathcal{A}$ στον $\mathbb{R}^n$, μπορούμε μέσω αυτού να ορίσουμε μια CW-δομή στον $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε ως κλειστές πλευρές του $\mathcal{A}$ κάθε σύνολο της μορφής $F = \bar{R} \cap x$, όπου $R$ είναι περιοχή του $\mathcal{A}$ και $x \in L(\mathcal{A})$. Κάθε κλειστή πλευρά $F$ περιέχεται στον αντίστοιχο αφφινικό υπόχωρο $x \in L(\mathcal{A})$. Ονομάζουμε πλευρά του $\mathcal{A}$, το εσωτερικό κάθε κλειστής πλευράς στον $x$ και διάσταση της πλευράς, τη διάσταση του $x$. Οι πλευρές του $\mathcal{A}$ αποτελούν μια διαμέριση του $\mathbb{R}^n$. Ήδη σημειώσαμε ότι οι περιοχές του παρατάγματος, δηλαδή οι πλευρές διάστασης $n$, είναι ομοιομορφικές με το εσωτερικό της $B^n$. Ομοίως, κάθε πλευρά μικρότερης διάστασης είναι περιοχή του παρατάγματος $\mathcal{A}_x = \{H \cap x : H \in \mathcal{A}\}$, όπου $x$ είναι ο αφφινικός υπόχωρος που την περιέχει. Δηλαδή, κάθε πλευρά διάστασης $k$ είναι ομοιομορφική με το εσωτερικό της $B^k$. Συνολικά, οι πλευρές αυτές αποτελούν μια CW-δομή για τον $\mathbb{R}^n$.

Περισσότερες πληροφορίες για CW-συμπλέγματα υπάρχουν στα [14] και [17].

## 3.3 Το πλήθος των περιοχών

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός παρατάγματος υπερεπιπέδων μας δίνει ακριβείς πληροφορίες για το πλήθος των περιοχών και των φραγμένων περιοχών του παρατάγματος.

**Θεώρημα 3.1** (Las Vergnas [16], Zaslavsky [29]) *Αν το $\mathcal{A}$ είναι παράταγμα υπερεπιπέδων στον $\mathbb{R}^n$ τάξης $r$, τότε*

$$r(\mathcal{A}) = (-1)^n \chi_{\mathcal{A}}(-1) \text{ και } b(\mathcal{A}) = (-1)^r \chi_{\mathcal{A}}(1).$$

Στο δεύτερο μέρος του [26] υπάρχουν δύο αποδείξεις για το θεώρημα. Η πρώτη απόδειξη γίνεται με τη μέθοδο της επαγωγής χρησιμοποιώντας την ιδιότητα διαγραφής - περιορισμού του χαρακτηριστικού πολυωνύμου. Εδώ θα παρουσιάσουμε τη δεύτερη απόδειξη που χρησιμοποιεί το Θεώρημα 2.1 της αντιστροφής Möbius και τη χαρακτηριστική Euler. Σε αυτή την παράγραφο, θα συμβολίζουμε τη χαρακτηριστική Euler του $X$ με $\psi(X)$, για να αποφύγουμε τη σύγχυση με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

Απόδειξη: Αφού ο $\mathbb{R}^n$ είναι ομοιομορφικός με το εσωτερικό της $n$-διάστατης μπάλας, μια CW-δομή για τον $\mathbb{R}^n$ είναι η $\mathcal{X} = \{\mathbb{R}^n\}$ και η χαρακτηριστική Euler του $\mathbb{R}^n$ είναι $(-1)^n$. Όπως είδαμε σε προηγούμενο παράδειγμα, μια άλλη CW-δομή για τον $\mathbb{R}^n$ είναι η διαμέρισή του στις πλευρές του παρατάγματος $\mathcal{A}$. Αν $f_k(\mathcal{A})$ είναι το πλήθος των πλευρών του $\mathcal{A}$ διάστασης $k$, τότε $(-1)^n = \psi(\mathbb{R}^n) = f_0(\mathcal{A}) - f_1(\mathcal{A}) + f_2(\mathcal{A}) - \cdots + (-1)^n f_n(\mathcal{A})$. Ήδη παρατηρήσαμε ότι κάθε $k$-πλευρά είναι περιοχή του $\mathcal{A}_x = \{H \cap x : H \in \mathcal{A}\}$ για κάποιο $x$ με $\dim x = k$. Συνεπώς, $f_k(\mathcal{A}) = \sum_{x \in L(\mathcal{A}), \dim x = k} r(\mathcal{A}_x)$. Πολλαπλασιάζοντας με $(-1)^k$ και αθροίζοντας, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} (-1)^{\dim(\mathbb{R}^n)} = \psi(\mathbb{R}^n) &= \sum_{x \in L(\mathcal{A})} (-1)^{\dim x} r(\mathcal{A}_x) \\ &= \sum_{x \in L(\mathcal{A}), x \geq \mathbb{R}^n} (-1)^{\dim x} r(\mathcal{A}_x). \end{aligned}$$

Από την παραπάνω σχέση, με αντιστροφή Möbius (Θεώρημα 2.1), προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} (-1)^n r(\mathcal{A}) = (-1)^{\dim(\mathbb{R}^n)} r(\mathcal{A}) &= \sum_{x \in L(\mathcal{A}), x \geq \mathbb{R}^n} (-1)^{\dim x} \mu(\mathbb{R}^n, x) \\ &= \sum_{x \in L(\mathcal{A})} (-1)^{\dim x} \mu(x) = \chi_{\mathcal{A}}(-1). \end{aligned}$$

Η απόδειξη για τον τύπο που αφορά τις σχετικά φραγμένες περιοχές γίνεται με παρόμοιο τρόπο. Κατ' αρχάς, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το παράταγμα είναι ουσιώδες, γιατί αν δεν είναι, τότε ισχύουν οι σχέσεις $b(\mathcal{A}) = b(\mathcal{A}_X)$ και $\chi_{\mathcal{A}}(t) = t^{\dim(\mathcal{A}) - \dim(\mathcal{A}_X)} \chi_{\mathcal{A}_X}(t)$ [2]. Συνεπώς, ασχολούμαστε με ουσιώδη παρατάγματα και με φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Έχει αποδειχθεί (βλ. Θεώρημα 4.5.7 στο [6]) ότι η χαρακτηριστική Euler της ένωσης $\Gamma$ των φραγμένων περιοχών είναι ίση με 1. Με το ίδιο σκεπτικό όπως πιο πάνω, έχουμε ότι $1 = g_0 - g_1 + g_2 - \cdots + (-1)^n g_n$, όπου $g_k$ είναι το πλήθος των φραγμένων πλευρών διάστασης $k$. Οι πλευρές αυτές είναι φραγμένες περιοχές για κάποιο $\mathcal{A}_x$ με $\dim x = k$. Συνεπώς, $g_k(\mathcal{A}) = \sum_{x \in L(\mathcal{A}), \dim x = k} b(\mathcal{A}_x)$. Πολλαπλασιάζοντας με $(-1)^k$ και αθροίζοντας, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} 1 = \psi(\Gamma) &= \sum_{x \in L(\mathcal{A})} (-1)^{\dim x} \, b(\mathcal{A}_x) \\ &= \sum_{x \in L(\mathcal{A}), x \geq \mathbb{R}^n} (-1)^{\dim x} \, b(\mathcal{A}_x) \qquad \Rightarrow \end{aligned}$$

[2]Το $X$ ορίζεται όπως στην υποσημείωση της σελίδας 14.

$$
\begin{aligned}
(-1)^{\mathrm{rank}(\mathcal{A})}\, b(\mathcal{A}) = (-1)^{\dim(\mathbb{R}^n)}\, b(\mathcal{A}) &= \sum_{x \in L(\mathcal{A}), x \geq \mathbb{R}^n} 1 \cdot \mu(\mathbb{R}^n, x) \\
&= \sum_{x \in L(\mathcal{A})} \mu(x) = \chi_{\mathcal{A}}(1).
\end{aligned}
$$

□

Από το Θεώρημα 3.1 μπορούμε να συμπεράνουμε κάτι το οποίο δεν είναι προφανές διαισθητικά. Το πλήθος των περιοχών ενός παρατάγματος υπερεπιπέδων εξαρτάται μόνο από το σύνολο τομών του παρατάγματος. Δηλαδή, η παράλληλη μετατόπιση και οποιαδήποτε άλλη μεταφορά υπερεπιπέδων, η οποία δε μεταβάλλει το σύνολο τομών του παρατάγματος, δεν επηρεάζει το πλήθος των περιοχών.

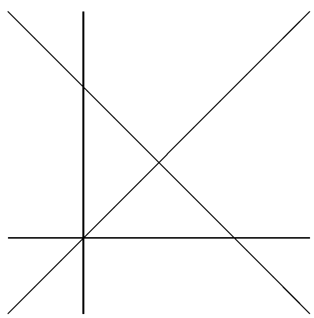
**Πόρισμα 3.1** *Ισχύει ότι*

$$f_k(\mathcal{A}) = (-1)^k \sum_{\dim(x)=k, x \leq y} (-1)^{\dim y} \mu(x, y).$$

Απόδειξη: Ήδη αναφέραμε ότι οι $k$-πλευρές είναι περιοχές για κάποιο $\mathcal{A}_x$ με $\dim x = k$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.1 σε όλα τα $\mathcal{A}_x$ με $\dim x = k$ και αθροίζοντας, παίρνουμε το πόρισμα. □

**Εφαρμογές**

1. Για το παράταγμα υπερεπιπέδων



   γνωρίζουμε ότι $\chi(t) = t^2 - 4t + 5$ και $r = 10,\ b = 2$. Εύκολα επαληθεύουμε ότι ισχύει το Θεώρημα 3.1 σε αυτή την περίπτωση.

2. Αν $\mathcal{E}_n = \{\{x_i = 0\} : i = 1, ..., n\}$, τότε, όπως υπολογίσαμε πιο πάνω, $\chi_{\mathcal{E}_n}(t) = (t-1)^n$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1, $r(\mathcal{E}_n) = (-1)^n(-1-1)^n = 2^n$ και $b(\mathcal{E}_n) = (-1)^n(1-1)^n = 0$, επιβεβαιώνοντας προηγούμενο παράδειγμα.

3. Αν $\mathcal{A}_n = \{H_{ij} : 1 \leq i < j \leq n\}$ με $H_{ij}$ να είναι το υπερεπίπεδο που ορίζεται από την εξίσωση $x_i = x_j$, έχουμε ότι $\chi_{\mathcal{A}_n}(t) = t(t-1)\cdots(t-n+1)$. Άρα $r(\mathcal{A}_n) = (-1)^n(-1)(-2)\cdots(-n) = n!$ και $b(\mathcal{A}_n) = (-1)^{n-1} \cdot 1 \cdot 0 \cdot (-1) \cdots (-n+2) = 0$.

# Κεφάλαιο 4

# Μιγαδικά παρατάγματα υπερεπιπέδων

Μεταφερόμαστε τώρα σε μιγαδικά παρατάγματα υπερεπιπέδων. Θα δούμε ότι σε αυτή την περίπτωση το χαρακτηριστικό πολυώνυμο μας δίνει τοπολογικές πληροφορίες. Στο κεφάλαιο αυτό θα δείξουμε πώς, μέσω του χαρακτηριστικού πολυωνύμου ενός μιγαδικού παρατάγματος υπερεπιπέδων, μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνομολογία του συμπληρώματός του.

Έστω $\mathcal{A} = \{H_1, ..., H_k\}$ παράταγμα υπερεπιπέδων στον $\mathbb{C}^n$. Ονομάζουμε *ζεύγμα (link)* του $\mathcal{A}$ το σύνολο $D_{\mathcal{A}} = (\cup_{i=1}^k H_i) \cap S^{2n-1}$, όπου $S^{2n-1}$ είναι η μοναδιαία σφαίρα στον $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$. Το *συμπλήρωμα* $C_{\mathcal{A}}$ του $\mathcal{A}$ είναι το σύνολο $\mathbb{C}^n \setminus \{\cup_{i=1}^k H_i\}$. Στόχος μας είναι να υπολογίσουμε τις ομάδες ομολογίας του $D_{\mathcal{A}}$ και τις ομάδες συνομολογίας του $C_{\mathcal{A}}$. Για να τις υπολογίσουμε πρέπει πρώτα να εξοικειωθούμε με τα εργαλεία που θα χρησιμοποιήσουμε.

