



ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Η κατανομή του Euler επί των
αυτοαντίστροφων στοιχείων της
υπεροκταεδρικής ομάδας

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
Μουστάκας Βασίλης - Διονύσης

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΧΡΗΣΤΟΣ Α. ΑΘΑΝΑΣΙΑΔΗΣ

Αθήνα
Ιούνιος 2017

Στον πρώτο μου δάσκαλο, μαθηματικό
Γιάννη Καρρά.

Περιεχόμενα

Πρόλογος	vii
1 Πολυώνυμα Euler για τη συμμετρική ομάδα	1
1.1 Η έννοια της καθόδου για μια μετάθεση	1
1.2 Η γ -μη αρνητικότητα των πολυωνύμων Euler	3
1.3 Αυτοαντίστροφα στοιχεία	8
1.4 Young ταμπλώ και αυτοαντίστροφες μεταθέσεις	10
1.5 Μερικές διατάξεις και (P, ω) -διαμερίσεις	15
2 Συμμετρικές συναρτήσεις	19
2.1 Ο δακτύλιος των συμμετρικών συναρτήσεων	19
2.2 Οι συναρτήσεις Schur	22
2.3 Η ταυτότητα Cauchy	26
2.4 Quasi-συμμετρικές συναρτήσεις	29
2.5 Σύνδεση με τη θεωρία αναπαραστάσεων της S_n	35
3 Πολυώνυμα Euler για την υπεροκταεδρική ομάδα	41
3.1 B-κάθοδοι και B-πολυώνυμα Euler	41
3.2 Προσημασμένα σύνολα και διμερή Young ταμπλώ	47
3.3 Προσημασμένες quasi-συμμετρικές συναρτήσεις	51
3.4 Σύνδεση με τη θεωρία αναπαραστάσεων της B_n	54
4 Η μονοτροπία των πολυωνύμων $I_n(x)$ και $I_n^B(x)$	57
4.1 Γεννήτριες συναρτήσεις των $I_n(x)$ και $I_n^B(x)$	57
4.2 Αναδρομικοί τύποι για τα $I_n(x)$ και $I_n^B(x)$	63
4.3 Η μονοτροπία των $I_n(x)$ και $I_n^B(x)$	66
4.4 Μη λογαριθμική κοιλότητα και γ -μη αρνητικότητα των $I_n(x)$ και $I_n^B(x)$	71
Βιβλιογραφία	75

Πρόλογος

Τα πολυώνυμα Euler ορίστηκαν από τον ίδιο τον Euler το 1775, για να μελετήσει προβλήματα σχετικά με εναλλάσσοντα αθροίσματα δυνάμεων αριθμών. Η μελέτη του συνόλου των καθόδων και του πλήθους των καθόδων μιας μετάθεσης ξεκίνησε από τον P. MacMahon το 1902. Η σύνδεση, όμως, μεταξύ των αριθμών Euler και των καθόδων μεταθέσεων έγινε το 1953 από τους Carlitz και Riordan. Από τότε τα πολυώνυμα Euler και ειδικότερα η κατανομή Euler έγινε αντικείμενο μελέτης για πολλούς γνωστούς μαθηματικούς.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η κατανομή του Euler επί των αυτοαντίστροφων μεταθέσεων (involutions). Πιο συγκεκριμένα, το 1980 ο Strehl [45] απέδειξε ότι η κατανομή του Euler επί των αυτοαντίστροφων στοιχείων είναι παλινδρομική και το 2006 οι Guo και Zeng [23] απέδειξαν ότι είναι μονότροπη. Στην παρούσα εργασία, χρησιμοποιώντας την μέθοδο των Guo-Zeng αποδεικνύουμε ότι η κατανομή του Euler επί των αυτοαντίστροφων στοιχείων της υπεροκταεδρικής ομάδας είναι μονότροπη (βλ. Θεώρημα 4.3.4). Μονότροπες ακολουθίες προκύπτουν συχνά στη συνδυαστική, τη γεωμετρία και την άλγεβρα και αποτελούν αντικείμενο εκτενούς μελέτης τα τελευταία χρόνια.

Χρησιμοποιώντας μεθόδους της θεωρίας των συμμετρικών και των quasi-συναρτήσεων συναρτήσεων υπολογίζουμε τη γεννήτρια συνάρτηση του πολυωνύμου Euler (στο πνεύμα των Gessel και Reutenauer [21]) και του B-πολυωνύμου Euler περιορισμένα στην κλάση των αυτοαντίστροφων στοιχείων της συμμετρικής και της υπεροκταεδρικής ομάδας αντίστοιχα. Σημαντικό ρόλο παίζει το ανάπτυγμα 3.6 που απέδειξαν πρόσφατα οι Adin et al. [3]. Επίσης, χρησιμοποιώντας κάποια στοιχεία θεωρίας αναπαραστάσεων αποδεικνύουμε δυο τύπους του Αθανασιάδη [5] που σχετίζουν τα παραπάνω πολυώνυμα με το πολυώνυμο Euler και το B-πολυώνυμο Euler αντίστοιχα, οι οποίοι έχουν ως πόρισμα την παλινδρομικότητα των πρώτων.

Τέλος, μελετώνται δυο ακόμη ιδιότητες, η λογαριθμική κοιλότητα και η γ -μη αρνητικότητα, οι οποίες είναι ισχυρότερες από την μονοτροπία. Απαντώντας αρνητικά σε μια εικασία του Brenti [16], οι Barnabei et al. [6] απέδειξαν, βρίσκοντας αντιπαράδειγμα, ότι η κατανομή του Euler επί των αυτοαντίστροφων μεταθέσεων δεν είναι εν γένει λογαριθμικά κοίλη. Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι ούτε η κατανομή του Euler επί των αυτοαντίστροφων στοιχείων της υπεροκταεδρικής ομάδας είναι πάντα λογαριθμικά κοίλη. Πιο ενδιαφέρονσα φαίνεται να είναι η ιδιότητα της γ -μη αρνητικότητας, η μελέτη της οποίας έχει προσελκύσει μεγάλο ενδιαφέρον τα τελευταία χρόνια [5, 11]. Τα πολυώνυμα Euler και τα B-πολυώνυμα Euler είναι γ -μη αρνητικά. Δεν γνωρίζουμε, όμως, αν οι περιορισμοί τους, στις κλάσεις των αυτοαντίστροφων στοιχείων της

