ΘΕΩΡΙΑ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ
Εαρινό Εξάμηνο 2017

Ασκήσεις #1

Σε ότι ακολουθεί, G είναι πεπερασμένη ομάδα και V είναι $\mathbb{C}$-διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης.

1. Δείξτε ότι η απεικόνιση $G \times G \to G$ που ορίζεται θέτοντας $g \cdot x = gxg^{-1}$ για $g, x \in G$ αποτελεί δράση της ομάδας G πάνω στον εαυτό της.

2. Δείξτε ότι οι μόνες αναπαραστάσεις της συμμετρικής ομάδας $\mathfrak{S}_n$ διάστασης ένα είναι η προφανής αναπαράσταση και η αναπαράσταση του προσήμου.

3. Δίνεται G-αναπαράσταση V και G-αναλλοίωτος υπόχωρος $W \subseteq V$.

(α) Δείξτε ότι ο χώρος πηλίκο V/W είναι επίσης G-πρότυπο, αν θέσουμε

$$g \cdot (v + W) \;=\; gv + W$$

για $g \in G$ και $v \in V$.

(β) Δείξτε ότι οι V και $W \oplus (V/W)$ είναι ισόμορφες G-αναπαραστάσεις.

4. Δίνεται ανάγωγη αναπαράσταση $\rho : G \to GL(V)$.

(α) Αν $\dim_{\mathbb{C}}(V) \geq 2$ και $v \in V$, δείξτε ότι $\sum_{g \in G} gv = 0$.

(β) Αν $h \in G$ και $gh = hg$ για κάθε $g \in G$, δείξτε ότι $\rho(h) = \zeta I$ για κάποια ρίζα της μονάδας $\zeta \in \mathbb{C}$.

5. Έστω V ανάγωγο G-πρότυπο και έστω $\langle\ ,\ \rangle$ και $\langle\ ,\ \rangle'$ δύο G-αναλλοίωτα εσωτερικά γινόμενα στο V. Δείξτε ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$, τέτοιο ώστε $\langle v, w \rangle \;= \lambda \langle v, w \rangle'$ για όλα τα $v, w \in V$ ως εξής:

(α) Δείξτε ότι οι απεικονίσεις $H, H' : V \to V^*$ με $H(v)(w) = \langle v, w \rangle$ και $H'(v)(w) = \langle v, w \rangle'$ για $v, w \in V$ είναι συζυγείς - γραμμικοί ισομορφισμοί διανυσματικών χώρων.

(β) Δείξτε ότι η απεικόνιση $\phi = H^{-1} \circ H' : V \to V$ είναι G-ισομορφισμός.

(γ) Συνάγετε από το Λήμμα του Schur ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$, τέτοιο ώστε $\langle v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle'$ για όλα τα $v, w \in V$.

Έως Δευτέρα, 13 Μαρτίου

ΘΕΩΡΙΑ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ
Εαρινό Εξάμηνο 2017

Ασκήσεις #2

Σε ότι ακολουθεί, G είναι πεπερασμένη ομάδα και V είναι $\mathbb{C}$-διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης.

6. Θεωρούμε αναπαράσταση $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ της G διάστασης d με χαρακτήρα χ. Δείξτε ότι για $g \in G$ ισχύει $\chi(g) = d$ αν και μόνο αν $\rho(g)$ είναι ο ταυτοτικός αυτομορφισμός του V.

7. Θεωρούμε αναπαράσταση $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ της G διάστασης 2. Αν το 1 είναι ιδιοτιμή του $\rho(g)$ για κάθε $g \in G$, δείξτε ότι η ρ είναι ισόμορφη με το ευθύ άθροισμα δύο μονοδιάστατων αναπαραστάσεων.

8. Θεωρούμε τη δράση της κυκλικής ομάδας $G = \{\epsilon, g, g^2, \ldots, g^{n-1}\}$ τάξης n στο σύνολο των υποσυνόλων της $\mathbb{Z}_n$ με δύο στοιχεία, η οποία ορίζεται θέτοντας

$$g^k \cdot \{i, j\} \ = \ \{i + k, j + k\}$$

για διακεκριμένα στοιχεία $i, j \in \mathbb{Z}_n$. Να αναλύσετε την αντίστοιχη αναπαράσταση μεταθέσεων σε ευθύ άθροισμα ανάγωγων αναπαραστάσεων.

9. Για $w \in \mathfrak{S}_n$ θέτουμε $\chi(w) = \mathrm{fix}(w) - 1$, όπου $\mathrm{fix}(w)$ είναι το πλήθος των σταθερών σημείων της w.

