532 Θεωρία Αριθμών
Εξετάσεις Ιανουαρίου 2026
Αθήνα 22/1/2026

Γράψτε το ονοματεπώνυμο και τον αριθμό μητρώου σας πάνω στα θέματα και παραδώστε τα μαζί με το γραπτό σας. Η εξέταση διαρκεί δύο ώρες και αποτελείται από δύο μέρη:

Μέρος Α - Πολλαπλή Επιλογή. Να απαντήσετε σε όλα τα ερωτήματα. Διαβάστε προσεκτικά την εκφώνηση κάθε ερωτήματος και επιλέξτε τη μοναδική σωστή απάντηση, αιτιολογώντας την απάντησή σας και δείχνοντας τα βήματα της λύσης, όπου χρειάζεται. **Απαντήσεις χωρίς καμία αιτιολόγηση δε θα βαθμολογούνται**. Γράφετε ευανάγνωστα ! Μέγιστη βαθμολογία για το πρώτο μέρος είναι οι 6 μονάδες.

Μπορείτε να θεωρήσετε γνωστό ότι ο αριθμός 1013 είναι πρώτος.

Α1. Ποιες τιμές μπορεί να λάβει το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός άρτιου ακεραίου με το 6;

(α) μόνο την τιμή 0 (β) μόνο τις τιμές 0, 1 και 2 (γ) μόνο τις τιμές 3, 4 και 5 (δ) μόνο τις τιμές 0, 2 και 4 (ε) μόνο τις τιμές 1, 3 και 5 (στ) μόνο τις τιμές 0, 1, 2, 3, 4 και 5

Α2. Για τον μικρότερο ακέραιο $a > 230$ για τον οποίο $\mu\kappa\delta(a, 100) = 10$ ισχύει ότι

(α) ο a δεν ορίζεται (β) $230 < a \leq 240$ (γ) $240 < a \leq 250$ (δ) $250 < a \leq 260$ (ε) $260 < a \leq 270$ (στ) $a > 270$

Α3. Αν x είναι ο μικρότερος φυσικός αριθμός για τον οποίο το $x^2 - 1$ διαιρείται με το 59, τότε

(α) $x < 30$ (β) $30 \leq x < 40$ (γ) $40 \leq x < 50$ (δ) $50 \leq x < 60$ (ε) $x \geq 60$ (στ) ο x δεν ορίζεται

Α4. Για ποια $c \in \mathbb{Z}$ η εξίσωση $2025x + 2026y = c$ έχει τουλάχιστον μία λύση $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$;

(α) για κανένα $c \in \mathbb{Z}$ (β) μόνο για τους άρτιους ακεραίους c (γ) μόνο για τους περιττούς ακεραίους c (δ) μόνο για $c \in \{0, 2025, 2026\}$ (ε) μόνο για τους μη αρνητικούς ακεραίους c (στ) για κάθε $c \in \mathbb{Z}$

Α5. Για πόσους ακεραίους a ισχύει η συνεπαγωγή $ax \equiv 0 \pmod{100} \Rightarrow x \equiv 0 \pmod{100}$;

(α) για κανέναν (β) μόνο για έναν (γ) μόνο για δύο (δ) για περισσότερους από δύο αλλά πεπερασμένου πλήθους (ε) για άπειρου πλήθους αλλά όχι για όλους (στ) για όλους τους ακεραίους

Α6. Για πόσους πρώτους αριθμούς p ισχύει η ισοτιμία $1 + 2^p + 3^p \equiv 0 \pmod{p}$;

(α) για κανέναν (β) μόνο για έναν (γ) μόνο για δύο (δ) μόνο για τρεις (ε) για περισσότερους από τρεις αλλά πεπερασμένου πλήθους (στ) για άπειρου πλήθους

Α7. Το πλήθος των $x \in \{1, 2, 3, \ldots, 240\}$ για τα οποία $15x \equiv 12 \pmod{23}$ είναι ίσο με

(α) 10 (β) 11 (γ) 12 (δ) 13 (ε) 14 (στ) 15

A8. Αν n είναι το άθροισμα των θετικών διαιρετών του 400, τότε το πλήθος των θετικών διαιρετών του n είναι ίσο με

(α) 2 (β) 3 (γ) 4 (δ) 6 (ε) 12 (στ) 24

A9. Το πλήθος των λύσεων $x \pmod 5$ της ισοτιμίας $x^5 + 2x^4 + 3x^3 + x^2 + x + 2 \equiv 0 \pmod 5$ είναι ίσο με

(α) μηδέν (β) 1 (γ) 2 (δ) 3 (ε) 4 (στ) 5

A10. Η μέγιστη δυνατή τάξη μιας αντιστρέψιμης κλάσης $\pmod{250}$ είναι ίση με

(α) 50 (β) 100 (γ) 120 (δ) 125 (ε) 200 (στ) 250

A11. Το πλήθος των λύσεων $x \pmod{2026}$ της ισοτιμίας $x^3 \equiv 1 \pmod{2026}$ είναι ίσο με

(α) μηδέν (β) 1 (γ) 2 (δ) 3 (ε) 6 (στ) 337

A12. Ποια από τα 2, 3 και 4 είναι πρωταρχικές ρίζες $\pmod{19}$;

(α) κανένα (β) μόνο το 2 (γ) μόνο το 3 (δ) μόνο το 4 (ε) μόνο τα 2 και 3 (στ) μόνο τα 3 και 4

Μέρος Β - Προβλήματα Ανάπτυξης. Διαβάστε προσεκτικά την εκφώνηση κάθε προβλήματος. Να απαντήσετε σε όλα τα ερωτήματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας και δείχνοντας όλα τα βήματα της λύσης. **Απαντήσεις χωρίς αιτιολόγηση, και πρόχειροι υπολογισμοί ή φλυαρίες που δεν οδηγούν σε σαφή απάντηση, δε θα βαθμολογούνται**. Γράφετε ευανάγνωστα ! Μέγιστη βαθμολογία για το δεύτερο μέρος είναι οι 4 μονάδες.

B1. Δείξτε ότι $\mu\kappa\delta(ab, c) \le \mu\kappa\delta(a, c)\mu\kappa\delta(b, c)$ για όλους τους θετικούς ακεραίους a, b, c.

B2. Υπολογίστε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $101^{103} + 103^{101}$ με το 13.

B3. Ένας θετικός ακέραιος έχει ακριβώς 45 θετικούς διαιρέτες. Ποια είναι τα δυνατά υπόλοιπα της διαίρεσης αυτού του ακεραίου με το 4;

B4. Λύστε την ισοτιμία $x^2 + 3x + 2 \equiv 0 \pmod{72}$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!