συμμετρικής και της υπεροκταεδρικής ομάδας αντίστοιχα, είναι γ -μη αρνητικοί για κάθε θετικό ακέραιο n . Οι Guo-Zeng στο [23] διατύπωσαν την εικασία ότι το πολυώνυμο Euler περιορισμένο στην κλάση των αυτοαντίστροφων μεταθέσεων είναι γ -μη αρνητικό. Με κίνητρο την εικασία αυτή και την ομοιότητα που παρουσιάζει η συμπεριφορά της κατανομής Euler επί των αυτοαντίστροφων μεταθέσεων με αυτήν επί των αυτοαντίστροφων στοιχείων της υπεροκταεδρικής ομάδας, εικάζουμε ότι και το B -πολυώνυμο Euler περιορισμένο στην κλάση αυτή είναι γ -μη αρνητικό (βλ. Εικασία 4.4.5).

Το περιεχόμενο της παρούσας εργασίας δομείται σε τέσσερα κεφάλαια. Ειδικότερα, στο πρώτο κεφάλαιο εισάγεται η έννοια της καθόδου μιας μετάθεσης και των πολυωνύμων Euler, παρουσιάζεται η απόδειξη της γ -μη αρνητικότητας των πολυωνύμων Euler μέσω της δράσης Foata-Schützenberger-Strehl, μελετώνται οι αυτοαντίστροφες μεταθέσεις και η σύνδεση τους με τα Young ταμπλώ μέσω της αντιστοιχίας Robinson-Schensted και γίνεται μια σύντομη περιγραφή της θεωρίας των (P, ω) -διαμερίσεων του Stanley. Στο δεύτερο κεφάλαιο μελετώνται οι συμμετρικές και οι quasi-συμμετρικές συναρτήσεις, αποδεικνύεται η ταυτότητα Cauchy των συναρτήσεων Schur χρησιμοποιώντας την αντιστοιχία Robinson-Schensted-Knuth και περιγράφεται η σχέση των συμμετρικών συναρτήσεων με τους ανάγωγους χαρακτήρες της συμμετρικής ομάδας. Στο τρίτο κεφάλαιο εισάγεται η έννοια της B -καθόδου, του B -πολυωνύμου Euler, των προσημασμένων συνόλων, των διμερών Young ταμπλώ και των προσημασμένων quasi-συμμετρικών συναρτήσεων ακολουθώντας το [3], παρουσιάζεται η απόδειξη της γ -μη αρνητικότητας των B -πολυωνύμων Euler, μελετώνται τα αυτοαντίστροφα στοιχεία της υπεροκταεδρικής ομάδας και ένα B -ανάλογο της αντιστοιχίας Robinson-Schensted και περιγράφονται ορισμένα στοιχεία της θεωρίας αναπαραστάσεων της υπεροκταεδρικής ομάδας. Τέλος, στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τα κύρια αποτελέσματα της εργασίας τα οποία, όπως περιγράφηκαν παραπάνω, είναι ο υπολογισμός της γεννήτριας συνάρτησης για το B -πολυώνυμο Euler περιορισμένο στην κλάση των αυτοαντίστροφων στοιχείων της υπεροκταεδρικής ομάδας, ο υπολογισμός αναδρομικού τύπου για τους συνετελεστές του και η απόδειξη της μονοτροπίας του και της μη λογαριθμικής κοιλότητάς του.

Κλείνοντας τον πρόλογο, θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον Καθηγητή μου Χρήστο Αθανασιάδη, για την σημαντική του προσφορά, καθοδήγηση και υποστήριξη κατά την επίβλεψη της παρούσας εργασίας. Η διδασκαλία των μαθημάτων “Συνδυαστική Θεωρία” και “Θεωρία Αναπαραστάσεων” τα εαρινά εξάμηνα των ακαδημαϊκών ετών 2015-2016 και 2016-2017 και κυρίως η προσωπικότητά του, όπως μου φανερώθηκε, φώτισαν την αγάπη μου για τη συνδυαστική. Θα ήθελα, επίσης, να ευχαριστήσω τον Καθηγητή Παύλο Τζεργιά, για τις γνώσεις που μας μετέδωσε κατά τη διάρκεια των προπτυχιακών μου σπουδών στο Πανεπιστήμιο της Πάτρας και για τη συνεχή του καθοδήγηση μέχρι και σήμερα. Το μάθημα “Διακριτά Μαθηματικά” το οποίο δίδαξε το εαρινό εξάμηνο του ακαδημαϊκού έτους 2013-2014 ήταν καθοριστικό για την ενασχόλησή μου με τη συνδυαστική.

Βασίλης-Διονύσης Μουστάκας,
Ιούνιος 2017

Κεφάλαιο 1

Πολυώνυμα Euler για τη συμμετρική ομάδα

1.1 Η έννοια της καθόδου για μια μετάθεση

Για $n \in \mathbb{N}$ θα συμβολίζουμε με $[n]$ το σύνολο $\{1, 2, \dots, n\}$, όπου $[0] = \emptyset$ κατά σύμβαση και με \mathfrak{S}_n τη συμμετρική ομάδα των μεταθέσεων του $[n]$. Γενικότερα, με $\mathfrak{S}(S)$ συμβολίζουμε τη συμμετρική ομάδα των μεταθέσεων του συνόλου S .

Ορισμός 1.1.1. Έστω $w \in \mathfrak{S}_n$. Ο ακέραιος $i \in [n-1]$ ονομάζεται κάθοδος της μετάθεσης w αν $w(i) > w(i+1)$ και άνοδος διαφορετικά. Το σύνολο των καθόδων της w συμβολίζεται με $\text{Des}(w)$ και θέτουμε $\text{des}(w) = \#\text{Des}(w)$.