(α) Δείξτε ότι η συνάρτηση $\chi : \mathfrak{S}_n \to \mathbb{C}$ είναι ίση με το χαρακτήρα κάποιας αναπαράστασης ρ της $\mathfrak{S}_n$. Ποια είναι η διάσταση της ρ;

(β) Αν $p(n, k)$ συμβολίζει το πλήθος των $w \in \mathfrak{S}_n$ με ακριβώς k σταθερά σημεία, δείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{n} kp(n, k) \ = \ \sum_{k=0}^{n} k(k-1)p(n, k) \ = \ n!.$$

(γ) Χρησιμοποιώντας το (β), δείξτε ότι η αναπαράσταση ρ είναι ανάγωγη.

10. Θεωρούμε τη δράση της συμμετρικής ομάδας $\mathfrak{S}_n$ στο σύνολο των υποσυνόλων του $\{1, 2, \ldots, n\}$ που ορίζεται θέτοντας $w \cdot S = \{w(x) : x \in S\}$ για $w \in \mathfrak{S}_n$ και $S \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$. Να υπολογίσετε την πολλαπλότητα της προφανούς αναπαράστασης, της αναπαράστασης του προσήμου και της ανάγωγης αναπαράστσης της προηγούμενης άσκησης στην ανάλυση της αντίστοιχης αναπαράστασης μεταθέσεων της $\mathfrak{S}_n$ σε ευθύ άθροισμα ανάγωγων αναπαραστάσεων.

Έως Δευτέρα, 3 Απριλίου

ΘΕΩΡΙΑ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ
Εαρινό Εξάμηνο 2017

Ασκήσεις #3

11. Έστω πεπερασμένη ομάδα G.

(α) Δείξτε ότι οι ακόλουθοι δύο χαρακτήρες της G ταυτίζονται: (i) ο χαρακτήρας της δράσης $\sigma : G \to \mathfrak{S}(G)$ της συζυγίας της G πάνω στον εαυτό της, δηλαδή με $\sigma(g)(x) = gxg^{-1}$ για $g, x \in G$ και (ii) ο χαρακτήρας $\sum_\chi \bar{\chi}\chi$, όπου το χ διατρέχει όλους τους ανάγωγους χαρακτήρες της G.

(β) Έστω ψ_G ο χαρακτήρας του (α). Δείξτε ότι $\langle \psi_G, \chi \rangle = \sum_K \chi(K)$ για κάθε ανάγωγο χαρακτήρα χ της G, όπου το K διατρέχει όλες τις κλάσεις συζυγίας της G. Συνάγετε ότι $\sum_K \chi(K) \ge 0$ για κάθε ανάγωγο χαρακτήρα χ της G.

12. Έστω χ, ψ ανάγωγοι χαρακτήρες πεπερασμένης ομάδας G. Δείξτε ότι ο $\chi\psi$ περιέχεται στην κανονική αναπαράσταση της G, δηλαδή ότι $\langle \chi\psi, \varphi \rangle \le \dim \varphi$ για κάθε ανάγωγο χαρακτήρα φ της G.

13. Θεωρούμε την κυκλική υποομάδα H της $\mathfrak{S}_4$ που παράγεται από την $(1\ 2\ 3\ 4) \in \mathfrak{S}_4$ και την αναπαράσταση ρ που επάγεται στην $\mathfrak{S}_4$ από την αναπαράσταση του προσήμου της H.

(α) Υπολογίστε το χαρακτήρα της ρ.

(β) Αναλύστε τη ρ ως ευθύ άθροισμα ανάγωγων αναπαραστάσεων της $\mathfrak{S}_4$.

14. Υπολογίστε την τιμή του χαρακτήρα της αναπαράστασης M^λ της συμμετρικής ομάδας $\mathfrak{S}_{2n}$ στη μετάθεση $w = (1\ 2)\,(3\ 4) \cdots (2n-1\ 2n) \in \mathfrak{S}_{2n}$, αν

(α) $\lambda = (2, 2, \ldots, 2) \vdash 2n$,

(β) $\lambda = (n, n)$.

15. Δείξτε ότι $\chi^\lambda(w) \in \mathbb{Z}$ για κάθε $w \in \mathfrak{S}_n$, όπου χ^λ είναι ο ανάγωγος χαρακτήρας της $\mathfrak{S}_n$ που αντιστοιχεί στη διαμέριση $\lambda \vdash n$.

Έως Πέμπτη, 27 Απριλίου

ΘΕΩΡΙΑ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ
Εαρινό Εξάμηνο 2017

Ασκήσεις #4

16. Χρησιμοποιώντας μόνο τον ορισμό των αριθμών Kostka, δείξτε ότι αν λ, μ είναι διαμερίσεις του n και $K_{\lambda\mu} \neq 0$, τότε $\lambda \trianglerighteq \mu$.