## 4.1 Μητροειδή

Τα μητροειδή και τα συμπλέγματα σπασμένων κυκλωμάτων θα μας δώσουν μια νέα ερμηνεία για το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, η οποία θα μας βοηθήσει να το συνδέσουμε με τοπολογικά χαρακτηριστικά.

Αν $T$ είναι ένα σύνολο, συμβολίζουμε με $\mathcal{P}(T)$ το δυναμοσύνολο του $T$, δηλαδή το σύνολο των υποσυνόλων του $T$.

**Ορισμός 4.1** *Ένα (πεπερασμένο) μητροειδές (matroid) είναι ένα ζεύγος $M = (S, \mathcal{J})$, όπου $S$ είναι ένα πεπερασμένο σύνολο και $\mathcal{J}$ είναι μια συλλογή υποσυνόλων του $S$ που ικανοποιεί τα αξιώματα:*

1. *Η $\mathcal{J}$ είναι μη κενή και αν $J \in \mathcal{J}$ και $I \subseteq J$, τότε $I \in \mathcal{J}$.*
2. *Για κάθε $T \subseteq S$, τα μεγιστικά στοιχεία του $\mathcal{J} \cap \mathcal{P}(T)$ είναι ισοπληθικά.*

*Τα στοιχεία του $\mathcal{J}$ λέγονται ανεξάρτητα σύνολα.*

Όταν γράφουμε $x \in M$, εννοούμε $x \in S$. Η ανεξαρτησία που συναντούμε στα μητροειδή αποτελεί γενίκευση της έννοιας της γραμμικής ανεξαρτησίας στα υποσύνολα ενός γραμμικού χώρου.
Μια βάση του $M$ είναι ένα μεγιστικό ανεξάρτητο σύνολο. Ένα *κύκλωμα (circuit)* είναι ένα σύνολο που δεν είναι ανεξάρτητο, αλλά κάθε γνήσιο υποσύνολό του είναι ανεξάρτητο. Ορίζουμε την *τάξη* του $T$, όπου $T \subseteq S$, ως $rk(T) = \max\{|I| : I \in \mathcal{J}, I \subseteq T\}$ και την τάξη του $M$ ως $rk(M) = rk(S)$.

Για να ορίσουμε τα συμπλέγματα σπασμένων κυκλωμάτων χρειαζόμαστε μια ολική διάταξη στα στοιχεία του μητροειδούς.

**Ορισμός 4.2** *Έστω $M$ ένα μητροειδές στο σύνολο $S = \{u_1, ..., u_m\}$ και $u_1 < u_2 < \cdots < u_m$ μια ολική διάταξη στο $S$. Ένα σπασμένο κύκλωμα (broken circuit) στο $M$ είναι ένα σύνολο της μορφής $C \setminus \{u\}$, όπου $C$ είναι ένα κύκλωμα και $u$ είναι το μικρότερο στοιχείο του $C$ ως προς τη διάταξη στο $S$. Το σύμπλεγμα των σπασμένων κυκλωμάτων (broken circuit complex) ή $BC$-σύμπλεγμα ορίζεται ως $BC(M) = \{T \subseteq S :$ το $T$ δεν περιέχει κανένα σπασμένο κύκλωμα$\}$.*

**Παράδειγμα:** Έστω $M$ το μητροειδές στο $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ του οποίου τα ανεξάρτητα υποσύνολα είναι όλα τα υποσύνολα με δύο στοιχεία ή λιγότερα, καθώς και όλα τα υποσύνολα με τρία στοιχεία εκτός από τα $\{1, 2, 3\}$, $\{3, 4, 5\}$. Το $M$ μπορεί να οριστεί από ένα σύνολο πέντε σημείων $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ στον $\mathbb{R}^2$, τέτοιο ώστε τα σημεία 1,2,3 να είναι συνευθειακά, όπως και τα σημεία 3,4,5. Τα κυκλώματα του $M$ είναι τα $\{1, 2, 3\}$, $\{3, 4, 5\}$ και $\{1, 2, 4, 5\}$. Αν θεωρήσουμε τη διάταξη $1 < 2 < 3 < 4 < 5$, τότε τα σπασμένα κυκλώματα του $M$ είναι τα σύνολα $\{2, 3\}$, $\{4, 5\}$ και $\{2, 4, 5\}$. Το $BC$-σύμπλεγμα του $M$ περιέχει όλα τα υποσύνολα του $M$ που δεν είναι υπερσύνολα των σπασμένων κυκλωμάτων του $M$, δηλαδή

$$BC(M) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,4\},$$

$$\{3,5\}, \{1,2,4\}, \{1,2,5\}, \{1,3,4\}, \{1,3,5\}\}.$$

Σε κάθε παράταγμα υπερεπιπέδων αντιστοιχεί ένα μητροειδές. Έστω $\mathcal{A} = \{H_1, ..., H_k\}$ ένα παράταγμα υπερεπιπέδων στον $\mathbb{K}^n$, όπου το υπερεπίπεδο $H_i$ ορίζεται από την εξίσωση $a_i \cdot x = b_i$, $a_i \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$, $b_i \in \mathbb{K}$ για $i = 1, ..., k$. Ορίζουμε το μητροειδές του $\mathcal{A}$, $M_{\mathcal{A}} = (S, \mathcal{J})$, με $S = [k]$ και $J \in \mathcal{J}$ αν και μόνο αν το σύνολο $\{a_i : i \in J\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του $\mathbb{K}^n$. Στο $S$ έχουμε την ολική διάταξη των φυσικών αριθμών.

## 4.2 Το σύμπλεγμα των σπασμένων κυκλωμάτων

Στόχος μας είναι να συνδέσουμε το σύμπλεγμα των σπασμένων κυκλωμάτων του μητροειδούς ενός παρατάγματος υπερεπιπέδων με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του παρατάγματος. Γι' αυτό θα συσχετίσουμε το $BC$-σύμπλεγμα του μητροειδούς που ορίζεται από το παράταγμα υπερεπιπέδων $\mathcal{A}$ με τα $BC$-συμπλέγματα των μητροειδών των $\mathcal{A}'$ και $\mathcal{A}''$. Με τη βοήθεια της αναδρομικής σχέσης που θα βρούμε με αυτό τον τρόπο για το $BC$-σύμπλεγμα και της ιδιότητας διαγραφής - περιορισμού, θα πετύχουμε τη σύνδεση που θέλουμε.

**Λήμμα 4.1** (Brylawski [10]) *Έστω $\mathcal{A} = \{H_1, ..., H_k\}$ παράταγμα υπερεπιπέδων στον $\mathbb{C}^n$ και έστω $(\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}'')$ η τριάδα που ορίζεται ως προς $H_k$ όπως στην Παράγραφο 2.3. Θεωρούμε τα μητροειδή $M, M', M''$ των παραταγμάτων $\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}''$ αντίστοιχα. Αν σε αυτά θεωρήσουμε τη διάταξη των φυσικών αριθμών, τότε ισχύει*

$$BC(M) = BC(M') \cup \{I \cup \{k\} : I \in BC(M'')\}, \tag{4.1}$$

*όπου τα δύο σύνολα στο δεξιό μέλος της ισότητας είναι ξένα μεταξύ τους.*

Απόδειξη: Θυμίζουμε ότι $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \setminus \{H_k\}$ και κατά συνέπεια τα ανεξάρτητα υποσύνολα του $M' = M \setminus \{k\}$ είναι τα ανεξάρτητα υποσύνολα του $M$ που δεν περιέχουν το $k$. Με άλλα λόγια, το $T$ είναι ανεξάρτητο υποσύνολο του $M'$ αν και μόνο αν το $T$ είναι ανεξάρτητο υποσύνολο του $M$ που δεν περιέχει το $k$. Από την άλλη, $\mathcal{A}'' = \{H_m \cap H_k : 1 \leq m < k\}$ και $M'' = [k-1]$. Αν θεωρήσουμε ότι το $H_m$ στο $\mathcal{A}$ ορίζεται από μια εξίσωση της μορφής $a_m \cdot x = b_m$ με $a_m \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ και $b_m \in \mathbb{C}$, τότε το αντίστοιχο $H_m \cap H_k$ στο $\mathcal{A}''$ ορίζεται από μια εξίσωση της μορφής $a''_m \cdot x = b''_m$, όπου το διάνυσμα $a''_m$ είναι η ορθογώνια προβολή του διανύσματος $a_m$ στο υπερεπίπεδο $H_k$. Κατά συνέπεια, ένα υποσύνολο $I$ του $M''$ είναι ανεξάρτητο αν και μόνο αν το $I \cup \{k\}$ είναι ανεξάρτητο υποσύνολο του $M$.
Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} BC(M) &= \{T \subseteq M : k \notin T \text{ και το } T \text{ δεν περιέχει σπασμένο κύκλωμα}\} \\ &\quad \cup \{T \subseteq M : k \in T \text{ και το } T \text{ δεν περιέχει σπασμένο κύκλωμα}\}. \end{aligned}$$

Αν ένα σπασμένο κύκλωμα δεν περιέχει το $k$, τότε αναγκαστικά προέρχεται από κύκλωμα που δεν περιέχει το $k$. Συνεπώς έχουμε ότι

$$BC(M') = \{T \subseteq M : k \notin T \text{ και το } T \text{ δεν περιέχει σπασμένο κύκλωμα}\}.$$

Άρα, μένει να δείξουμε ότι

$$\{I \cup \{k\} : I \in BC(M'')\} = \{T \subseteq M : k \in T \text{ και το } T \text{ δεν περιέχει σπασμένο κύκλωμα}\}$$

δηλαδή ότι

$$BC(M'') = \{I \subseteq M \setminus \{k\} : \text{το } I \cup \{k\} \text{ δεν περιέχει σπασμένο κύκλωμα του } M\}.$$

Όντως, αυτό ισχύει αφού το $I$ περιέχει σπασμένο κύκλωμα στο $M''$ αν και μόνο αν το $I \cup \{k\}$ περιέχει σπασμένο κύκλωμα στο $M$. $\square$

Το επόμενο θεώρημα συνδέει το σύμπλεγμα των σπασμένων κυκλωμάτων του μητροειδούς ενός παρατάγματος υπερεπιπέδων με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του παρατάγματος μέσω του τύπου (4.2) των Whitney - Rota.
Θα λέμε πλευρές τα στοιχεία του $BC(M)$ και $i$-πλευρές τα στοιχεία του $BC(M)$ με πληθικό αριθμό $i+1$.

**Θεώρημα 4.1** *Έστω $\mathcal{A} = \{H_1, ..., H_k\}$ παράταγμα υπερεπιπέδων στον $\mathbb{C}^n$ με μητροειδές $M$. Αν συμβολίσουμε με $f_i$ το πλήθος των $i$-πλευρών του $BC(M)$, τότε ισχύει*

$$1 + \sum_{i=1}^{n} f_{i-1} t^i = (-t)^n \chi_{\mathcal{A}} \left( -\frac{1}{t} \right). \tag{4.2}$$

Απόδειξη: Θα χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις (2.3) και (4.1). Συμβολίζουμε με $f_i^M$ το πλήθος των $i$-πλευρών του $BC(M)$. Από την σχέση (4.1) συμπεραίνουμε ότι

$$f_i^M = f_i^{M'} + f_{i-1}^{M''} \; \forall i \geq 1 \text{ και } f_0^M = f_0^{M'} + 1. \tag{4.3}$$

Χρησιμοποιούμε επαγωγή στο $k$. Αν $k = 1$, τότε $f_0 = 1$ και $1+\sum_{i=1}^{n} f_{i-1}t^i = 1+t$. Από την άλλη, $\chi(t) = t^n - t^{n-1} \Rightarrow (-t)^n\chi(-1/t) = (-t)^n((-1/t)^n - (-1/t)^{n-1}) = 1 + t$. Άρα το θεώρημα ισχύει για $k = 1$. Έστω τώρα ότι το θεώρημα ισχύει για κάθε παράταγμα που περιέχει λιγότερα από $k$ υπερεπίπεδα. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
(-t)^n\chi_{\mathcal{A}}\left(-\frac{1}{t}\right) &\overset{(2.3)}{=} (-t)^n\chi_{\mathcal{A}'}\left(-\frac{1}{t}\right) - (-t)^n\chi_{\mathcal{A}''}\left(-\frac{1}{t}\right) \\
&\overset{\text{επαγωγή}}{=} 1 + \sum_{i=1}^{n} f_{i-1}^{M'}t^i - (-t)(1 + \sum_{i=1}^{n-1} f_{i-1}^{M''}t^i) \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{n} f_{i-1}^{M'}t^i + t + \sum_{i=2}^{n} f_{i-2}^{M''}t^i \\
&= 1 + (f_0^{M'} + 1)t + \sum_{i=2}^{n}(f_{i-1}^{M'} + f_{i-2}^{M''})t^i \\
&\overset{(4.3)}{=} 1 + f_0^M t + \sum_{i=2}^{n} f_{i-1}^M t^i \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{n} f_{i-1}^M t^i.
\end{aligned}$$

□

Άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 4.1 είναι το ακόλουθο πόρισμα.