Για παράδειγμα, για $n = 9$ και $w = 372156489$ έχουμε $\text{Des}(w) = \{2, 3, 6\}$ και $\text{des}(w) = 3$. Το πολυώνυμο

$$A_n(x) = \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} x^{\text{des}(w)} = \sum_{k=0}^{n-1} A_{n,k} x^k$$

ονομάζεται n -οστό πολυώνυμο Euler, όπου $A_0(x) = 1$ κατά σύμβαση. Το $A_{n,k}$ είναι το πλήθος των μεταθέσεων της \mathfrak{S}_n με ακριβώς k καθόδους, για $0 \leq k \leq n-1$ και ονομάζεται αριθμός Euler. Συνήθως συμβολίζεται και ως $\left\langle n \atop k \right\rangle$. Το $A_n(x)$ είναι μονικό πολυώνυμο βαθμού $n-1$. Μερικές τιμές του $A_n(x)$ είναι οι εξής:

$$\begin{aligned} A_1(x) &= 1 \\ A_2(x) &= 1 + x \\ A_3(x) &= 1 + 4x + x^2 \\ A_4(x) &= 1 + 11x + 11x^2 + x^3 \\ A_5(x) &= 1 + 26x + 66x^2 + 26x^3 + x^4 \\ A_6(x) &= 1 + 57x + 302x^2 + 302x^3 + 57x^4 + x^5. \end{aligned}$$

Η συνάρτηση $\text{des} : \cup_{n \geq 1} \mathfrak{S}_n \rightarrow \mathbb{N}$ είναι παράδειγμα στατιστικής μεταθέσεων. Άλλες γνωστές στατιστικές μεταθέσεων είναι το πλήθος των αντιστροφών, το πλήθος των κύκλων μια μετάθεσης κ.ά. Για περισσότερες πληροφορίες για τις διάφορες στατιστικές μεταθέσεων παραπέμπουμε στα [1, 41]. Όταν απαριθμούμε

μεταθέσεις σύμφωνα με μια συγκεκριμένη στατιστική επάγεται μια κατανομή. Η κατανομή που επάγεται από τη στατιστική des ονομάζεται κατανομή του Euler.

Μια ακολουθία (a_0, a_1, \dots, a_n) πραγματικών αριθμών ονομάζεται παλινδρομική (ή συμμετρική¹) αν

$$a_k = a_{n-k}$$

για κάθε $0 \leq k \leq n$. Ένα πολυώνυμο $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ ονομάζεται παλινδρομικό αν

$$p(x) = x^n p\left(\frac{1}{x}\right),$$

για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Ο αριθμός $\frac{n}{2}$ ονομάζεται κέντρο συμμετρίας του $p(x)$. Αν το πολυώνυμο $p(x)$ είναι μη μηδενικό, τότε έχει μοναδικό κέντρο συμμετρίας.

Πρόταση 1.1.2. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το πολυώνυμο $A_n(x)$ είναι παλινδρομικό με κέντρο συμμετρίας $\frac{n-1}{2}$.

Απόδειξη. Η απεικόνιση $\phi : \mathfrak{S}_n \rightarrow \mathfrak{S}_n$ με

$$\phi(w(i)) = n + 1 - w(i)$$

για $i \in [n]$ και κάθε $w \in \mathfrak{S}_n$ είναι αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση από το σύνολο των μεταθέσεων της \mathfrak{S}_n με k καθόδους στο σύνολο εκείνων με k ανόδους, δηλαδή εκείνων με $n - 1 - k$ καθόδους. Με άλλα λόγια, $A_{n,k} = A_{n,n-1-k}$, για κάθε $0 \leq k \leq n - 1$ και έχουμε το ζητούμενο. \square

Η επόμενη πρόταση αποτελεί μια σημαντική ιδιότητα των πολυωνύμων Euler, η οποία ήταν γνωστή στον ίδιο τον Euler. Για μια αλγεβρική απόδειξη παραπέμπουμε στο [41, Πρόταση 1.4.4] και για μια συνδυαστική στο [1, Πρόταση 2.2.4].

Πρόταση 1.1.3. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\sum_{m \geq 0} (m+1)^n x^m = \frac{A_n(x)}{(1-x)^{n+1}}.$$

Τα πολυώνυμα Euler έχουν μελετηθεί από πολλούς γνωστούς μαθηματικούς στο παρελθόν, ενδεικτικά αναφέρουμε τους Euler, P. MacMahon, L. Carlitz, J. Riordan, D. Foata και P. Schützenberger. Στην επόμενη πρόταση συγκεντρώνουμε διάφορες ιδιότητες των πολυωνύμων Euler, τις αποδείξεις των οποίων, μπορεί να βρει ο αναγνώστης στα [10, Κεφάλαιο 1], [33, Κεφάλαιο 1] και [22, Παράγραφος 6.2].

Πρόταση 1.1.4. Ισχύουν τα εξής:

(α) Για κάθε $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ και κάθε $0 \leq k \leq n - 1$

$$A_{n,k} = (n - k)A_{n-1,k-1} + (k + 1)A_{n-1,k}.$$

¹θα χρησιμοποιούμε τον όρο παλινδρομική, διότι στο κεφάλαιο 2 θα μελετήσουμε τις λεγόμενες συμμετρικές συναρτήσεις

(β) (Εκθετική γεννήτρια συνάρτηση)

$$\sum_{n \geq 0} A_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{1-x}{1-xe^{(1-x)t}}.$$

(γ) (Ταυτότητα Woritzky) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$x^n = \sum_{k=0}^{n-1} A_{n,k} \binom{x+k}{n}$$

στο $\mathbb{C}[x]$.

(δ) (Ταυτότητα τύπου Frobenius) Για κάθε $n \in \mathbb{Z}_{>0}$

$$A_n(x) = \sum_{k=1}^n k! S(n, k) (x-1)^{n-k}$$

όπου $S(n, k)$ είναι το πλήθος των διαμερίσεων του $[n]$ με k μέρη και ονομάζεται αριθμός Stirling δεύτερου είδους.

