

532 Θεωρία Αριθμών
Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2022
Αθήνα 21/9/2022

Υπενθυμίζεται ότι $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$ και ότι $n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όπου $0! := 1$.

Γράψτε το ονοματεπώνυμο και τον αριθμό μητρώου σας πάνω στα θέματα και παραδώστε τα μαζί με το γραπτό σας. Η εξέταση διαρκεί δύο ώρες και αποτελείται από δύο μέρη:

Μέρος Α - Πολλαπλή Επιλογή. Να απαντήσετε σε όλα τα ερωτήματα. Διαβάστε προσεκτικά την εκφώνηση κάθε ερωτήματος και επιλέξτε τη μοναδική σωστή απάντηση, αιτιολογώντας την απάντησή σας και δείχνοντας τα βήματα της λύσης, όπου χρειάζεται. **Απαντήσεις χωρίς καμία αιτιολόγηση δε θα βαθμολογούνται.** Γράφете ευανάγνωστα! Μέγιστη βαθμολογία για το πρώτο μέρος είναι οι 6 μονάδες.

A1. Για $a \in \mathbb{Z}$, το $a + 1$ διαιρεί το $a^3 + a^2 + a + 1$

(α) μόνο για μία τιμή του a (β) μόνο για δύο τιμές του a (γ) μόνο για τρεις τιμές του a (δ) για περισσότερες από τρεις, αλλά πεπερασμένου πλήθους τιμές, του a (ε) για άπειρες τιμές του a , αλλά όχι για κάθε $a \in \mathbb{Z}$ (στ) για κάθε $a \in \mathbb{Z}$

A2. Το πλήθος των θετικών διαιρετών του $\mu\kappa\delta(945, 280)$ είναι ίσο με

(α) 0 (β) 1 (γ) 2 (δ) 4 (ε) 6 (στ) μεγαλύτερο του 6

A3. Για πόσους πρώτους αριθμούς p είναι το $3p + 1$ ίσο με το τετράγωνο ενός ακεραίου αριθμού;

(α) για κανέναν (β) μόνο για έναν (γ) μόνο για δύο (δ) μόνο για τρεις (ε) μόνο για τέσσερις
(στ) για περισσότερους από τέσσερις

A4. Η εξίσωση $8x + 15y = c$ έχει τουλάχιστον μία λύση $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

(α) για μία μόνο ακέραια τιμή του c (β) για περισσότερες από μία και λιγότερες από είκοσι ακέραιες τιμές του c (γ) για τουλάχιστον είκοσι, αλλά πεπερασμένου πλήθους, ακέραιες τιμές του c (δ) για κάθε ακέραιο $c > 48$ (ε) για κάθε ακέραιο $c > 97$ (στ) για κάθε $c \in \mathbb{N}$

A5. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $\prod_{k=0}^{33} (3k + 1) = 1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10 \cdots 100$ με το 9 είναι ίσο με

(α) 1 (β) 2 (γ) 4 (δ) 5 (ε) 7 (στ) 8

A6. Για ποιους ακεραίους x ισχύει η ισοτιμία $x^{19} \equiv x \pmod{27}$;

(α) μόνο για τα πολλαπλάσια του 27 (β) μόνο για εκείνους που δε διαιρούνται με το 3 (γ) μόνο για εκείνους που δε διαιρούνται με το 9 (δ) μόνο για τα πολλαπλάσια του 27 και για τους ακεραίους που δε διαιρούνται με το 3 (ε) μόνο για τα πολλαπλάσια του 27 και για τους ακεραίους που δε διαιρούνται με το 9 (στ) για όλους τους ακεραίους

A7. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $(100!)^{2022}$ με το 101 είναι ίσο με

(α) 1 (β) 21 (γ) 41 (δ) 61 (ε) 81 (στ) 100

A8. Αν $f : \{1, 2, 3, \dots\} \rightarrow \mathbb{C}$ είναι πολλαπλασιαστική συνάρτηση με $f(3) = 10$ και $f(4) = 16$, τότε το $f(6)$

(α) δεν καθορίζεται από τα δεδομένα του προβλήματος (β) είναι ίσο με 20 (γ) είναι ίσο με 40
(δ) είναι ίσο με 80 (ε) είναι ίσο με 160 (στ) είναι μεγαλύτερο του 160

A9. Πόσες λύσεις $x \in \{1, 2, 3, \dots, 700\}$ έχει η ισοτιμία $x^2 + 2x + 4 \equiv 0 \pmod{7}$;

(α) 1 (β) 2 (γ) 70 (δ) 100 (ε) 140 (στ) 200

A10. Η τάξη της κλάσης $3 \pmod{50}$ είναι

(α) μικρότερη του 5 (β) ίση με 5 (γ) ίση με 10 (δ) ίση με 20 (ε) ίση με 25 (στ) μεγαλύτερη του 25

A11. Το πλήθος των πρωταρχικών ριζών $\pmod{73}$ είναι ίσο με

(α) 1 (β) 12 (γ) 24 (δ) 36 (ε) 48 (στ) 71

A12. Η ισοτιμία $x^2 \equiv 31 \pmod{67}$ έχει τουλάχιστον μία λύση. Σωστό ή λάθος;

(α) Σωστό (β) Λάθος

Μέρος Β - Προβλήματα Ανάπτυξης. Διαβάστε προσεκτικά την εκφώνηση κάθε προβλήματος. Να απαντήσετε σε όλα τα ερωτήματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας και δείχνοντας όλα τα βήματα της λύσης. **Απαντήσεις χωρίς αιτιολόγηση, και πρόχειροι υπολογισμοί ή φλυαρίες που δεν οδηγούν σε σαφή απάντηση, δε θα βαθμολογούνται.** Γράφετε ευανάγνωστα! Μέγιστη βαθμολογία για το δεύτερο μέρος είναι οι 4 μονάδες.

B1.

(α) Περιγράψτε όλες τις ακέραιες λύσεις της εξίσωσης $3x - 11y = 5$.

(β) Περιγράψτε όλες τις ακέραιες λύσεις της εξίσωσης $3x^2 - 11y^2 = 5$.

B2. Βρείτε όλες τις τριάδες $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ που επαληθεύουν την εξίσωση $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$.

B3.

(α) Λύστε το σύστημα των ισοτιμιών $x \equiv 7 \pmod{13}$ και $x \equiv 12 \pmod{17}$.

(β) Βρείτε όλες τις λύσεις της ισοτιμίας $x^2 + 38x + 30 \equiv 0 \pmod{49}$.