Θεωρία Αριθμών
Θέματα Εξετάσεων Σεπτεμβίου 2019

1. Δείξτε ότι για $n \in \mathbb{N}$:

(α) (5 μονάδες) ο αριθμός $13 \cdot 7^n + 2$ είναι σύνθετος,

(β) (5 μονάδες) ο αριθμός $19^n + 5$ δεν είναι ίσος με το τετράγωνο ενός ακεραίου,

(γ) (10 μονάδες) ο αριθμός $4 \cdot (2n+1)^{2n} + 3^{6n+3} + 5^{2n+1} - 4$ διαιρείται με το 32.

2. (10 μονάδες) Βρείτε όλους τους πρώτους p για τους οποίους το $2^{p-1} - 1$ είναι ίσο με μια δύναμη του p.

3. (10 μονάδες) Για ακεραίους a, b με $\mu\kappa\delta(ab, 91) = 1$, δείξτε ότι $a^{12} \equiv b^{12} \pmod{91}$.

4. (15 μονάδες) Βρείτε τους θετικούς ακεραίους n για τους οποίους το άθροισμα

$$f(n) \;=\; \sum_{d|n} \mu(d)\varphi(d)$$

είναι άρτιος αριθμός.

5. (15 μονάδες) Λύστε την ισοτιμία $3x^2 + x + 4 \equiv 0 \pmod{441}$.

6. (15 μονάδες) Δίνεται περιττός πρώτος p. Για τις διάφορες τιμές του $n \in \mathbb{N}$ υπολογίστε το υπόλοιπο της διαίρεσης του

$$1^{2n} \;+\; 2^{2n} \;+ \cdots +\; \left(\frac{p-1}{2}\right)^{2n}$$

με το p.

7. Δίνεται πρώτος αριθμός $p \equiv 3 \pmod 4$.

(α) (5 μονάδες) Λύστε την ισοτιμία $x^4 \equiv 1 \pmod p$.

(β) (5 μονάδες) Δείξτε ότι η ισοτιμία $x^4 \equiv c \pmod p$ έχει λύση για ακριβώς $(p+1)/2$ κλάσεις $c \pmod p$.

(γ) (10 μονάδες) Έστω ότι a, b είναι ακέραιοι που δε διαιρούνται με το p. Δείξτε ότι για κάθε $c \in \mathbb{Z}$ υπάρχουν $x, y \in \mathbb{Z}$ τέτοια ώστε $ax^4 + by^4 \equiv c \pmod p$.

Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Αθήνα 6/9/2019 – Διάρκεια εξέτασης 5/2 ώρες – Καλή Επιτυχία