17. Θεωρούμε τη δράση της συμμετρικής ομάδας $\mathfrak{S}_n$ στο σύνολο των διατεταγμένων ζευγών (a, b) διακεκριμένων στοιχείων του $\{1, 2, \dots, n\}$ που ορίζεται θέτοντας $w \cdot (a, b) = (w(a), w(b))$ για $a, b \in \{1, 2, \dots, n\}$ με $a \neq b$ και την αντίστοιχη αναπαράσταση μεταθέσεων ρ_n της $\mathfrak{S}_n$.

(α) Να υπολογίσετε το χαρακτήρα της ρ_n.

(β) Να αναλύσετε τη ρ_n σε ευθύ άθροισμα ανάγωγων αναπαραστάσεων της $\mathfrak{S}_n$.

(γ) Να αναλύσετε την επαγωγή $\rho_n \uparrow_{\mathfrak{S}_n}^{\mathfrak{S}_{n+1}}$ σε ευθύ άθροισμα ανάγωγων αναπαραστάσεων της $\mathfrak{S}_{n+1}$.

18. Για τυχαία ομογενή συμμετρική συνάρτηση

$$f(x) \;=\; \sum_{\lambda \vdash n} b_\lambda p_\lambda(x) \;=\; \sum_{\lambda \vdash n} c_\lambda e_\lambda(x)$$

βαθμού n, δείξτε ότι $c_{(n)} = (-1)^{n-1} n \cdot b_{(n)}$.

19. Να εκφράσετε:

(α) τη συνάρτηση Schur $s_{(3,2)}(x)$ ως γραμμικό συνδυασμό των μονωνυμικών συμμετρικών συναρτήσεων $m_\lambda(x)$,

(β) τη μονωνυμική συμμετρική συνάρτηση $m_{(3,2)}(x)$ ως γραμμικό συνδυασμό συναρτήσεων Schur $s_\lambda(x)$.

20. Συμβολίζουμε με $c(w)$ το πλήθος των κύκλων μιας μετάθεσης $w \in \mathfrak{S}_n$. Για θετικό ακέραιο q και διαμέριση λ του n θέτουμε

$$a_\lambda(q) \;=\; \frac{1}{n!} \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} \chi^\lambda(w)\, q^{c(w)}.$$

(α) Δείξτε ότι το $a_\lambda(q)$ είναι μη αρνητικός ακέραιος για κάθε $\lambda \vdash n$.

(β) Περιγράψτε μια συνδυαστική ερμηνεία για το $a_\lambda(q)$.

(γ) Υπολογίστε το άθροισμα $\sum_{w \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{fix}(w)\, q^{c(w)}$, όπου $\mathrm{fix}(w)$ είναι το πλήθος των σταθερών σημείων της w.

Έως Δευτέρα, 15 Μαΐου

ΘΕΩΡΙΑ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ
Εαρινό Εξάμηνο 2017

Ασκήσεις #5

21. Δίνεται τυχαία ομογενής συμμετρική συνάρτηση $f(x)$ βαθμού n.

(α) Δείξτε ότι η $f(1^m)$ είναι πολυωνυμική συνάρτηση στο m βαθμού μικρότερου ή ίσου του n.

(β) Δείξτε ότι ο βαθμός της $f(1^m)$ είναι μικρότερος του n αν και μόνο αν $\langle f, e_1^n \rangle = 0$.

22. Δείξτε ότι

$$h_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \;=\; \sum_{i=1}^{n} x_i^{n+k-1} \prod_{j \neq i} (x_i - x_j)^{-1}$$

για μη αρνητικούς ακεραίους n, k με $n \geq 1$.

23. Έστω θετικός ακέραιος m και η διαμέριση $\lambda = (m, m-1, \ldots, 1)$ του $n = \binom{m+1}{2}$.

(α) Δείξτε ότι

$$s_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_m) \;=\; x_1 x_2 \cdots x_m \prod_{1 \leq i < j \leq m} (x_i + x_j).$$

(β) Δείξτε ότι $\chi^\lambda(w) = 0$, αν η τάξη της μετάθεσης $w \in \mathfrak{S}_n$ είναι άρτιος αριθμός.

24. Να εκφράσετε:

(α) τη συμμετρική συνάρτηση $s_{(2,2)} \cdot p_{(2,2)}$ στη βάση $\{s_\lambda : \lambda \vdash 8\}$ του $\Lambda^8_{\mathbb{Q}}$,

(β) το τετράγωνο της συνάρτησης $s_{(2,1)}$ στη βάση $\{s_\lambda : \lambda \vdash 6\}$ του $\Lambda^6_{\mathbb{Q}}$.

25. Βρείτε, με απόδειξη, όλους τους θετικούς ακεραίους n και τις διαμερίσεις $\lambda \vdash n$ για τις οποίες ισχύει $\chi^\lambda(w) = 0$ για κάθε μετάθεση $w \in \mathfrak{S}_n$ άρτιας τάξης.

Έως Πέμπτη, 1 Ιουνίου