(ε) Για κάθε $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ και $0 \leq k \leq n-1$

$$A_{n,k} = \sum_{i=0}^k (-1)^i (k+1-i)^n \binom{n+1}{i}.$$

1.2 Η γ -μη αρνητικότητα των πολυωνύμων Euler

Μια ακολουθία (a_0, a_1, \dots, a_n) θετικών πραγματικών αριθμών ονομάζεται μονότροπη (unimodal) αν υπάρχει δείκτης $0 \leq k \leq n$ τέτοιος ώστε

$$a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_k \geq a_{k+1} \geq \dots \geq a_n.$$

Ένα πολυώνυμο $p(x) = p_0 + p_1x + \dots + p_nx^n \in \mathbb{R}_{>0}[x]$ ονομάζεται μονότροπο αν η ακολουθία $(p_k)_{k=0}^n$ των συντελεστών του είναι μονότροπη. Αν $p(x)$ είναι παλινδρομικό πολυώνυμο με κέντρο συμμετρίας $\frac{n}{2}$, τότε η μονοτροπία του θα σήμαινε ότι

$$p_0 \leq p_1 \leq \dots \leq p_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

Η ακολουθία των διωνυμικών συντελεστών $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$, δηλαδή η n -οστή γραμμή του τριγώνου του Pascal αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα μονότροπης ακολουθίας. Επίσης, μπορεί να δείξει κανείς ότι ακολουθία των αριθμών Euler είναι μονότροπη. Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε ότι είναι και παλινδρομική. Θα εισάγουμε την έννοια της γ -μη αρνητικότητας, η οποία είναι ισχυρότερη της μονοτροπίας και θα δείξουμε ότι τα πολυώνυμα Euler $A_n(x)$ είναι γ -μη αρνητικά πολυώνυμα.

Ο γραμμικός χώρος των πολυωνύμων $p(x) = p_0 + p_1x + \dots + p_nx^n \in \mathbb{R}[x]$ τα οποία είναι παλινδρομικά με κέντρο συμμετρίας $\frac{n}{2}$ έχει βάση

$$\mathcal{B}_n = \{x^j(1+x)^{n-2j} : 0 \leq j \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}.$$

Αν

$$p(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \gamma_{n,j} x^j (1+x)^{n-2j},$$

τότε το $(\gamma_{n,j})_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ ονομάζεται γ -διάνυσμα του p . Επειδή η ακολουθία των διωνυμικών συντελεστών είναι μονότροπη, έπεται ότι αν ένα πολυώνυμο έχει μη αρνητικό γ -διάνυσμα, τότε θα είναι μονότροπο. Αν το γ -διάνυσμα ενός πολυωνύμου είναι μη αρνητικό, τότε λέμε ότι το πολυώνυμο είναι γ -μη αρνητικό. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} A_1(x) &= 1 \\ A_2(x) &= 1 + x \\ A_3(x) &= (1+x)^2 + 2x \\ A_4(x) &= (1+x)^3 + 8x(1+x) \\ A_5(x) &= (1+x)^4 + 22x(1+x)^2 + 16x^2 \\ A_6(x) &= (1+x)^5 + 52x(1+x)^3 + 136x^2(1+x). \end{aligned}$$

Όπως επιβεβαιώνεται από τον παραπάνω υπολογισμό για $n \leq 6$, τα πολυώνυμα Euler είναι γ -μη αρνητικά. Πρώτοι το απέδειξαν οι D. Foata και M. Schützenberger [17] με αλγεβρικές μεθόδους το 1970 και μερικά χρόνια αργότερα, οι D. Foata και V. Strehl [18] εισήγαγαν μια “φυσική” δράση της \mathbb{Z}_2^n στο σύνολο των μεταθέσεων της \mathfrak{S}_n με χρήση της οποίας μπορεί να αποδείξει κανείς την γ -μη αρνητικότητα. Η απόδειξη που θα δώσουμε βρίσκεται στο [11].

Για $w = w_1 w_2 \cdots w_n \in \mathfrak{S}_n$, θέτουμε $w_0 = w_{n+1} = n+1$. Αν $1 \leq k \leq n$, τότε το w_k ονομάζεται

- διπλή κάθοδος της w (αντ. διπλή άνοδος) αν $w_{k-1} > w_k > w_{k+1}$ (αντ. $w_{k-1} < w_k < w_{k+1}$),
- κορυφή της w (αντ. κοιλάδα) αν $w_{k-1} < w_k > w_{k+1}$ (αντ. $w_{k-1} > w_k < w_{k+1}$).

Πρόταση 1.2.1 (Foata-Schützenberger [17]). Για κάθε $n \geq 1$

$$A_n(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \gamma_{n,j} x^j (1+x)^{n-1-2j} \quad (1.1)$$

όπου $\gamma_{n,j}$ είναι το πλήθος των $w \in \mathfrak{S}_n$ οι οποίες δεν έχουν διπλές καθόδους και $\text{des}(w) = j$.

Απόδειξη. Η βασική ιδέα της απόδειξης είναι να ορίσουμε μια “φυσική” δράση της \mathbb{Z}_2^n στο σύνολο των μεταθέσεων \mathfrak{S}_n και στη συνέχεια να μελετήσουμε τις καθόδους των στοιχείων κάθε τροχιάς αυτής της δράσης.