**Πόρισμα 4.1** *Το πλήθος των $i$-πλευρών του $BC$-συμπλέγματος δεν εξαρτάται από την ολική διάταξη στο μητροειδές.*

## 4.3 Κυτταρική ομολογία

Πριν προχωρήσουμε στα κύρια αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου που αφορούν ομολογία και συνομολογία, είναι καλό να αναφερθούμε επιγραμματικά σε αυτές τις δύο έννοιες και στο τι ακριβώς αντιπροσωπεύουν. Θα κάνουμε μια πολύ σύντομη αναφορά σε θέματα ομολογίας, για να μπορέσει ο αναγνώστης που δεν είχε καμία επαφή με αυτό το αντικείμενο να παρακολουθήσει όσα έπονται. Θα περιοριστούμε αποκλειστικά σε ομάδες ομολογίας με ακέραιους συντελεστές. Για περαιτέρω λεπτομέρειες και για τις αποδείξεις των θεωρημάτων που θα αναφέρουμε σε αυτή την παράγραφο, παραπέμπουμε στα [14] και [17].

Ένα *αλυσωτό σύμπλεγμα (chain complex)* είναι μια ακολουθία αβελιανών ομάδων $\{C_n\}$ και ομομορφισμών ομάδων $\partial_n : C_n \to C_{n-1}$ (που καλούμε συνοριακούς τελεστές)

$$(\mathcal{C}, \partial) : \cdots \to C_{n+1} \overset{\partial_{n+1}}{\to} C_n \overset{\partial_n}{\to} C_{n-1} \to \cdots$$

τέτοια ώστε $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, δηλαδή να ισχύει ότι $\mathrm{Im}(\partial_{n+1}) \subseteq \ker(\partial_n)$. Αν έχουμε ισότητα, τότε η ακολουθία μας λέγεται ακριβής. Για να υπολογίσουμε πόσο απέχει η ακολουθία μας από το να είναι ακριβής, ορίζουμε τις *ομάδες ομολογίας (homology groups)* $H_n((\mathcal{C}, \partial)) = \ker(\partial_n)/\mathrm{Im}(\partial_{n+1})$. Θα καλούμε κύκλους τα στοιχεία της ομάδας $\ker(\partial_n)$ και θα συμβολίζουμε με $< d >$ την κλάση ισοδυναμίας του κύκλου $d$ στην ομάδα πηλίκο $H_n((\mathcal{C}, \partial))$.

Οι ομάδες συνομολογίας ορίζονται και αυτές μέσω ενός αλυσωτού συμπλέγματος. Σε αυτή την περίπτωση, αντί των ομάδων $C_n$, χρησιμοποιούμε τις ομάδες $C_n^* = Hom(C_n, \mathbb{Z})$ και αντί του $\partial_n : C_n \to C_{n-1}$, χρησιμοποιούμε τον δυϊκό του $\partial_n^* : Hom(C_{n-1}, \mathbb{Z}) \to Hom(C_n, \mathbb{Z})$, $\varphi \mapsto \partial_n^*(\varphi) = \varphi \circ \partial_n$. Έτσι δημιουργείται το συναλυσωτό σύμπλεγμα

$$(\mathcal{C}^*, \partial) : \cdots \to C_{n-1}^* \xrightarrow{\partial_n^*} C_n^* \xrightarrow{\partial_{n+1}^*} C_{n+1}^* \to \cdots$$

για το οποίο ισχύει και πάλι ότι $\partial_{n+1}^* \circ \partial_n^* = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, δηλαδή ότι $\mathrm{Im}(\partial_n^*) \subseteq \ker(\partial_{n+1}^*)$. Οι *ομάδες συνομολογίας (cohomology groups)* ορίζονται ως οι ομάδες πηλίκο $H^n((\mathcal{C}, \partial)) = \ker(\partial_{n+1}^*)/\mathrm{Im}(\partial_n^*)$.

Αν έχουμε ένα τοπολογικό χώρο $X$, υπάρχουν διάφορες μέθοδοι για να δημιουργήσουμε ένα αλυσωτό σύμπλεγμα και να υπολογίσουμε από αυτό τις ομάδες ομολογίας ή συνομολογίας του χώρου. Συνήθως χρησιμοποιούνται τα simplicial συμπλέγματα, που σχετίζονται με τριγωνοποιήσεις του χώρου, ή τα singular συμπλέγματα και έτσι έχουμε την simplicial ή την singular ομολογία αντίστοιχα. Εδώ, αφού ήδη εξοικειωθήκαμε με τα CW-συμπλέγματα, θα χρησιμοποιήσουμε τα κυτταρικά συμπλέγματα και την κυτταρική ομολογία. Έχει αποδειχθεί ότι η κυτταρική ομολογία είναι ισοδύναμη με τη singular και τη simplicial ομολογία, δηλαδή μας δίνουν ισόμορφες ομάδες ομολογίας (βλ. ενότητα 2.2 του [14]). Έτσι, χρησιμοποιώντας την κυτταρική ομολογία, θα πάρουμε ακριβώς τα ίδια αποτελέσματα που θα μας έδιναν η simplicial ή η singular ομολογία.

Οι ομάδες ομολογίας και συνομολογίας συνδέονται μεταξύ τους κάτω από ορισμένες συνθήκες.

**Θεώρημα 4.2** *(Η δυϊκότητα Alexander) Αν το $D$ είναι συμπαγές, τοπικά συσταλτό, μη κενό, γνήσιο υποσύνολο της $S^{n-1}$, τότε οι $H_i(S^{n-1} \setminus D)$ και $H^{n-i-1}(D)$ είναι ισόμορφες.*

Μια απόδειξη του θεωρήματος υπάρχει στην ενότητα 3.3 του [14].

Ας δούμε τώρα πώς ορίζουμε το κυτταρικό σύμπλεγμα σε χώρους με CW-δομή. Έστω $X$ χώρος για τον οποίο έχουμε μια CW-δομή. Ορίζουμε το *κυτταρικό σύμπλεγμα (cell complex)* $(\mathcal{C}(X), \partial)$ ως το αλυσωτό σύμπλεγμα που έχει σαν $n$-οστή ομάδα $C_n(X)$ την ελεύθερη αβελιανή ομάδα που παράγεται από τα $n$-κύτταρα και σαν συνοριακό τελεστή $\partial : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ την απεικόνιση που ορίζεται ως εξής:
Έστω $e^n$ ένα κύτταρο διάστασης $n$. Συμβολίζουμε με $X^n$ το σύνολο όλων των κυττάρων της CW-δομής με διάσταση μικρότερη ή ίση του $n$. Από τον Ορισμό 3.1, έχουμε απεικόνιση $\varphi : \partial e^n \to X^{n-1}$. Ορίζουμε σαν $\varphi_f : \partial e^n \to f$, όπου $f$ είναι ένα κύτταρο διάστασης $n-1$, την απεικόνιση $\pi_f \circ \varphi$, όπου $\pi_f : X^{n-1} \to X^{n-1}/(X^{n-1} \setminus f)$ είναι η

φυσική προβολή. Με αυτούς τους συμβολισμούς, έχουμε

$$\partial([e^n]) = \sum_{\dim f = n-1} \deg\varphi_f [f^{n-1}]^1.$$

Έτσι ο χώρος μας αποκτά ένα κυτταρικό σύμπλεγμα. Μέσω αυτού μπορούμε να υπολογίσουμε τις ομάδες ομολογίας και συνομολογίας του χώρου.

Ένα αποτέλεσμα που αφορά τις ομάδες ομολογίας και θα μας φανεί χρήσιμο στη συνέχεια είναι η μακρά ακριβής ακολουθία Mayer - Vietoris. Το θεώρημα αυτό αποδεικνύεται στην ενότητα 2.2 του [14].

**Θεώρημα 4.3** *Αν $X$ είναι τοπολογικός χώρος και $U, V$ δύο ανοικτά υποσύνολα του $X$ με $U \cup V = X$ και $U \cap V = A$, τότε έχουμε τη μακρά ακριβή ακολουθία*

$$\cdots \to H_{n+1}(X) \xrightarrow{\partial^*} H_n(A) \xrightarrow{\varphi} H_n(U) \oplus H_n(V) \xrightarrow{\psi} H_n(X) \xrightarrow{\partial^*} H_{n-1}(A) \to \cdots .$$

Η $\varphi : H_n(A) \to H_n(U) \oplus H_n(V)$ είναι το ευθύ άθροισμα των απεικονίσεων που επάγονται από τους εγκλεισμούς $i_A^1 : A \hookrightarrow U$ και $i_A^2 : A \hookrightarrow V$. Η $\psi : H_n(U) \oplus H_n(V) \to H_n(X)$ είναι η διαφορά των απεικονίσεων που επάγονται από τους εγκλεισμούς $i_U : U \hookrightarrow X$ και $i_V : V \hookrightarrow X$. Τέλος, η $\partial^* : H_{n+1}(X) \to H_n(A)$ είναι της μορφής $\partial^* = (i_A^1, i_A^2)^{-1}\partial(i_U - i_V)^{-1}$.

## 4.4 Η s-διαστρωμάτωση

Θα υπολογίσουμε τις ομάδες ομολογίας του $D_{\mathcal{A}}$ προσδιορίζοντας κάποιους γεννήτορες των ομάδων αυτών. Στον προσδιορισμό των γεννητόρων θα μας βοηθήσει η **s**-διαστρωμάτωση του χώρου όπως επιτυγχάνεται με τη βοήθεια του $\mathcal{A}$. Η μέθοδος που θα αναφέρουμε αναπτύχθηκε από τους Björner και Ziegler [8]. Το τελικό αποτέλεσμα που αφορά τη συνομολογία του συμπληρώματος είναι προγενέστερο και αποδείχθηκε από τον Brieskorn [9] και από τους Orlik και Solomon [18].

**Ορισμός 4.3** *Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z = x + iy$ ορίζουμε ένα πρόσημο, μέσω της συνάρτησης **s** ως εξής:*

$$\mathbf{s}(x+iy) = \begin{cases} i, & \text{αν } y > 0 \\ j, & \text{αν } y < 0 \\ +, & \text{αν } y = 0 \text{ και } x > 0 \\ -, & \text{αν } y = 0 \text{ και } x < 0 \\ 0, & \text{αν } y = x = 0. \end{cases}$$

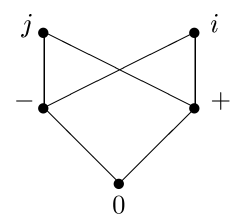
Έστω $\mathcal{A} = \{H_1, ..., H_k\}$ ένα παράταγμα γραμμικών υπερεπιπέδων στον $\mathbb{C}^n$ και $l_m$ γραμμική μορφή στον $\mathbb{C}^n$ τέτοια ώστε $H_m = \ker(l_m)$ για $m = 1, ..., k$. Παρατηρούμε ότι το $z \in \mathbb{C}^n$ ανήκει στο $H_m$ αν και μόνον αν $l_m(z) = 0$, δηλαδή αν και μόνο αν $\mathbf{s}(l_m(z)) = 0$. Ορίζουμε τη συνάρτηση μιγαδικού προσήμου $\mathbf{s}_{\mathcal{A}}(z) = (\mathbf{s}(l_1(z)), \mathbf{s}(l_2(z)), ..., \mathbf{s}(l_k(z))) \in$

[1] Αν έχουμε συνεχή απεικόνιση $f : S^{n-1} \to S^{n-1}$, τότε η $f$ επάγει ομομορφισμό $H_{n-1}(f) : H_{n-1}(S^{n-1}) \to H_{n-1}(S^{n-1})$ μεταξύ άπειρων κυκλικών ομάδων. Συνεπώς είναι της μορφής $H_{n-1}(f)(a) = ka$ για κάποιο $k \in \mathbb{Z}$, το οποίο εξαρτάται μόνο από την $f$. Αυτός ο ακέραιος καλείται ο βαθμός της $f$ και συμβολίζεται με $\deg f$.

