

**Θεωρία Αριθμών**  
**Θέματα Εξετάσεων Ιουνίου 2019**

1. (15 μονάδες) Έστω  $d = \mu\kappa\delta(286, 528)$ .
  - (α) Υπολογίστε το  $d$ .
  - (β) Βρείτε  $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$  τέτοια ώστε  $d = 286x_0 + 528y_0$ .
  - (γ) Βρείτε όλα τα ζεύγη  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  με  $d = 286x + 528y$ .
  
2. (10 μονάδες) Βρείτε όλα τα ζεύγη  $(p, q)$  πρώτων αριθμών για τα οποία ισχύουν οι ισοτιμίες  $q^2 \equiv 1 \pmod{p}$  και  $p^2 \equiv 1 \pmod{q}$ ;
  
3. Δίνεται πρώτος αριθμός  $p$ .
  - (α) (10 μονάδες) Δείξτε ότι  $a^{(p-1)!+1} \equiv a \pmod{p}$  για κάθε  $a \in \mathbb{Z}$ .
  - (β) (5 μονάδες) Αληθεύει ότι  $a^7 \equiv a \pmod{4}$  για κάθε  $a \in \mathbb{Z}$ ;
  
4. (10 μονάδες) Βρείτε το μικρότερο θετικό ακέραιο  $x$  για τον οποίο το 4 διαιρεί το  $x$ , το 5 διαιρεί το  $x + 2$  και το 7 διαιρεί το  $x + 4$ .
  
5. (20 μονάδες)
  - (α) Βρείτε όλα τα  $x \in \mathbb{Z}$  για τα οποία  $x^2 - x + 9 \equiv 0 \pmod{7}$ .
  - (β) Δείξτε ότι δεν υπάρχουν  $x \in \mathbb{Z}$  τέτοια ώστε  $x^2 - x + 9 \equiv 0 \pmod{49}$ .
  
6. (20 μονάδες)
  - (α) Υπολογίστε την τάξη της κλάσης  $4 \pmod{25}$ .
  - (β) Βρείτε μια πρωταρχική ρίζα  $\pmod{25}$ .
  - (γ) Υπάρχει πρωταρχική ρίζα  $\pmod{24}$ ; Υπάρχει πρωταρχική ρίζα  $\pmod{23}$ ;
  
7. (10 μονάδες) Υπάρχει  $x \in \mathbb{Z}$  τέτοιο ώστε  $x^2 - 7x + 8 \equiv 0 \pmod{31}$ ;

**Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.**

Αθήνα 21/6/2019 – Διάρκεια εξέτασης 5/2 ώρες – Καλή Επιτυχία