Έστω $x \in [n]$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $\phi_x : \mathfrak{S}_n \rightarrow \mathfrak{S}_n$ ως εξής, για $w = w_1 w_2 \cdots w_n \in \mathfrak{S}_n$

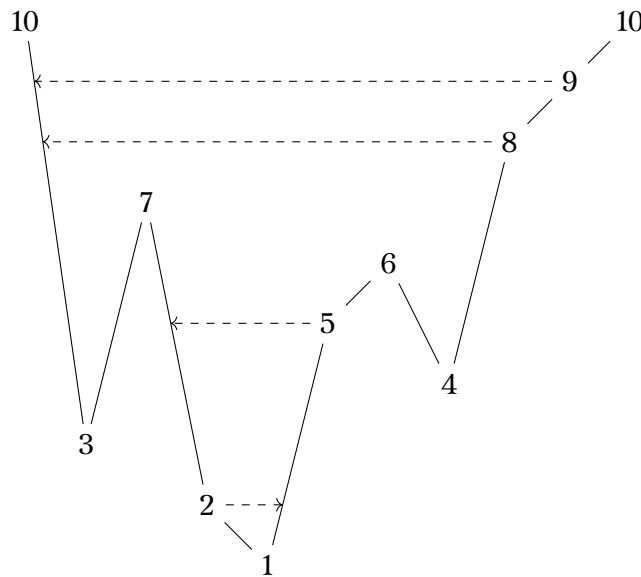
- (α) αν x είναι διπλή κάθοδος της w , τότε $\phi_x(w)$ είναι η μετάθεση της \mathfrak{S}_n που προκύπτει από την w , τοποθετώντας το x μεταξύ των w_k και w_{k+1} όπου $k = \min\{x < j \leq n : w_j < x < w_{j+1}\}$,

(β) αν x είναι διπλή άνοδος της w , τότε $\phi_x(w)$ είναι η μετάθεση της \mathfrak{S}_n που προκύπτει από την w , τοποθετώντας το x μεταξύ των w_l και w_{l+1} όπου $l = \max\{0 \leq j < x : w_j > x > w_{j+1}\}$ και

(γ) αν x είναι κορυφή ή κοιλάδα της w , τότε $\phi_x(w) = w$.

Υπάρχει μια γεωμετρική ερμηνεία των παραπάνω συναρτήσεων, η οποία δόθηκε το 1983 από τους L. Shapiro, W.J. Woan, and S. Getu [37]. Έστω $w = w_1 w_2 \dots w_n \in \mathfrak{S}_n$ και ας θεωρήσουμε μπάλες στα σημεία $(i, w_i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ για $0 \leq i \leq n+1$. Για κάθε $0 \leq i \leq n$ ενώνουμε τις μπάλες που βρίσκονται στα σημεία (i, w_i) και $(i+1, w_{i+1})$ με σύρμα. Υποθέτουμε ότι η βαρύτητα δρα στις μπάλες και ότι το x δεν είναι σημείο ισορροπίας (που θα αντιστοιχούσε σε κορυφή ή κοιλάδα της w). Αν αφήσουμε το x να κυλήσει, θα σταματήσει όταν φτάσει ξανά στο ίδιο ύψος διασχίζοντας τις "κοιλιάδες" αριστερά ή δεξιά ανάλογα με το αν είναι διπλή άνοδος ή διπλή κάθοδος της w αντίστοιχα. Η μετάθεση που προκύπτει είναι η $\phi_x(w)$.

Για παράδειγμα για $n = 9$ και $w = 372156489$ έχουμε τρεις κοιλάδες, δύο κορυφές, μια διπλή κάθοδο και τρεις διπλές ανόδους. Οπότε, έχουμε $\phi_i(w) = w$, για $i \in \{1, 3, 4, 6, 7\}$ και $\phi_2(w) = 371256489$, $\phi_5(w) = 375216489$, $\phi_8(w) = 837215649$ και $\phi_9(w) = 9372156348$.



Σχήμα 1.1: Η γραφική παράσταση της w . Οι διακεκομμένες γραμμές δηλώνουν τον προορισμό των διπλών καθόδων και των διπλών ανόδων της w .

Οι συναρτήσεις ϕ_x μετατίθενται μεταξύ τους, δηλαδή

$$\phi_x \circ \phi_y = \phi_y \circ \phi_x \quad (1.2)$$

για $x, y \in [n]$ και είναι αυτοαντίτροφες, δηλαδή

$$\phi_x \circ \phi_x = I_{\mathfrak{S}_n} \quad (1.3)$$

για $\chi \in [n]$. Έτσι για κάθε $S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\} \subseteq [n]$ ορίζουμε τη συνάρτηση $\phi_S : \mathfrak{S}_n \rightarrow \mathfrak{S}_n$ με

$$\phi_S(w) = \phi_{s_1} \circ \phi_{s_2} \circ \dots \circ \phi_{s_k}(w)$$

για $w \in \mathfrak{S}_n$. Η απεικόνιση $\phi : \mathbb{Z}_2^n \rightarrow \mathfrak{S}(\mathfrak{S}_n)$ με $S \mapsto \phi_S$ είναι ομομορφισμός ομάδων και γι αυτό ορίζεται μια δράση της \mathbb{Z}_2^n στο \mathfrak{S}_n αν θέσουμε

$$S \cdot w = \phi_S(w)$$

για κάθε $S \subseteq [n]$ και $w \in \mathfrak{S}_n$. Η δράση αυτή συνήθως ονομάζεται δράση Foata-Schützenberger-Strehl. Έστω $\text{Orb}(w) = \{\phi_S(w) : S \subseteq [n]\}$ η τροχιά μιας μετάθεσης $w \in \mathfrak{S}_n$ μέσω της παραπάνω δράσης. Μπορούμε να διαλέξουμε έναν “κανονικό” αντιπρόσωπο της τροχιάς $\text{Orb}(w)$ ο οποίος δε θα έχει καθόλου διπλές καθόδους, έστω \hat{w} . Πιο συγκεκριμένα, αν οι διπλές κάθοδοι της w είναι οι x_1, x_2, \dots, x_k τότε $\hat{w} = \phi_{x_1} \circ \phi_{x_2} \circ \dots \circ \phi_{x_k}$. Αν συμβολίζουμε με $\text{pk}(w)$ το πλήθος των κορυφών της w , τότε είναι προφανές ότι $\text{des}(\hat{w}) = \text{pk}(w)$. Επίσης, παρατηρούμε ότι

$$\sum_{\tau \in \text{Orb}(w)} \chi^{\text{des}(\tau)} = \chi^{\text{des}(\hat{w})} (1 + \chi)^{n-1-2\text{des}(\hat{w})} = \chi^{\text{pk}(w)} (1 + \chi)^{n-1-2\text{pk}(w)}. \quad (1.4)$$