$\{i,j,+,-,0\}^k$ για $z \in \mathbb{C}^n$ και συμβολίζουμε το πεδίο τιμών της $\mathbf{s}_{\mathcal{A}}$ με $\mathcal{K}_{\mathcal{A}} = \{\mathbf{s}_{\mathcal{A}}(z) : z \in \mathbb{C}^n\}$. Θα λέμε ότι δύο σημεία ανήκουν στην ίδια πλευρά του παρατάγματος αν έχουν το ίδιο μιγαδικό πρόσημο. Δηλαδή, πλευρές του παρατάγματος είναι οι αντίστροφες εικόνες των στοιχείων του συνόλου $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$ μέσω της $\mathbf{s}_{\mathcal{A}}$. Αν το μιγαδικό πρόσημο μιας πλευράς έχει $d_1$ συντεταγμένες ίσες με $i$ ή $j$ και $d_2$ συντεταγμένες ίσες με $+$ ή $-$, τότε θα λέμε ότι η διάσταση $d$ της πλευράς είναι $d = 2d_1 + d_2$. Αυτές οι πλευρές αποτελούν τα μέρη μιας διαμέρισης του $\mathbb{C}^n$.

**Ορισμός 4.4** *Η διαμέριση του $\mathbb{C}^n$ στις πλευρές του παρατάγματος $\mathcal{A}$, που ορίζονται μέσω της συνάρτησης μιγαδικού προσήμου, $\mathbf{s}_{\mathcal{A}} : \mathbb{C}^n \to \mathcal{K}_{\mathcal{A}}$, καλείται $\mathbf{s}$-διαστρωμάτωση ($\mathbf{s}$-stratification) του $\mathbb{C}^n$ μέσω του $\mathcal{A}$.*

Οι τομές των πλευρών με τη μοναδιαία σφαίρα $S^{2n-1}$ του $\mathbb{C}^n$ δημιουργούν μια CW-δομή για τη σφαίρα, αφού η τομή μιας $d$-πλευράς με την $S^{2n-1}$ είναι ομοιομορφική με ένα κλειστό $d$-κύτταρο. Στο σύνολο $\mathcal{K}_{\mathcal{A}} = \mathbf{s}_{\mathcal{A}}(\mathbb{C}^n)$ ή αντίστοιχα στη CW-δομή της $S^{2n-1}$ που ορίζεται μέσω της $\mathbf{s}_{\mathcal{A}}$, μπορούμε να ορίσουμε μια μερική διάταξη κατά συντεταγμένη, με τα $i, j$ να καλύπτουν τα $+, -$ και τα $+, -$ να καλύπτουν το $0$, δηλαδή κατά συντεταγμένη να έχουμε το διάγραμμα Hasse:




Χωρίζουμε το μερικώς διατεταγμένο σύνολο $\mathcal{K}_{\mathcal{A}}$ σε δύο υποσύνολα. Το πρώτο είναι το $\mathcal{K}_{link}$ και αποτελείται από όλα τα στοιχεία που έχουν $0$ σε τουλάχιστον μία συντεταγμένη. Το δεύτερο είναι το $\mathcal{K}_{comp} = \mathcal{K}_{\mathcal{A}} \setminus \mathcal{K}_{link}$. Διαφορετικά, το $\mathcal{K}_{link} = \mathbf{s}_{\mathcal{A}}(\cup_{i=1}^k H_i)$ περιέχει τα πρόσημα των πλευρών που περιέχονται στην ένωση των υπερεπιπέδων $H_1, ..., H_k$ και το $\mathcal{K}_{comp} = \mathbf{s}_{\mathcal{A}}(\mathbb{C}^n \setminus \cup_{i=1}^k H_i) = \mathbf{s}_{\mathcal{A}}(C_{\mathcal{A}})$ περιέχει τα πρόσημα των πλευρών που ανήκουν στο συμπλήρωμα του $\mathcal{A}$.

## 4.5 Η ομολογία του ζεύγματος

Για να υπολογίσουμε τη συνομολογία του συμπληρώματος του παρατάγματος, πρώτα θα υπολογίσουμε την ομολογία του ζεύγματός του.
Έστω $\mathcal{A} = \{H_1, ..., H_k\}$ ένα παράταγμα γραμμικών υπερεπιπέδων στον $\mathbb{C}^n$. Θυμίζουμε ότι με $D = D_{\mathcal{A}} \subseteq S^{2n-1}$ συμβολίζουμε το ζεύγμα του παρατάγματος υπερεπιπέδων, δηλαδή την τομή των υπερεπιπέδων με τη μοναδιαία σφαίρα. Επίσης, συμβολίζουμε με $D' = D_{\mathcal{A}'}$ και με $D'' = D_{\mathcal{A}''}$ τα ζεύγματα των παραταγμάτων $\mathcal{A}'$ και $\mathcal{A}''$ αντίστοιχα [2]. Στόχος είναι να υπολογίσουμε την κυτταρική ομολογία του $D$. Θα χρησιμοποιούμε *ανηγμένες ομάδες ομολογίας (reduced homology groups)* (βλ. σελ. 110 στο [14]), για τις οποίες ισχύει εξ ορισμού

$$\tilde{H}_{-1}(T) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{αν } T = \varnothing \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

[2] Τα παρατάγματα $\mathcal{A}'$ και $\mathcal{A}''$ ως προς $H_k$ ορίστηκαν στην Παράγραφο 2.3.

Θα ορίσουμε κάποιους κυτταρικούς κύκλους που τελικά θα δείξουμε ότι είναι γεννήτορες των ομάδων ομολογίας του $D$. Έστω $A \subseteq M_{\mathcal{A}}$ ένα ανεξάρτητο, μη κενό σύνολο με πληθικό αριθμό $m \geq 1$. O $L_A = \{z \in \mathbb{C}^n : \mathbf{s}(l_a(z)) \in \{+,-,0\}$ για όλα τα $a \in A\}$ είναι ένας πραγματικός υπόχωρος διάστασης $2n-m$. Το υποσύνολό του, $C_A = \{z \in \mathbb{C}^n : \mathbf{s}(l_a(z)) \in \{0,+\}$ για όλα τα $a \in A\}$ είναι η τομή $m$ κλειστών ημιχώρων. Άρα το $C_A$ είναι ένας κλειστός κώνος διάστασης $2n-m$ στο $L_A$. Είναι γνήσιο υποσύνολο του $L_A$ αφού $A \neq \varnothing$. Συμβολίζουμε με $c_A = C_A \cap S^{2n-1}$ την τομή του κώνου με τη μοναδιαία σφαίρα του $\mathbb{C}^n$. Το $c_A$ είναι ομοιομορφικό με την $(2n-m-1)$-μπάλα και μπορεί να περιέχεται σε περισσότερες από μία πλευρές της $\mathbf{s}$-διαστρωμάτωσης. Προσδιορίζει μια κυτταρική $(2n-m-1)$-αλυσίδα, την οποία επίσης συμβολίζουμε με $c_A$. Αυτή η αλυσίδα περιέχει όλα τα $(2n-m-1)$-κύτταρα που έχουν $+$ στις θέσεις με δείκτη από το $A$, με συντελεστή $\pm 1$. Το σύνορο της $(2n-m-1)$-μπάλας $c_A$ είναι η $(2n-m-2)$-σφαίρα $d_A = \partial C_A \cap S^{2n-1}$. Αφού το σύνορο του κώνου $C_A$ είναι το $\partial C_A = \{z \in C_A : l_a(z) = 0$ για κάποιο $a \in A\}$, η $d_A$ είναι υποσύμπλεγμα του $D$. Θα συμβολίζουμε με $d_A$ και την αντίστοιχη κυτταρική αλυσίδα. Περιέχει όλα τα $(2n-m-2)$-κύτταρα, που στις θέσεις με δείκτη από το $A$ έχουν παντού $+$, εκτός από ακριβώς μία θέση όπου έχουν $0$, με συντελεστή $\pm 1$.

**Θεώρημα 4.4** *Αν $\mathcal{A}$ και $D$ είναι όπως προηγουμένως και $M$ είναι το μητροειδές του $\mathcal{A}$, τότε η ομάδα ομολογίας $\tilde{H}_i(D)$ του $D$ για $i \geq 0$ είναι ελεύθερη με $\mathbb{Z}$-βάση $\{< d_A >: A \in BC(M),\ |A| = 2n-2-i\}$.*

Απόδειξη: Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο $k = |\mathcal{A}|$. Για $k = 0$ έχουμε $\mathcal{A} = \varnothing$, $D = \varnothing$, $BC(M) = \varnothing$, $\tilde{H}_i(D) = 0$ για $i \geq 0$.
Η $S^{2n-1}$ με την $\mathbf{s}$-διαστρωμάτωση είναι CW-σύμπλεγμα. Τα $D$, $D'$, $D''$ και $S = H_k \cap S^{2n-1} \cong S^{2n-3}$ είναι υποσυμπλέγματα της $S^{2n-1}$ με $D' \cup S = D$ και $D' \cap S = D''$. Κατά συνέπεια, η μακρά ακριβής ακολουθία Mayer - Vietoris (βλ. Θεώρημα 4.3) στην ανηγμένη ομολογία για αυτή την περίπτωση είναι:

$$\cdots \to \tilde{H}_i(D'') \overset{(j_*^1, j_*^2)}{\to} \tilde{H}_i(D') \oplus \tilde{H}_i(S) \overset{j_*^3 - j_*^4}{\to} \tilde{H}_i(D) \overset{\partial_*}{\to} \tilde{H}_{i-1}(D'') \to \cdots .$$

Οι $j_*^1$, $j_*^2$, $j_*^3$, $j_*^4$ επάγονται από εγκλεισμούς και ο $\partial_*$ ορίζεται ως $\partial_* = (j_*^1, j_*^2)^{-1}\partial(j_*^3 - j_*^4)^{-1}$, με τον $\partial$ να είναι ο συνοριακός τελεστής στο κυτταρικό σύμπλεγμα. Από την υπόθεση της επαγωγής έχουμε ότι για $i > 0$ η $\tilde{H}_{i-1}(D'')$ παράγεται από το σύνολο $B''_{i-1} = \{< d''_A >: A \in BC(M''),\ |A| = 2n-i-3\}$. Από τη σχέση (4.1), για κάθε $< d''_A > \in B''_{i-1}$, έχουμε ότι $A \cup \{k\} \in BC(M)$. Χωρίζουμε την αλυσίδα $d_{A\cup\{k\}}$ σε δύο αλυσίδες. Η πρώτη περιέχει όλα τα στοιχεία $z$ της $d_{A\cup\{k\}}$ τέτοια ώστε $\mathbf{s}(l_k(z)) = 0$. Τα στοιχεία της αλυσίδας αυτής περιέχονται στο υπερεπίπεδο $H_k$ και είναι ακριβώς τα στοιχεία της $c''_A$. Η δεύτερη αλυσίδα περιέχει όλα τα στοιχεία $z$ της $d_{A\cup\{k\}}$ για τα οποία ισχύει $\mathbf{s}(l_k(z)) = +$. Η αλυσίδα αυτή περιέχεται στο σύμπλεγμα $D'$ και τη συμβολίζουμε με $e'_{A,k}$. Συνολικά, έχουμε τη σχέση $d_{A\cup\{k\}} = (d_{A\cup\{k\}} \cap S) + (d_{A\cup\{k\}} \cap D') := c''_A + e'_{A,k}$. Ισχύει ότι $\partial c_{A\cup\{k\}} = d_{A\cup\{k\}}$. Άρα θα έχουμε ότι $\partial d_{A\cup\{k\}} = \partial \circ \partial c_{A\cup\{k\}} = 0 \Rightarrow \partial e'_{A,k} = -\partial c''_A = \pm d''_A$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
\partial_* < d_{A\cup\{k\}} > &= \ < (j_*^1, j_*^2)^{-1}\partial(j_*^3 - j_*^4)^{-1} d_{A\cup\{k\}} > \\
&= \ < (j_*^1, j_*^2)^{-1}\partial(e'_{A,k}, -c''_A) > \\
&= \ < (j_*^1, j_*^2)^{-1}(\pm d''_A, \pm d''_A) > \\
&= \ < \pm d''_A > .
\end{aligned}$$

Από αυτό συμπεραίνουμε ότι ο $\partial_*$ είναι επί του $\tilde{H}_{i-1}(D'')$ και η $(j^1_*, j^2_*) : \tilde{H}_{i-1}(D'') \to \tilde{H}_{i-1}(D') \oplus \tilde{H}_{i-1}(S)$ είναι η μηδενική απεικόνιση για $i > 0$. Έτσι παίρνουμε τη βραχεία ακριβή ακολουθία

$$0 \to \tilde{H}_i(D') \oplus \tilde{H}_i(S) \to \tilde{H}_i(D) \to \tilde{H}_{i-1}(D'') \to 0$$

