

532 Θεωρία Αριθμών
Εξετάσεις Ιουνίου 2026
Αθήνα 15/06/2026

Γράψτε το ονοματεπώνυμο και τον αριθμό μητρώου σας πάνω στα θέματα και παραδώστε τα μαζί με το γραπτό σας. Η εξέταση διαρκεί δύο ώρες και αποτελείται από δύο μέρη:

Μέρος Α - Πολλαπλή Επιλογή. Να απαντήσετε σε όλα τα ερωτήματα. Διαβάστε προσεκτικά την εκφώνηση κάθε ερωτήματος και επιλέξτε τη μοναδική σωστή απάντηση, αιτιολογώντας την απάντησή σας και δείχνοντας τα βήματα της λύσης, όπου χρειάζεται. **Απαντήσεις χωρίς καμία αιτιολόγηση δε θα βαθμολογούνται.** Γράφετε ευανάγνωστα ! Μέγιστη βαθμολογία για το πρώτο μέρος είναι οι 6 μονάδες.

Υπενθυμίζεται ότι $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

A1. Ποιες τιμές μπορεί να λάβει το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός άρτιου ακεραίου με το 7;

(α) μόνο τις τιμές 0 και 6 (β) μόνο τις τιμές 2 και 4 (γ) μόνο τις τιμές 0, 2, 4 και 6 (δ) μόνο τις τιμές 0, 1, 2 και 3 (ε) μόνο τις τιμές 3, 4, 5 και 6 (στ) τις 0, 1, 2, 3, 4, 5 και 6

A2. Αν x είναι ο μικρότερος θετικός ακέραιος ο οποίος διαιρείται με το 36 και με το 42, τότε

(α) $x < 240$ (β) $240 \leq x < 260$ (γ) $260 \leq x < 280$ (δ) $280 \leq x < 300$ (ε) $x \geq 300$ (στ) ο x δεν ορίζεται

A3. Αν p είναι ο μεγαλύτερος πρώτος διαιρέτης του αριθμού $5 \cdot 10 \cdot 15 \cdots 100$, τότε

(α) $p < 10$ (β) $10 \leq p < 20$ (γ) $20 \leq p < 100$ (δ) $100 \leq p < 500$ (ε) $500 \leq p < 1000$
(στ) $p \geq 1000$

A4. Το πλήθος των λύσεων $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ της εξίσωσης $19x + 26y = 1926$ είναι

(α) ίσο με 1 (β) ίσο με 2 (γ) ίσο με 3 (δ) ίσο με 4 (ε) πεπερασμένο, μεγαλύτερο του 4
(στ) άπειρο

A5. Το πλήθος των ακεραίων $a \in \{1, 2, 3, \dots, 240\}$ για τους οποίους $\mu\kappa\delta(a, 240) = 2$ είναι ίσο με

(α) 8 (β) 16 (γ) 24 (δ) 32 (ε) 48 (στ) 64

A6. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του 5^{85} με το 36 είναι ίσο με

(α) 1 (β) 5 (γ) 17 (δ) 25 (ε) 29 (στ) 33

A7. Για πόσους περιττούς πρώτους αριθμούς p ισχύει η ισοτιμία $(p-2)! \equiv 1 \pmod{p}$;

(α) για κανέναν (β) μόνο για έναν (γ) μόνο για δύο (δ) για περισσότερους από δύο αλλά πεπερασμένου πλήθους (ε) για άπειρους αλλά όχι για όλους (στ) για όλους

A8. Αν $f : \mathbb{Z}_{>0} \rightarrow \mathbb{C}$ είναι πολλαπλασιαστική συνάρτηση και $f(4) = 3$, $f(12) = -1$, $f(27) = 27$, τότε το $f(3)$ είναι ίσο με

(α) 1 (β) -1 (γ) 3 (δ) -3 (ε) $1/3$ (στ) $-1/3$

A9. Το πλήθος των λύσεων $x \pmod{42}$ της ισοτιμίας $15x \equiv 21 \pmod{42}$ είναι ίσο με

(α) μηδέν (β) 1 (γ) 3 (δ) 6 (ε) 7 (στ) 14

A10. Το πλήθος των λύσεων $x \pmod{2020}$ της ισοτιμίας $x^2 \equiv 1 \pmod{2020}$ είναι ίσο με

(α) 1 (β) 2 (γ) 4 (δ) 8 (ε) 16 (στ) 32

A11. Η τάξη της $8 \pmod{17}$ είναι ίση με

(α) 1 (β) 2 (γ) 4 (δ) 8 (ε) 16 (στ) 17

A12. Για ποιους πρώτους αριθμούς p υπάρχει πρωταρχική ρίζα $\pmod{3p^2}$;

(α) μόνο για $p = 2$ (β) μόνο για $p = 3$ (γ) μόνο για $p = 2$ και $p = 3$ (δ) για όλους τους περιττούς πρώτους p (ε) για όλους τους πρώτους $p > 3$ (στ) για κανένα

Μέρος Β - Προβλήματα Ανάπτυξης. Διαβάστε προσεκτικά την εκφώνηση κάθε προβλήματος. Να απαντήσετε σε όλα τα ερωτήματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας και δείχνοντας όλα τα βήματα της λύσης. **Απαντήσεις χωρίς αιτιολόγηση, και πρόχειροι υπολογισμοί ή φλυαρίες που δεν οδηγούν σε σαφή απάντηση, δε θα βαθμολογούνται.** Γράφετε ευανάγνωστα ! Μέγιστη βαθμολογία για το δεύτερο μέρος είναι οι 4 μονάδες.

Μπορείτε να θεωρήσετε γνωστό ότι ο 1013 είναι πρώτος αριθμός.

B1. Για $x, y \in \mathbb{Z}$ δείξτε ότι $6 \mid x - y \Leftrightarrow 6 \mid x^3 - y^3$.

B2. Υπολογίστε την τάξη της κλάσης $3 \pmod{500}$.

B3.

(α) Ποια είναι η μέγιστη δυνατή τάξη μιας αντιστρέψιμης κλάσης ισοτιμίας $\pmod{500}$;

(β) Λύστε την πολυωνυμική ισοτιμία $x^{2026} + 1011x^{1013} + 1 \equiv 0 \pmod{1013}$.

B4. Λύστε την πολυωνυμική ισοτιμία $x^2 - x + 1 \equiv 0 \pmod{49}$.