Πράγματι, αν χ είναι διπλή άνοδος της w , τότε $\text{des}(\phi_\chi(w)) = \text{des}(w) + 1$ και γι αυτό

$$\sum_{\tau \in \text{Orb}(w)} \chi^{\text{des}(\tau)} = \chi^{\text{des}(\hat{w})} (1 + \chi)^\alpha,$$

όπου α είναι το πλήθος των διπλών ανόδων της \hat{w} . Όμως, αν η w έχει m κορυφές, τότε έχει $m + 1$ κοιλάδες και $n - 1 - 2m$ το πλήθος διπλές ανόδους ή διπλές καθόδους. Από τον ορισμό της \hat{w} έπεται ότι

$$\alpha = n - 1 - 2\text{des}(\hat{w})$$

και έτσι προκύπτει η (1.4). Τέλος, οι αντιπρόσωποι των τροχιών της παραπάνω δράσης είναι ακριβώς εκείνες οι μεταθέσεις της \mathfrak{S}_n με $\text{des}(w) = \text{pk}(w)$ και γι αυτό αθροίζοντας πάνω σε όλες αυτές προκύπτει ότι

$$A_n(\chi) = \sum_{\substack{w \in \mathfrak{S}_n \\ \text{pk}(w) = \text{des}(w)}} \chi^{\text{pk}(w)} (1 + \chi)^{n-1-2\text{pk}(w)} = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \gamma_{n,j} \chi^j (1 + \chi)^{n-1-2j},$$

όπου

$$\gamma_{n,j} = 2^{-n+1+2j} \#\{w \in \mathfrak{S}_n : \text{pk}(w) = j\}.$$

□

Μια μετάθεση $w \in \mathfrak{S}_n$ ονομάζεται εναλλάσσουσα (αντ. αντιστρόφως εναλλάσσουσα) αν ισχύει $\text{Des}(w) = \{1, 3, 5, \dots\} \cap [n-1]$ (αντ. $\text{Des}(w) = \{2, 4, 6, \dots\} \cap [n-1]$) ή ισοδύναμα αν

$$w(1) > w(2) < w(3) > \dots \quad (\text{αντ. } w(1) < w(2) > w(3) < \dots).$$

Συμβολίζουμε με E_n το πλήθος των εναλλασσουσών μεταθέσεων $w \in \mathfrak{S}_n$. Η αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία της Πρότασης 1.1.2 μας πληροφορεί ότι το πλήθος

των αντιστρόφως εναλλασσουσών μεταθέσεων είναι και αυτό ίσο με E_n . Οι αριθμοί E_n ονομάζονται και αυτοί αριθμοί Euler. Η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $(E_n)_{n=0}^{\infty}$, όπου $E_0 = 1$ κατά σύμβαση, είναι γνωστή (βλ. [4] και [1, Πρόταση 2.2.7])

$$\sum_{n \geq 0} E_n \frac{x^n}{n!} = \tan(x) + \sec(x),$$

όπου $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots$ και $\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \dots$. Η επόμενη πρόταση συνδέει την γ -μη αρνητικότητα των πολυωνύμων Euler με τις εναλλάσσουσες μεταθέσεις και τους αριθμούς Euler.

Πόρισμα 1.2.2. Για $n \geq 1$ ισχύει

$$A_n(-1) = \begin{cases} 0, & n \equiv 0 \pmod{2} \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}} E_n, & n \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases}$$

Απόδειξη. Αν ο n είναι άρτιος, τότε από τη Πρόταση 1.1.2 έπεται ότι

$$A_n(-1) = -A_{n,0} + A_{n,1} - A_{n,2} + \dots + A_{n,n-1} = 0.$$

Αν ο n είναι περιττός, τότε από τη Πρόταση 1.2.1 έπεται ότι

$$(-1)A_n(-1) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \gamma_{n, \frac{n-1}{2}}$$

ή ισοδύναμα

$$A_n(-1) = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \gamma_{n, \frac{n-1}{2}}.$$

Όμως, $\gamma_{n, \frac{n-1}{2}}$ είναι ακριβώς το πλήθος των μεταθέσεων $w \in \mathfrak{S}_n$ με

$$w(1) < w(2) > w(3) < \dots$$

που είναι ίσο με το E_n . □

Εκτός από τη μονοτροπία που έπεται από τη γ -μη αρνητικότητα υπάρχουν δύο ακόμα σχετικές έννοιες. Μια ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών (a_0, a_1, \dots, a_n) ονομάζεται λογαριθμικά κοίλη (log-concave) αν

$$a_{k-1}a_{k+1} \leq a_k^2$$

για κάθε $1 \leq k \leq n-1$ και λέμε ότι έχει πραγματικές ρίζες, αν το πολώνυμο $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in \mathbb{R}[x]$ έχει μόνο πραγματικές ρίζες. Εύκολα παρατηρεί κανείς ότι αν μια ακολουθία είναι λογαριθμικά κοίλη, τότε είναι και μονότροπη. Επίσης, αποδεικνύεται ότι αν μια ακολουθία έχει πραγματικές ρίζες, τότε είναι λογαριθμικά κοίλη. Το διωνυμικό θεώρημα μας πληροφορεί ότι η ακολουθία των διωνυμικών συντελεστών έχει πραγματικές ρίζες. Η ακολουθία των αριθμών Euler $(A_{n,k})_{k=0}^{n-1}$ είναι λογαριθμικά κοίλη και έχει πραγματικές ρίζες. Για την απόδειξη του προηγούμενου ισχυρισμού παραπέμπουμε στο [10, Θεώρημα 1.34]. Πολλές ενδιαφέρουσες ακολουθίες στη συνδυαστική, τη γεωμετρία και την άλγεβρα έχουν τις παραπάνω ιδιότητες. Για περισσότερες πληροφορίες παραπέμπουμε στα [40, 12, 11].