για $i > 0$. Οι $\tilde{H}_i(D')$ και $\tilde{H}_{i-1}(D'')$ είναι ελεύθερες από την επαγωγική υπόθεση και η $\tilde{H}_i(S)$ είναι ελεύθερη αφού $S \cong S^{2n-3}$. Θεωρούμε την απεικόνιση $\phi : \tilde{H}_{i-1}(D'') \to \tilde{H}_i(D)$, η οποία ορίζεται στους γεννήτορες της $\tilde{H}_{i-1}(D'')$ ως $\phi(< d''_A >) =< d_{A\cup\{k\}} >$. Η βραχεία ακριβής ακολουθία διασπάται αφού $\partial_* \circ \phi = id_{\tilde{H}_{i-1}(D'')}$. Άρα παίρνουμε το ευθύ άθροισμα

$$\tilde{H}_i(D) \cong \tilde{H}_i(D') \oplus \tilde{H}_{i-1}(D'') \oplus \tilde{H}_i(S).$$

Από αυτό το άθροισμα βλέπουμε ότι η $\tilde{H}_i(D)$ είναι ελεύθερη. Μπορούμε να πάρουμε μια βάση για την ομάδα αυτή από τις βάσεις των προσθετέων. Αν $< s >$ είναι ένας γεννήτορας της $\tilde{H}_{2n-3}(S)$, τότε προφανώς $j^4_*(< s >) = \pm < d_{\{k\}} >$. Επιπλέον, αν το $A$ είναι ανεξάρτητο και το $k$ δεν ανήκει στο $A$, παίρνουμε $j^3_*(< d'_A >) = \pm < d_A >$ από κατασκευή. Έτσι παίρνουμε σαν βάση για την $\tilde{H}_i(D)$ το σύνολο όλων των τάξεων ομολογίας $< d_A >$ με $|A| = 2n - 2 - i$, τέτοια ώστε το $A$ να ανήκει στο $BC(M') \cup \{A \cup \{k\} : A \in BC(M''),\ A \neq \varnothing\} \cup \{\{k\}\}$. Από τη σχέση (4.1) έχουμε το αποτέλεσμα που θέλουμε. □

**Πόρισμα 4.2**

$$\sum_{i\geq 1} \operatorname{rank}(\tilde{H}_i(D))t^i = (-t)^{2n-r-2}\chi(-t) - t^{2n-2}.$$

Απόδειξη: Θυμίζουμε ότι με $f_j$ συμβολίζουμε το πλήθος των $j$-πλευρών του $BC$-συμπλέγματος του παρατάγματος. Από το προηγούμενο θεώρημα συμπεραίνουμε άμεσα ότι $\operatorname{rank}(\tilde{H}_i(D)) = f_{2n-3-i}$. Χρησιμοποιώντας αυτό το αποτέλεσμα και τον τύπο (4.2) παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{i\geq 1} \operatorname{rank}(\tilde{H}_i(D))t^i &= \sum_{i\geq 1} f_{2n-3-i}t^i \\
&= t^{2n-2}\sum_{i\geq 1} f_{2n-3-i}(t^{-1})^{2n-2-i} \\
&= t^{2n-2}\sum_{i=1}^{r} f_{2n-3-i}(t^{-1})^{2n-2-i} \\
&= t^{2n-2}[(-1/t)^r\chi(-t) - 1] \\
&= (-t)^{2n-r-2}\chi(-t) - t^{2n-2}.
\end{aligned}$$

□

## 4.6 Η συνομολογία του συμπληρώματος

Η συνομολογία του συμπληρώματος υπολογίζεται άμεσα από την προηγούμενη παράγραφο χρησιμοποιώντας τη δυϊκότητα Alexander.

Έστω $\mathcal{A}$ ένα παράταγμα γραμμικών υπερεπιπέδων στον $\mathbb{C}^n$. Στην προηγούμενη παράγραφο ασχοληθήκαμε με την ομολογία του $D_{\mathcal{A}}$. Θυμίζουμε ότι το συμπλήρωμα του $\mathcal{A}$ είναι το $C_{\mathcal{A}} = \mathbb{C}^n \setminus (H_1 \cup \cdots \cup H_k)$. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 4.2 και το Πόρισμα 4.2, παίρνουμε άμεσα τη συνομολογία του $C_{\mathcal{A}}$.

**Θεώρημα 4.5** *Έστω $C_{\mathcal{A}}$ το συμπλήρωμα ενός μιγαδικού παρατάγματος γραμμικών υπερεπιπέδων $\mathcal{A}$ τάξης $r$ στον χώρο $\mathbb{C}^n$. Η συνομολογία του $C_{\mathcal{A}}$ είναι ελεύθερη και ισχύει:*

$$\sum_{i \geq 0} \operatorname{rank}(\tilde{H}^i(C))t^i = (-t)^r \chi\left(-\frac{1}{t}\right) - 1.$$

*Ειδικότερα, $\tilde{H}^i(C_{\mathcal{A}}) = 0$ για $i > r$.*

**Εφαρμογή:** Μια ειδική περίπτωση του προηγούμενου θεωρήματος, για την οποία μπορούμε να έχουμε και μια διαισθητική εικόνα, αφορά το παράταγμα $\{H = \{x = 0\}\}$ στον $\mathbb{C}$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του παρατάγματος είναι το $\chi(t) = t - 1$. Άρα έχουμε ότι $(-t)^r \chi\left(-\frac{1}{t}\right) - 1 = (-t)^1(-\frac{1}{t} - 1) - 1 = t$. Συνεπώς $\tilde{H}_i(C) = 0$ για $i \neq 1$ και $\operatorname{rank}(\tilde{H}^1(C)) = 1$. Αυτό είναι το αναμενόμενο αποτέλεσμα, αφού ισχύει ότι $C = \mathbb{C} \setminus \{0\} \cong S^1$.

# Κεφάλαιο 5

# Παρατάγματα Coxeter

Μια ειδική κατηγορία παραταγμάτων υπερεπιπέδων είναι τα παρατάγματα Coxeter. Όπως και στα προηγούμενα κεφάλαια, θα δούμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο μας δίνει ενδιαφέρουσες πληροφορίες. Πρώτα όμως θα ορίσουμε τα παρατάγματα Coxeter.

## 5.1 Περί ομάδων ανακλάσεων

Έστω $V$ ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης $n$. Σε αυτό το χώρο ορίζονται ανακλάσεις, δηλαδή γραμμικές απεικονίσεις που έχουν $n-1$ ιδιοτιμές ίσες με 1 και μία ιδιοτιμή ίση με $-1$, και ορθογώνιοι μετασχηματισμοί, δηλαδή γραμμικές απεικονίσεις που διατηρούν το εσωτερικό γινόμενο (άρα διατηρούν γωνίες και μήκη). Θεωρούμε ότι κάθε υπερεπίπεδο ανάκλασης, δηλαδή κάθε υπερεπίπεδο που μένει σταθερό όταν δρα στο χώρο μια ανάκλαση, διέρχεται από την αρχή των αξόνων και ότι κάθε ανακλάση είναι ορθογώνια.

**Ορισμός 5.1** *Μια πεπερασμένη ομάδα ανακλάσεων (finite reflection group) είναι ένα πεπερασμένο σύνολο ορθογώνιων μετασχηματισμών στο γραμμικό χώρο $V$ το οποίο αποκτά δομή ομάδας με πράξη τη σύνθεση μετασχηματισμών και παράγεται σαν ομάδα από πεπερασμένου πλήθους ανακλάσεις στον $V$.*

**Ορισμός 5.2** *Το σύνολο $\mathcal{A}$ όλων των υπερεπιπέδων ανάκλασης μιας ομάδας ανακλάσεων $W$ καλείται παράταγμα Coxeter της $W$.*

Με άλλα λόγια, ένα παράταγμα Coxeter είναι μια πεπερασμένη συλλογή υπερεπιπέδων $\mathcal{A}$, η οποία είναι κλειστή ως προς τις ανακλάσεις στα υπερεπίπεδα αυτά. Οι περιοχές του παρατάγματος είναι όσες και τα στοιχεία της ομάδας ανακλάσεων. Πράγματι, αν επιλέξουμε μια από τις περιοχές του παρατάγματος και την ονομάσουμε $R$, τότε η απεικόνιση $w \mapsto w(R)$ είναι μια 1-1 και επί αντιστοιχία μεταξύ των μετασχηματισμών $w$ της ομάδας ανακλάσεως και των περιοχών του $\mathcal{A}$. Ονομάζουμε *υπερεπίπεδα όψης (facet hyperplanes)* της $R$ τα υπερεπίπεδα του $\mathcal{A}$ που η τομή τους με την κλειστή θήκη της $R$ έχει διάσταση $n-1$. Είναι γνωστό ότι οι ανακλάσεις στα υπερεπίπεδα όψης της $R$ παράγουν την ομάδα ανακλάσεων. Μάλιστα το συγκεκριμένο παράγον σύνολο είναι ελάχιστο ως προς τη σχέση του εγκλεισμού.

Αν $\alpha \in V$, τότε η ανάκλαση που αντιστοιχεί στο $\alpha$ δίνεται από τον τύπο $\sigma_\alpha(x) = x - 2\frac{x \cdot a}{a \cdot a}a$, $\forall x \in V$.

**Ορισμός 5.3** *Ένα πεπερασμένο σύστημα ριζών (root system) είναι ένα πεπερασμένο, μη κενό σύνολο $\Phi$ μη μηδενικών διανυσμάτων του $V$, τα οποία καλούμε ρίζες, που ικανοποιεί τα εξής:*

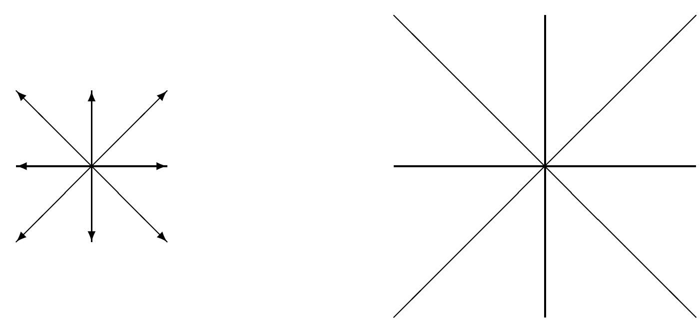
1. *Κάθε μονοδιάστατος υπόχωρος του $V$ είτε δεν περιέχει ρίζες, είτε περιέχει δύο ρίζες αντίθετες μεταξύ τους.*

2. *Για κάθε $\alpha \in \Phi$ η ανάκλαση $\sigma_\alpha$ μεταθέτει το $\Phi$.*

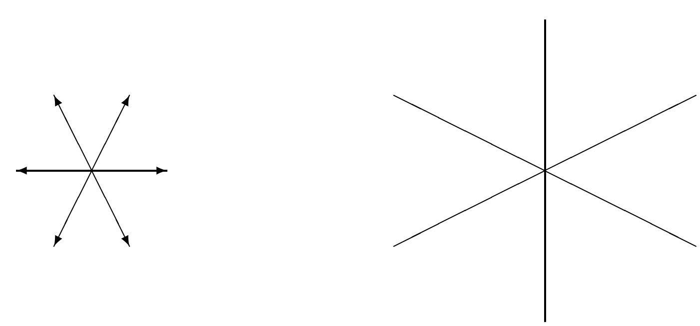
Για ένα πεπερασμένο σύστημα ριζών $\Phi$ η ομάδα που παράγεται από τις ανακλάσεις $\{\sigma_\alpha,\ \alpha \in \Phi\}$ είναι πεπερασμένη. Υπάρχει μια αντιστοιχία μεταξύ παραταγμάτων Coxeter και συστημάτων ριζών. Συγκεκριμένα, αν $\Phi = \{\pm\alpha_i : i \in I\}$, τότε τα υπερεπίπεδα που ορίζονται από τις εξισώσεις $\alpha_i \cdot x = 0$ σχηματίζουν ένα παράταγμα Coxeter. Αντίστροφα, αν έχουμε ένα παράταγμα Coxeter που αποτελείται από τα υπερεπίπεδα $H_i = \{x \in V : \alpha_i \cdot x = 0\}$, $i \in I$, τότε το σύνολο $\{\pm\alpha_i/||\alpha_i|| : i \in I\}$ είναι ένα σύστημα ριζών.

**Παραδείγματα**

1. Το σύστημα ριζών $B_2$ με το παράταγμα Coxeter που αντιστοιχεί σε αυτό είναι:



2. Το σύστημα ριζών $A_2$ με το αντίστοιχο παράταγμα Coxeter είναι:



**Ορισμός 5.4** *Έστω $\Phi$ σύστημα ριζών, $\mathcal{A}$ το αντίστοιχο παράταγμα Coxeter και $R$ μια περιοχή του $\mathcal{A}$. Οι απλές ρίζες (simple roots) του $\Phi$ είναι τα στοιχεία του που είναι κάθετα στα υπερεπίπεδα όψης της $R$ και δείχνουν προς την $R$. Ο βαθμός (rank)*

*του $\Phi$ είναι το πλήθος των απλών ριζών του, το οποίο ταυτίζεται με τη διάσταση της γραμμικής του θήκης.*

Συμβολίζουμε το σύνολο των απλών ριζών του $\Phi$ με $\Pi$.

**Ορισμός 5.5** *Έστω $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$ οι ανακλάσεις που αντιστοιχούν στις απλές ρίζες του $\Phi$. Καλούμε το στοιχείο $c = \sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_n$ στοιχείο Coxeter της ομάδας ανακλάσεων $W$ που παράγεται από το $\Phi$.*

Το στοιχείο Coxeter $c$ εξαρτάται από την επιλογή του συνόλου $\Pi$ των απλών ριζών και από την επιλογή της γραμμικής διάταξης $\sigma_1, ..., \sigma_n$ του συνόλου των αντίστοιχων απλών ανακλάσεων. Όμως τα διαφορετικά στοιχεία Coxeter είναι συζυγή μεταξύ τους και έτσι έχουν την ίδια τάξη $h$, που ονομάζουμε *αριθμό Coxeter* της $W$. Η συζυγία εξασφαλίζει επίσης ότι θα έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο και τις ίδιες ιδιοτιμές.

**Ορισμός 5.6** *Ονομάζουμε εκθέτες (exponents) της ομάδας ανακλάσεων $W$ τους ακεραίους $m$ για τους οποίους ο $e^{2mi\pi/h}$ είναι ιδιοτιμή του στοιχείου Coxeter της $W$ και τους συμβολίζουμε με $e_1, e_2, ..., e_n$.*

Περισσότερες πληροφορίες για παρατάγματα Coxeter και συστήματα ριζών υπάρχουν στα [15] και [13].

## 5.2 Απόλυτο μήκος

Για να υπολογίσουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός παρατάγματος Coxeter, θα χρειαστούμε κάποια αποτελέσματα που σχετίζονται με τους μετασχηματισμούς των πεπερασμένων ομάδων ανακλάσεων και τους υποχώρους που σταθεροποιούνται από αυτούς. Στην ενότητα αυτή θα δείξουμε ότι ο υπόχωρος που σταθεροποιείται από ένα μετασχηματισμό μιας πεπερασμένης ομάδας ανακλάσεων είναι τομή κάποιων υπερεπιπέδων ανάκλασης. Τα αποτελέσματα που θα παρουσιάσουμε υπάρχουν στο άρθρο [11].

Έστω $W$ μια πεπερασμένη ομάδα ανακλάσεων στο γραμμικό χώρο $V$, $\mathcal{A}$ το παράταγμα Coxeter της $W$ και $\Phi$ το αντίστοιχο σύστημα ριζών. Συμβολίζουμε με $\sigma_i$, όπου $i \in I$, τις ανακλάσεις της $W$, με $H_i$ τα αντίστοιχα υπερεπίπεδα ανάκλασης και με $\alpha_i$ τις αντίστοιχες ρίζες.

**Ορισμός 5.7** *Λέμε ότι ο $w \in W$ σταθεροποιεί το $v \in V$ όταν $w(v) = v$. Συμβολίζουμε με $Fix(w)$ τον υπόχωρο του $V$ που περιέχει όλα τα διανύσματα που σταθεροποιεί ο $w$, δηλαδή*

$$Fix(w) = \{v \in V : w(v) = v\}.$$

Το ακόλουθο λήμμα είναι μια γνωστή ιδιότητα των πεπερασμένων ομάδων ανακλάσεων (βλ. 1.20 στο [27]).

**Λήμμα 5.1** *Έστω $S$ πεπερασμένο υποσύνολο του $V$. Αν ο $w \in W$ σταθεροποιεί το $S$, δηλαδή αν $w(s) = s$ για κάθε $s \in S$, τότε ο $w$ είναι γινόμενο ανακλάσεων κάθε μία από τις οποίες σταθεροποιεί το $S$.*

Γνωρίζουμε ότι η $W$ παράγεται από τις ανακλάσεις που περιέχει, αν και το συγκεκριμένο παράγον σύνολο δεν είναι ελάχιστο. Εντούτοις μας ενδιαφέρει το ελάχιστο πλήθος των ανακλάσεων των οποίων το γινόμενο είναι ίσο με $w \in W$.

**Ορισμός 5.8** *Έστω $w \in W$. Ορίζουμε ως απόλυτο μήκος $l_T(w)$ του $w$ τον μικρότερο φυσικό αριθμό $k$ τέτοιο ώστε το $w$ να γράφεται ως γινόμενο $k$ ανακλάσεων της $W$. Η έκφραση $w = \sigma_1 \cdots \sigma_k$ θα λέγεται ανηγμένη όταν $l_T(w) = k$.*

Το απόλυτο μήκος του $w \in W$ θα μας βοηθήσει στη μελέτη του υποχώρου που σταθεροποιείται από το $w$. Για να φτάσουμε στην πρόταση που μας ενδιαφέρει, χρειαζόμαστε τα λήμματα που ακολουθούν.

**Λήμμα 5.2** *Το πλήθος των ιδιοτιμών του $w \in W$ που δεν είναι ίσες με 1 είναι ίσο με $l_T(w)$.*

Απόδειξη: Έστω $l_T(w) = k$. Γράφουμε το $w$ στη μορφή $w = \sigma_1 \cdots \sigma_k$. Ο $w$ σταθεροποιεί τον υπόχωρο $H_1 \cap \cdots \cap H_k$, ο οποίος έχει διάσταση τουλάχιστον $n - k$. Συνεπώς, ο $w$ έχει τουλάχιστον $n - k$ ιδιοτιμές ίσες με 1 και το πολύ $k$ ιδιοτιμές που δεν είναι ίσες με 1.
Για να δείξουμε την αντίστροφη ανισότητα, θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στη διάσταση του χώρου. Ας υποθέσουμε ότι ο $w$ έχει $k$ ιδιοτιμές που δεν είναι ίσες με 1. Πρέπει να δείξουμε ότι $l_T(w) \leq k$. Αν $\dim V = 1$, τότε έχουμε άμεσα $l_T(w) = k$.
Έστω ότι $\dim V \geq 2$, $V_1 = Fix(w)$ και $V_1^{\perp}$ το ορθογώνιο συμπλήρωμα του $V_1$. Έχουμε ότι $\dim V_1 = n - k$ και $\dim V_1^{\perp} = k$. Αφού ο $w$ σταθεροποιεί κάθε διάνυσμα του $V_1$, από το Λήμμα 5.1 θα έχουμε ότι $w = \sigma_1 \cdots \sigma_k$, όπου κάθε $\sigma_i$ σταθεροποιεί τον $V_1$ για $i = 1, ..., k$. Άρα οι αντίστοιχες ρίζες $\alpha_i$ ανήκουν στον $V_1^{\perp}$ για $i = 1, ..., k$.
Αν $k < n$, τότε $\dim V_1^{\perp} < \dim V$. Οι ρίζες $\alpha_i \in V_1^{\perp}$ για $i = 1, ..., k$ αποτελούν ένα σύστημα ριζών στον υπόχωρο που παράγουν, ο οποίος έχει διάσταση μικρότερη από $n$. Ο $w$ είναι ένας μετασχηματισμός της πεπερασμένης ομάδας ανακλάσεων που παράγουν τα $\alpha_i$ για $i = 1, ..., k$. Από την υπόθεση της επαγωγής, ο $w$ γράφεται ως γινόμενο το πολύ $k$ ανακλάσεων και $l_T(w) \leq k$.
Αν έχουμε $k = n$, τότε ο $w$ δεν σταθεροποιεί κανένα διάνυσμα του $V$ και αρκεί να δείξουμε ότι ο $w$ γράφεται ως γινόμενο το πολύ $n$ ανακλάσεων. Έστω $\alpha \in \Phi$. Αφού $Fix(w) = \{0\}$, θα υπάρχει $v \in V$ τέτοιο ώστε $(w - 1)v = \alpha$, δηλαδή $w(v) = v + \alpha$. Επειδή $w(v) \cdot w(v) = v \cdot v$, δηλαδή $(v + \alpha) \cdot (v + \alpha) = v \cdot v$, έχουμε $\frac{2v \cdot \alpha}{\alpha \cdot \alpha} = -1$. Έπεται ότι $\sigma(v) = v + \alpha$, όπου $\sigma$ είναι η ανάκλαση που αντιστοιχεί στο $\alpha$, και $w(v) = \sigma(v) \;\; \Rightarrow \sigma w(v) = v$. Από το Λήμμα 5.1 και χρησιμοποιώντας παρόμοια επιχειρηματολογία όπως πιο πάνω, έχουμε ότι ο $\sigma w$ περιέχεται σε μια πεπερασμένη ομάδα ανακλάσεων μικρότερης διάστασης. Λόγω της επαγωγικής υπόθεσης, ο $\sigma w$ είναι γινόμενο το πολύ $n - 1$ ανακλάσεων. Συνεπώς ο $w$ είναι γινόμενο το πολύ $n$ ανακλάσεων. □

**Λήμμα 5.3** *Έστω $\alpha_1, ..., \alpha_k \in \Phi$ και $\sigma_1, ..., \sigma_k$ οι αντίστοιχες ανακλάσεις. Η έκφραση $w = \sigma_1 \cdots \sigma_k$ είναι ανηγμένη αν και μόνο αν οι ρίζες $\alpha_1, ..., \alpha_k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες.*

Απόδειξη: Έστω ότι ο $w = \sigma_1 \cdots \sigma_k$ είναι σε ανηγμένη μορφή. Από το Λήμμα 5.2, ο $w$ έχει $k$ ιδιοτιμές που δεν είναι ίσες με 1. Η διάσταση του $H_1 \cap \cdots \cap H_k$ δεν μπορεί να ξεπερνά τον $n - k$, αφού ο $w$ δρα ταυτοτικά σε αυτό το χώρο. Άρα $\dim(H_1 \cap \cdots \cap H_k) = n - k$ και τα $\alpha_1, ..., \alpha_k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
Για την αντίστροφη κατεύθυνση, υποθέτουμε ότι τα $\alpha_1, ..., \alpha_k$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Θεωρούμε τον υπόχωρο $(w - 1)V$ και το διάνυσμα $x \in V$, τέτοιο ώστε $x \in H_2 \cap \cdots \cap H_k$, αλλά $x \notin H_1$. Για αυτό το $x$ θα έχουμε $w(x) - x = \lambda \alpha_1, \; \lambda \neq 0$. Συνεπώς $\alpha_1 \in (w - 1)V$. Στη συνέχεια, επιλέγουμε ένα άλλο $y \in V$, τέτοιο ώστε

$y \in H_3 \cap \cdots \cap H_k$ και $y \notin H_2$. Βλέπουμε ότι $w(y) - y = \lambda\alpha_2 + \mu\alpha_1,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0$ και $\alpha_2 \in (w-1)V$. Ομοίως μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $\alpha_1, ..., \alpha_k \in (w-1)V$. Άρα $\dim(w-1)V \geq k$. Από την άλλη, η διάσταση του $(w-1)V$ είναι το πλήθος των ιδιοτιμών του $w$ που δεν είναι ίσες με 1 και ταυτίζεται με το ανηγμένο μήκος του $w$. Άρα $\dim(w-1)V \leq k$ και $l_T(w) = k$. □

Η ακόλουθη πρόταση μας δίνει την ακριβή μορφή του $Fix(w)$ όταν γνωρίζουμε την ανηγμένη μορφή του $w$ και μας παρέχει όλες τις απαραίτητες πληροφορίες για να υπολογίσουμε στη συνέχεια το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός παρατάγματος Coxeter.