1.3 Αυτοαντίστροφα στοιχεία

Μια μετάθεση $w \in \mathfrak{S}_n$ ονομάζεται αυτοαντίστροφη αν $w^2 = \epsilon$, όπου ϵ είναι η ταυτοτική μετάθεση. Μια αυτοαντίστροφη μετάθεση έχει μόνο κύκλους μήκους 1 ή 2 στην κυκλική της μορφή και το αντίστροφο. Συμβολίζουμε με I_n το σύνολο των αυτοαντίστροφων μεταθέσεων. Για $n \geq 1$ θεωρούμε το πολυώνυμο Euler περιορισμένο στην κλάση των αυτοαντίστροφων μεταθέσεων

$$I_n(x) = \sum_{w \in I_n} x^{\text{des}(w)}.$$

Μερικές τιμές του είναι οι εξής:

$$I_1(x) = 1$$

$$I_2(x) = 1 + x$$

$$I_3(x) = 1 + 2x + x^2$$

$$I_4(x) = 1 + 4x + 4x^2 + x^3$$

$$I_5(x) = 1 + 6x + 12x^2 + 6x^3 + x^4$$

$$I_6(x) = 1 + 9x + 28x^2 + 28x^3 + 9x^4 + x^5.$$

Το πολυώνυμο $I_n(x)$ είναι παλινδρομικό στο $n - 1$, όπως επιβεβαιώνει ο παραπάνω υπολογισμός για $n \geq 6$. Αυτό αποδείχτηκε για πρώτη φορά από τον V. Strehl [45], ο οποίος μελέτησε την κλάση των αυτοαντίστροφων μεταθέσεων σύμφωνα με το πλήθος των καθόδων τους μέσω των Young ταμπλώ. Την απόδειξη αυτή θα παρουσιάσουμε στην επόμενη παράγραφο. Από τον παραπάνω υπολογισμό, εκτός από παλινδρομικό, το πολυώνυμο $I_n(x)$ φαίνεται να είναι και μονότροπο. Αυτό αποδείχτηκε πρόσφατα από τους V. Guo και J. Zeng [23], ενώ κάποια μερικά αποτελέσματα είχαν επιτευχθεί από τον W. Dukes [16]. Την απόδειξη των Guo-Zeng θα παρουσιάσουμε στο κεφάλαιο 4.

Στην επόμενη πρόταση υπολογίζουμε την εκθετική γεννήτρια συνάρτηση του πλήθους των αυτοαντίστροφων μεταθέσεων. Πριν από αυτό όμως θυμίζουμε τον εκθετικό τύπο (βλ. [1, Θεώρημα 3.2.2]). Για συνάρτηση $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ με $f(0) = 0$, ορίζουμε τη συνάρτηση $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ θέτοντας $h(0) = 1$ και

$$h(\#X) = \sum_{\pi \in \Pi(X)} f(\#B_1) \cdots f(\#B_k)$$

για κάθε μη κενό πεπερασμένο σύνολο X , όπου στο άθροισμα του δεξιού μέλους, $\Pi(X)$ είναι το σύνολο των διαμερίσεων $\pi = \{B_1, \dots, B_k\}$ του X . Αν

$$E_h(x) = \sum_{n \geq 0} h(n) \frac{x^n}{n!} \quad \text{και} \quad E_f(x) = \sum_{n \geq 0} f(n) \frac{x^n}{n!}$$

είναι οι εκθετικές γεννήτριες συναρτήσεις των f και h αντίστοιχα, τότε ο εκθετικός τύπος μας πληροφορεί ότι

$$E_h(x) = \exp(E_f(x)).$$

Πρόταση 1.3.1. Έστω $a_n = \#I_n$, για $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ και $a_0 = 1$. Τότε

$$\sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!} = e^{x + \frac{x^2}{2}}. \quad (1.5)$$

Απόδειξη. Επειδή μια μετάθεση $w \in \mathfrak{S}_n$ είναι αυτοαντίστροφη αν και μόνο αν κάθε κύκλος στην κυκλική της μορφή έχει μήκος ένα ή δύο, έπεται ότι το a_n απαριθμεί το πλήθος των διαμερίσεων του $[n]$ σε μέρη που έχουν ένα ή δύο στοιχεία. Οπότε, αν θέσουμε $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ με $h(n) = a_n$ για $n \in \mathbb{N}$ και $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ με

$$f(n) = \begin{cases} 1, & n \in \{1, 2\} \\ 0, & n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\} \end{cases}$$

έχουμε

$$h(n) = \sum_{\pi \in \Pi_n} f(\#B_1) \cdots f(\#B_k)$$

όπου Π_n είναι το σύνολο $\Pi([n])$. Επομένως, από τον εκθετικό τύπο έπεται ότι

$$\sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!} = E_h(x) = \exp(E_f(x)) = \exp\left(\sum_{n \geq 0} f(n) \frac{x^n}{n!}\right) = e^{x + \frac{x^2}{2}}.$$

□

Πόρισμα 1.3.2. Έστω $a_n = \#I_n$, για $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ και $a_0 = 1$. Τότε

(α) Για $n \geq 1$

$$a_{n+1} = a_n + na_{n-1}.$$

(β) Για $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \frac{(2k)!}{2^k k!}.$$

Απόδειξη. (α) Παραγωγίζοντας την (1.5) ως προς x έχουμε

$$\sum_{n \geq 0} a_{n+1} \frac{x^n}{n!} = (1+x)e^{x + \frac{x^2}{2}} = (1+x) \sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!}.$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές του x^n στα ακραία μέλη της προηγούμενης σχέσης προκύπτει ο ζητούμενος αναδρομικός τύπος.

(β) Αναπτύσσουμε την τυπική δυναμοσειρά $e^{x + \frac{x^2}{2}}$ ως εξής

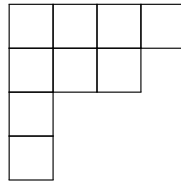
$$\begin{aligned} e^{x + \frac{x^2}{2}} &= e^x e^{\frac{x^2}{2}} \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} \cdot \sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n}}{2^n n!} \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{1}{2^k k! (n-2k)!} x^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \frac{(2k)!}{2^k k!} \frac{x^n}{n!}. \end{aligned}$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές του x^n στην (1.5) χρησιμοποιώντας τον παραπάνω υπολογισμό προκύπτει ο ζητούμενος τύπος. □

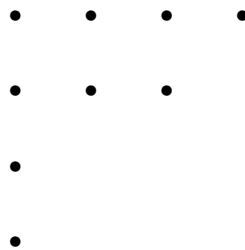
1.4 Young ταμπλώ και αυτοαντίστροφες μεταθέσεις

Διαμέριση λ ενός ακεραίου $n \geq 1$ ονομάζεται μια ακολουθία $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ με $\lambda_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ για $1 \leq i \leq k$ ώστε $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k$ και $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = n$. Οι ακέραιοι λ_i ονομάζονται μέρη της λ και γράφουμε $\lambda \vdash n$ ή $|\lambda| = n$.