**Πρόταση 5.1** *Αν η έκφραση $w = \sigma_1 \cdots \sigma_k$ είναι ανηγμένη, τότε $Fix(w) = H_1 \cap \cdots \cap H_k$.*

Απόδειξη: Αν η έκφραση $w = \sigma_1 \cdots \sigma_k$ είναι ανηγμένη, τότε θα έχουμε $l_T(w) = k$ και $\dim Fix(w) = n-k$. Από το Λήμμα 5.3 γνωρίζουμε ότι οι ρίζες $\alpha_i$ για $i = 1, ..., k$ είναι ανεξάρτητες και η διάσταση του $H_1 \cap \cdots \cap H_k$ είναι $n-k$. Αφού $H_1 \cap \cdots \cap H_k \subseteq Fix(w)$ και $\dim(H_1 \cap \cdots \cap H_k) = n-k$, έχουμε $H_1 \cap \cdots \cap H_k = Fix(w)$. □

## 5.3 Εκθέτες

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός παρατάγματος Coxeter συνδέεται άμεσα με τους εκθέτες της αντίστοιχης ομάδας ανακλάσεων. Το σχετικό αποτέλεσμα αποδείχθηκε από τον Arnol'd και τον Saito. Εδώ θα παρουσιάσουμε μια διαφορετική απόδειξη. Η ιδέα για την απόδειξη αυτή οφείλεται στον Χ.Α. Αθανασιάδη.

**Θεώρημα 5.1** (Arnol'd [1],[2], Saito [21],[22]) *Αν $e_1, e_2, ..., e_n$ είναι οι εκθέτες της ομάδας ανακλάσεων $W$, $\Phi$ είναι το σύστημα ριζών που αντιστοιχεί στην $W$ και $\mathcal{A}_\Phi$ το αντίστοιχο παράταγμα Coxeter, τότε ισχύει*

$$\chi_{\mathcal{A}_\Phi}(q) = \prod_{i=1}^{n}(q - e_i). \tag{5.1}$$

Απόδειξη: Έχει αποδειχθεί, πρώτα κατά περίπτωση από τους Shephard και Todd [23] και αργότερα από τον Solomon [24], ότι:

$$\prod_{i=1}^{n}(q - e_i) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i} h_i q^i, \tag{5.2}$$

όπου $h_i = |\{w \in W : \dim Fix(w) = i\}|$. Χρησιμοποιώντας τη σχέση (5.2), βλέπουμε ότι αρκεί να δείξουμε ότι

$$\chi_{\mathcal{A}_\Phi}(q) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i} h_i q^i.$$

Από τον ορισμό του χαρακτηριστικού πολυωνύμου,

$$\chi_{\mathcal{A}_\Phi}(q) = \sum_{x \in L(\mathcal{A}_\Phi)} \mu(x) q^{\dim x},$$

αρκεί να δείξουμε ότι

$$\mu(x) = (-1)^{n - \dim x} |\{w \in W : Fix(w) = x\}|. \tag{5.3}$$

Από τον ορισμό της συνάρτησης Möbius, αρκεί να δείξουμε ότι $\mu(\hat{0}) = 1$ (το οποίο είναι φανερό) και ότι

$$\sum_{x \in L(\mathcal{A}_\Phi), x \leq y} (-1)^{n - \dim x} |\{w \in W : Fix(w) = x\}| = 0 \ \forall y \in L(\mathcal{A}_\Phi).$$

Χρησιμοποιώντας το Πόρισμα 2.6 από το [15], βλέπουμε ότι το κλειστό διάστημα $[\hat{0}, y]$ είναι επίσης σύνολο τομών παρατάγματος Coxeter. Κατά συνέπεια, αρκεί να δειχθεί ότι

$$\begin{aligned} \sum_{x \in L(\mathcal{A}_\Phi)} (-1)^{n - \dim x} |\{w \in W : Fix(w) = x\}| &= 0 \quad \text{ή} \\ \sum_{w \in W} (-1)^{n - \dim(Fix(w))} &= 0. \end{aligned}$$

Έστω $H \in \mathcal{A}_\Phi$ και $\sigma \in W$ η ανάκλαση που αντιστοιχεί στο υπερεπίπεδο $H$. Αν το $S \subseteq W$ είναι το σύνολο $S = \{w \in W : Fix(w) \subseteq H\}$ και $T = W \setminus S$, τότε ορίζουμε απεικόνιση $a_\sigma : T \to S$ με $a_\sigma(w) = w\sigma$. Θα δείξουμε ότι $Fix(a_\sigma(w)) = Fix(w) \cap H$. Έστω $w = \sigma_1 \cdots \sigma_k$ ανηγμένη μορφή του $w$. Από την Πρόταση 5.1 γνωρίζουμε ότι $Fix(w) = H_1 \cap \cdots \cap H_k$. Αφού $Fix(w) \nsubseteq H$, η ρίζα $\alpha$ που αντιστοιχεί στο $H$ είναι γραμμικά ανεξάρτητη από τις ρίζες $\alpha_i$ που αντιστοιχούν στα $H_i$, $i = 1, ..., k$. Άρα, από το Λήμμα 5.3, ο $a_\sigma(w) = \sigma_1 \cdots \sigma_k \sigma$ είναι σε ανηγμένη μορφή και $Fix(a_\sigma(w)) = H_1 \cap \cdots \cap H_k \cap H$. Συνεπώς $Fix(a_\sigma(w)) = Fix(w) \cap H$. Από αυτό το αποτέλεσμα συμπεραίνουμε ότι η απεικόνιση $a_\sigma : T \to S$ είναι καλά ορισμένη και $\dim(Fix(a_\sigma(w))) = \dim(Fix(w)) - 1$. Ακόμη, η $a_\sigma$ είναι 1-1 και επί, με αντίστροφη τον εαυτό της. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \sum_{w \in W} (-1)^{n - \dim(Fix(w))} &= \sum_{w \in T} (-1)^{n - \dim(Fix(w))} + \sum_{w \in S} (-1)^{n - \dim(Fix(w))} \\ &= \sum_{w \in T} (-1)^{n - \dim(Fix(w))} + \sum_{w \in T} (-1)^{n - \dim(Fix(a_\sigma(w)))} \\ &= \sum_{w \in T} (-1)^{n - \dim(Fix(w))} + (-1)^{n - \dim(Fix(w)) + 1} \\ &= \sum_{w \in T} (-1)^{n - \dim(Fix(w))} (1 - 1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

**Παρατήρηση:** Ο τύπος (5.3) συνάγεται από το Λήμμα 4.7 του [19], αλλά η απόδειξη εκεί είναι πιο σύνθετη.

**Εφαρμογή:** Από τα παρατάγματα που αναφέραμε ήδη, το παράταγμα $\mathcal{A}_n = \{H_{ij} : 1 \leq i < j \leq n\}$ είναι παράταγμα Coxeter με σύστημα ριζών το $A_{n-1} = \{e_i - e_j \in \mathbb{R}^n : 1 \leq i, j \leq n, i \neq j\}$, όπου $e_i \in \mathbb{R}^n$ είναι το διάνυσμα με 1 στην $i$-συντεταγμένη και 0 σε όλες τις άλλες. Γνωρίζουμε ήδη ότι $\chi_{\mathcal{A}_n}(q) = q \cdot (q-1) \cdots (q-n+1)$. Άρα οι εκθέτες της ομάδας ανακλάσεων με σύστημα ριζών το $A_{n-1}$ είναι οι $1, ..., n-1$.

# Κεφάλαιο 6

# Μέθοδος πεπερασμένων σωμάτων

Αφού έχει γίνει σαφής η χρησιμότητα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, πριν ολοκληρώσουμε την αναφορά μας σε αυτό, θα ασχοληθούμε επιγραμματικά με μια μέθοδο χρήσιμη για τον υπολογισμό του χαρακτηριστικού πολυωνύμου ενός ρητού παρατάγματος υπερεπιπέδων. Το κύριο συστατικό για τη μέθοδο αυτή εμφανίστηκε πολλές φορές στη βιβλιογραφία. Πρώτα χρησιμοποιήθηκε το 1970 από τους Crapo - Rota (ενότητα 16 του [12]) στη δυϊκή του μορφή. Ακολούθως χρησιμοποιήθηκε από τον Terao στο [28] σε παρατάγματα υπερεπιπέδων γραμμικών χώρων πάνω από πεπερασμένα σώματα. Για πρώτη φορά και ανεξάρτητα από τα προηγούμενα αποτελέσματα, η μέθοδος αυτή αναπτύχθηκε ως συστηματικό εργαλείο για τον υπολογισμό του χαρακτηριστικού πολυωνύμου ενός ρητού παρατάγματος υπερεπιπέδων στη διδακτορική διατριβή [4] του Αθανασιάδη. Παράλληλα και ανεξάρτητα εμφανίστηκε και στο άρθρο [7] των Björner - Ekedahl.

Έστω $\mathcal{A} = \{H_1, ..., H_k\}$ ένα παράταγμα υπερεπιπέδων στον $\mathbb{R}^n$. Όπως σχολιάσαμε και παραπάνω, κάθε υπερεπίπεδο $H_i$ ορίζεται από μια εξίσωση της μορφής $a_i \cdot x = b_i$, όπου $a_i \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $b_i \in \mathbb{R}$ $\forall i = 1, ..., k$. Αν $a_i \in \mathbb{Q}^n$ και $b_i \in \mathbb{Q}$, ή $a_i \in \mathbb{Z}^n$ και $b_i \in \mathbb{Z}$ $\forall i \in [k]$, καλούμε το παράταγμα *ρητό ή ακέραιο* αντίστοιχα. Θα ασχοληθούμε μόνο με ακέραια παρατάγματα, αλλά τα αποτελέσματα μπορούν εύκολα να επεκταθούν σε ρητά παρατάγματα, αφού κάθε ρητό παράταγμα μπορεί να γίνει ακέραιο όταν η εξίσωση κάθε υπερεπιπέδου του πολλαπλασιαστεί με κατάλληλο ακέραιο αριθμό.

Έστω $q$ δύναμη πρώτου και $H$ υπερεπίπεδο στον $\mathbb{R}^n$ που ορίζεται από την εξίσωση $a \cdot x = b$ με $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{Z}$. Ορίζουμε το υπερεπίπεδο $H^q$ στον $\mathbb{F}_q^n$ μέσω της εξίσωσης $a^q \cdot x = b^q$, όπου $a^q = (a_1 \mathrm{mod} q, ..., a_n \mathrm{mod} q)$ και $b^q = b \,\mathrm{mod} q$. Έτσι από το ακέραιο παράταγμα $\mathcal{A} = \{H_1, ..., H_k\}$ στον $\mathbb{R}^n$, ορίζουμε το *ανηγμένο modulo $q$* παράταγμα $\mathcal{A}_q = \{H_1^q, ..., H_k^q\}$ στον $\mathbb{F}_q^n$. Τα θεωρήματα που ακολουθούν μας δίνουν τη δυνατότητα να υπολογίσουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός ακέραιου (ή ρητού) παρατάγματος, με τη βοήθεια του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του ανηγμένου modulo $q$ παρατάγματός του, το οποίο σε κάποιες περιπτώσεις μπορεί να υπολογιστεί εύκολα.

**Θεώρημα 6.1** *Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός ακέραιου παρατάγματος $\mathcal{A}$ ισούται με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του $\mathcal{A}_q$, για δυνάμεις όλων εκτός από πεπερασμένου πλήθους πρώτων αριθμών $q$.*

Απόδειξη: Έστω $q = p^m$, όπου $p$ πρώτος. Αρκεί να δείξουμε ότι $L(\mathcal{A}) \cong L(\mathcal{A}_q)$ για όλους εκτός από πεπερασμένου πλήθους $p$. Για να ισχύει αυτό, πρέπει να έχουμε ότι για κάθε $S \subseteq [k]$, $\dim(\cap_S H) = \dim(\cap_S H^q)$, όπου $\cap_S H = \cap_{s \in S} H_s$. Από στοιχειώδη γραμμική άλγεβρα, γνωρίζουμε ότι $\cap_S H \neq \varnothing$ αν και μόνο αν $\mathrm{rank}[a_s, s \in S] = \mathrm{rank}[a_s\ b_s, s \in S]$, όπου οι πίνακες έχουν γραμμές τα διανύσματα $a_s$ και $(a_s, b_s)$ αντίστοιχα. Επίσης αν $\cap_S H \neq \varnothing$, τότε ισχύει ότι $\dim(\cap_S H) = n - \mathrm{rank}[a_s, s \in S]$. Συνεπώς, για να έχουμε ότι $L(\mathcal{A}) \cong L(\mathcal{A}_q)$ πρέπει να ισχύουν τα εξής:

- Αν $\cap_S H = \varnothing$, δηλαδή αν $\mathrm{rank}[a_s, s \in S] < \mathrm{rank}[a_s\ b_s, s \in S]$, τότε πρέπει να ισχύει $\mathrm{rank}[a_s^q, s \in S] < \mathrm{rank}[a_s^q\ b_s^q, s \in S]$.
  Για να ισχύει το αντίθετο, δηλαδή για να έχουμε $\mathrm{rank}[a_s^q, s \in S] = \mathrm{rank}[a_s^q\ b_s^q, s \in S]$, πρέπει να ισχύει $r = \mathrm{rank}[a_s\ b_s, s \in S] > \mathrm{rank}[a_s^q\ b_s^q, s \in S]$. Αυτό ισχύει μόνο αν όλες οι $r \times r$-υποορίζουσες του $\mathrm{rank}[a_s^q\ b_s^q, s \in S]$ είναι ίσες με 0. Για να ισχύει αυτό, πρέπει το $q$ να διαιρεί τις αντίστοιχες $r \times r$-υποορίζουσες του $[a_s\ b_s, s \in S]$. Αυτό όμως μπορεί να συμβεί μόνο για πεπερασμένου πλήθους πρώτους $p$.

- Αν $\cap_S H \neq \varnothing$, τότε πρέπει $\mathrm{rank}[a_s, s \in S] = \mathrm{rank}[a_s^q, s \in S]$.
  Έστω ότι $\mathrm{rank}[a_s, s \in S] = r$. Σε αυτή την περίπτωση, $\mathrm{rank}[a_s^q, s \in S] < r$ αν και μόνο αν όλες οι $r \times r$-υποορίζουσές του είναι 0, το οποίο μπορεί να συμβεί μόνο για πεπερασμένου πλήθους $p$.

Συνεπώς, έχουμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του $\mathcal{A}$ ταυτίζεται με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του $\mathcal{A}_q$ για δυνάμεις όλων εκτός από πεπερασμένου πλήθους πρώτων αριθμών $q$. □

**Θεώρημα 6.2** (Crapo - Rota [12], Terao [28], Αθανασιάδης [3],[4], Björner - Ekedahl [7]) *Αν $\mathcal{A}$ είναι παράταγμα υπερεπιπέδων στον $\mathbb{R}^n$ και ο $q$ είναι δύναμη αρκετά μεγάλου πρώτου αριθμού (ώστε να ισχύει το Θεώρημα 6.1), τότε*

$$\chi_{\mathcal{A}}(q) = |\mathbb{F}_q^n - \bigcup_{H \in \mathcal{A}_q} H|.$$

Απόδειξη: Γνωρίζουμε ότι $L(\mathcal{A}) \cong L(\mathcal{A}_q)$. Η διάσταση του $x$ και η τιμή της συνάρτησης Möbius στο $x$ δεν μεταβάλλονται είτε θεωρήσουμε ότι $x \in L(\mathcal{A})$ είτε ότι $x \in L(\mathcal{A}_q)$. Ορίζουμε $f, g : L(\mathcal{A}_q) \to \mathbb{Z}$, με $g(x) = |x|$ και $f(x) = |x \setminus \cup_{y > x} y|$. Προφανώς ισχύει ότι $g(x) = \sum_{y \geq x} f(y)$. Από το Θεώρημα 2.1 της αντιστροφής Möbius έχουμε ότι $f(y) = \sum_{x \geq y} \mu(y, x) g(x)$. Για $y = \hat{0}$ παίρνουμε:

$$\begin{aligned} f(\hat{0}) &= \sum_{x \geq \hat{0}} \mu(\hat{0}, x) g(x) \Rightarrow \\ |\mathbb{F}_q^n \setminus \bigcup_{x \in \mathcal{A}_q} x| &= \sum_{x \in L(\mathcal{A}_q)} \mu(x) q^{\dim x} = \chi_{\mathcal{A}}(q). \end{aligned}$$

□

**Εφαρμογές**

1. Θα υπολογίσουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του παρατάγματος $\mathcal{B}_n$, το οποίο περιλαμβάνει τα υπερεπίπεδα με εξισώσεις $x_i = \pm x_j$, $1 \leq i < j \leq n$ και $x_i = 0$, $1 \leq i \leq n$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 6.2, έχουμε $\chi_{\mathcal{B}_n}(q) = |\mathbb{F}_q^n \setminus \cup_{H \in (\mathcal{B}_n)_q} H|$

για $q$ δύναμη αρκετά μεγάλου πρώτου. Το δεύτερο μέλος αντιπροσωπεύει το πλήθος των σημείων $a = (a_1, ..., a_n)$ στον $\mathbb{F}_q^n$ τα οποία δεν έχουν μηδέν στις συντεταγμένες τους, δεν έχουν δύο ίσες συντεταγμένες και δεν έχουν μια τιμή και την αντίθετή της σε δύο από τις συντεταγμένες τους. Για να κατασκευάσουμε ένα τέτοιο $a$, έχουμε $q-1$ επιλογές για την πρώτη συντεταγμένη (όλες τις τιμές στο $\mathbb{F}_q$ εκτός από το μηδέν), $q-3$ επιλογές για τη δεύτερη συντεταγμένη, αφού δεν μπορεί να είναι ίση ή αντίθετη με την προηγούμενη, $q-5$ για την τρίτη, αφού δεν θα είναι ίση ή αντίθετη με τις δύο προηγούμενες κ.ο.κ. Άρα υπάρχουν $(q-1)(q-3)\cdots(q-2n+1)$ τέτοια σημεία. Αυτό το πολυώνυμο ταυτίζεται με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του $\mathcal{B}_n$ για άπειρες τιμές του $q$. Συνεπώς έχουμε

$$\chi_{\mathcal{B}_n}(t) = (t-1)(t-3)\cdots(t-2n+1).$$

2. Έστω το παράταγμα υπερεπιπέδων $\mathcal{D}_n$, που αποτελείται από τα υπερεπίπεδα $x_i = \pm x_j$ για $1 \leq i < j \leq n$. Από το Θεώρημα 6.2 έχουμε $\chi_{\mathcal{D}_n}(q) = |\mathbb{F}_q^n \setminus \cup_{H \in (\mathcal{D}_n)_q} H|$ για $q$ δύναμη αρκετά μεγάλου πρώτου. Τα στοιχεία του συνόλου $\mathbb{F}_q^n \setminus \cup_{H \in (\mathcal{D}_n)_q} H$ είναι τα στοιχεία $a = (a_1, ..., a_n)$ του $\mathbb{F}_q^n$ που δεν έχουν δύο συντεταγμένες ίσες ή αντίθετες. Αν το στοιχείο $a$ δεν έχει μηδενική συντεταγμένη, τότε, όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, βρίσκουμε ότι έχουμε $(q-1)(q-3)\cdots(q-2n+1)$ επιλογές για το σημείο αυτό. Αν έχει το $0$ σαν συντεταγμένη του, τότε έχουμε $n$ επιλογές για τη θέση του $0$, $q-1$ επιλογές για την πρώτη μη μηδενική συντεταγμένη, $q-3$ επιλογές για τη δεύτερη μη μηδενική συντεταγμένη κ.ο.κ., μέχρι την τελευταία μη μηδενική συντεταγμένη, για την οποία έχουμε $q-2n+3$ επιλογές. Δηλαδή υπάρχουν $n(q-1)(q-3)\cdots(q-2n+3)$ τέτοια στοιχεία. Συνολικά το $\mathbb{F}_q^n \setminus \cup_{H \in (\mathcal{D}_n)_p} H$ έχει $(q-1)(q-3)\cdots(q-2n+3)(q-n+1)$ στοιχεία και

$$\chi_{\mathcal{D}_n}(t) = (t-1)(t-3)\cdots(t-2n+3)(t-n+1).$$

# Βιβλιογραφία


[1] V.I. Arnol'd, *Wavefront evolution and equivariant Morse Lemma*, Comm. Pure Appl. Math. **26** (1976) 557-582.

[2] V.I. Arnol'd, *Indices of singular points of 1-forms on a manifold with boundary, convolution of invariants of reflection groups and singular projections of smooth surfaces*, Russian Math. Surveys **34** (1979) 1-42.

[3] C.A. Athanasiadis, *Characteristic polynomials of subspace arrangements and finite fields*, Adv. Math **122** (1996) 193-223.

[4] C.A. Athanasiadis, *Algebraic combinatorics of graph spectra, subspace arrangements and Tutte polynomials*, Ph.D. thesis, MIT (1996).

[5] C.A. Athanasiadis, *Deformations of Coxeter hyperplane arrangements and their characteristic polynomials*, in Arrangements - Tokyo 1998 (M. Falk and H. Terao, eds), Adv. Stud. Pure Math. **27**, Kinokuniya, Tokyo (2000) 1-26.

[6] A. Björner, M. Las Vergnas, B. Sturmfels, N. White, G.M. Ziegler, *Oriented Matroids*, second ed., Encyclopedia of Mathematics and Its Applications **46**, Cambridge University Press, Cambridge (1999).

[7] A. Björner, T. Ekedahl, *Subspace arrangements over finite fields: cohomological and enumerative aspects*, Adv. Math. **129** (1997) 159-187.

[8] A. Björner, G.M. Ziegler, *Combinatorial stratification of complex arrangements*, J. Amer. Math. Soc. **5** (1992) 105-149.

[9] E. Brieskorn, *Sur les groupes de tresses* (d' après V.I. Arnol'd), Séminaire Bourbaki 1971/72, Lecture Notes in Math. **317** Springer - Verlag, New York (1973).

[10] T. Brylawski, *The broken-circuit complex*, Trans. Amer. Math. Soc. **234** (1977) 417-433.

[11] R.W. Carter, *Conjugacy classes in the Weyl groups*, Compositio Math. **25** (1972) 1-52.

[12] H.H. Crapo, G.-C. Rota, *On the Foundations of Combinatorial Theory: Combinatorial Geometries*, preliminary edition, M.I.T. press, Cambridge, MA (1970).

[13] S. Fomin, N. Reading, *Root systems and generalized associahedra*, in Geometric Combinatorics (E. Miller, V. Reiner and B. Sturmfels, eds), IAS/Park City Mathematics Series **13**, Amer. Math. Society, Providence, RI (2007) 63-131.

[14] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, New York (2002).

[15] J.E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge Stud. Adv. Math. **29**, Cambridge University Press, Amherst (1990).

[16] M. Las Vergnas, *Matroïdes orientables*, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. A **280** (1975) 61-64.

[17] J.R. Munkres, *Elements of algebraic topology*, Addison - Wesley, Reading, Mass. (1984).

[18] P. Orlik, L. Solomon, *Combinatorics and topology of complement of hyperplanes*, Invent. Math. **56** (1980) 167-189.

[19] P. Orlik, L. Solomon, *Unitary reflection groups and cohomology*, Invent. Math. **59** (1980) 77-94.

[20] D. Reinhard, *Graph Theory*, Springer-Verlag, New York (2005).

[21] K. Saito, *On the uniformization of complements of discriminant loci*, Seminar notes, Amer. Math. Soc. Summer Institute, Williamstown (1975).

[22] K. Saito, *Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **27** (1980) 265-291.

[23] G.C. Shephard, J.A. Todd, *Finite unitary reflection groups*, Canadian J. Math. **6** (1954) 274-304.

[24] L. Solomon, *Invariants of finite reflection groups*, Nagoya Math. J. **22** (1963) 57-64.

[25] R.P. Stanley, *Enumerative Combinatorics*, vol.1, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **49**, Cambridge University Press, Cambridge (1998).

[26] R.P. Stanley, *An Introduction to Hyperplane Arrangements*, in Geometric Combinatorics (E. Miller, V. Reiner and B. Sturmfels, eds), IAS/Park City Mathematics Series **13**, Amer. Math. Society, Providence, RI (2007) 389-496.

[27] R. Steinberg, *Endomorphisms of linear algebraic groups*, Memoirs Amer. Math. Soc. **80** (1968).

[28] H. Terao, *The Jacobians and the discriminants of finite reflection groups*, Tôhoku Math. J. **41** (1989) 237-247.

[29] T. Zaslavsky, *Facing up to arrangements: face-count formulas for partitions of space by hyperplanes*, Mem. Amer. Math. Soc. vol. 1 **154** (1975).