Για κάθε διαμέριση λ έχουμε ένα διάγραμμα Young Y_λ , το οποίο έχει n μοναδιαία τετράγωνα παρατεταγμένα σε k σειρές ώστε η i -οστή σειρά να περιέχει λ_i το πλήθος τετράγωνα, όπως στο σχήμα



Αν αντί για τετράγωνα χρησιμοποιούσαμε τελείες το διάγραμμα που προκύπτει ονομάζεται διάγραμμα Ferrers. Το πλεονέκτημα των διαγραμμάτων Young έναντι των διαγραμμάτων Ferrers είναι ότι τα διαγράμματα Young μπορούμε να τα συμπληρώσουμε με αριθμούς. Για παράδειγμα, το διάγραμμα Ferrers της διαμέρισης $(4, 3, 1, 1)$ είναι



Ορισμός 1.4.1. Έστω $\lambda \vdash n$. Σύνηθες Young ταμπλώ (standard Young tableaux) σχήματος λ ονομάζεται μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία των τετραγώνων του Y_λ με το $[n]$ ώστε

- (α) οι ακέραιοι που αντιστοιχούν στα τετράγωνα οποιασδήποτε γραμμής του Y_λ αυξάνουν προς τα δεξιά και
- (β) οι ακέραιοι που αντιστοιχούν στα τετράγωνα οποιασδήποτε στήλης του Y_λ αυξάνουν προς τα κάτω.

Συμβολίζουμε με $\text{SYT}(\lambda)$ το σύνολο των Young ταμπλώ σχήματος λ και με f^λ το πλήθος αυτών.

Υπάρχουν διάφοροι τύποι που υπολογίζουν το πλήθος f^λ των Young ταμπλώ σχήματος λ . Στη παρούσα εργασία θα μας απασχολήσει μόνο η σχέση που έχει

το f^λ με το $\#I_n$. Για περισσότερες πληροφορίες παραπέμπουμε τον αναγνώστη στα [1, 35, 19].

Ένα σημαντικό γεγονός για τα Young ταμπλώ είναι το θεώρημα Robinson-Schensted το οποίο κατασκευάζει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία

$$\mathfrak{S}_n \rightarrow \bigcup_{\lambda \vdash n} \text{SYT}(\lambda) \times \text{SYT}(\lambda)$$

η οποία σε κάθε μετάθεση $w = w_1 w_2 \dots w_n \in \mathfrak{S}_n$ αντιστοιχίζει ένα ζεύγος Young ταμπλώ $(P(w), Q(w))$ ίδιου σχήματος. Για να ορίσουμε την αντιστοιχία αυτή, θα χρειαστεί να περιγράψουμε πρώτα τον αλγόριθμο της εισαγωγής ενός ακεραίου σε ένα ταμπλώ.

Έστω T ένα Young ταμπλώ του οποίου τα στοιχεία είναι θετικοί ακέραιοι (όχι απαραίτητα οι $1, 2, \dots, n$) και $x \in \mathbb{Z}_{>0}$ το οποίο δεν είναι στοιχείο του T . Το ταμπλώ $T \leftarrow x$ κατασκευάζεται με εισαγωγή του x στις γραμμές του T ως εξής. Αν το x είναι μεγαλύτερο από όλα τα στοιχεία της πρώτης γραμμής του T , τότε προστίθεται ένα τετράγωνο στο τέλος αυτής της γραμμής που περιέχει το x . Διαφορετικά θεωρούμε το πρώτο από αριστερά τετράγωνο της πρώτης γραμμής του T που περιέχει στοιχείο $x' > x$. Το x αντικαθιστά το x' στη τετράγωνο αυτό και η διαδικασία συνεχίζεται με το x' και τη δεύτερη γραμμή του T . Αν αυτή είναι κενή, τότε το x' καταλαμβάνει το πρώτο τετράγωνο από αριστερά το οποίο προστίθεται στο σχήμα. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται εισαγωγή του x στις γραμμές του T (row insertion).

Ορισμός 1.4.2. Έστω μετάθεση $w = w_1 w_2 \dots w_n \in \mathfrak{S}_n$. Το Young ταμπλώ

$$P(w) = (\dots((\emptyset \leftarrow w_1) \leftarrow w_2) \leftarrow \dots) \leftarrow w_n$$

ονομάζεται P -ταμπλώ (ή ταμπλώ εισαγωγής) της w . Το Q -ταμπλώ (ή ταμπλώ καταγραφής) της w ορίζεται ως το Young ταμπλώ $Q(w)$ ίδιου σχήματος με το $P(w)$, στο οποίο για $1 \leq i \leq n$ το i καταλαμβάνει το τετράγωνο στο οποίο καταλήγει η εισαγωγή του w_i στο i -οστό βήμα της κατασκευής του $P(w)$.

Για παράδειγμα, αν $w = 31524$, τότε ο επόμενος πίνακας καταγράφει τα βήματα κατασκευής του P και Q -ταμπλώ της w .

Στοιχείο εισαγωγής	P -ταμπλώ	Q -ταμπλώ										
3	<table border="1"><tr><td>3</td></tr></table>	3	<table border="1"><tr><td>1</td></tr></table>	1								
3												
1												
1	<table border="1"><tr><td>1</td></tr><tr><td>3</td></tr></table>	1	3	<table border="1"><tr><td>1</td></tr><tr><td>2</td></tr></table>	1	2						
1												
3												
1												
2												
5	<table border="1"><tr><td>1</td><td>5</td></tr><tr><td>3</td></tr></table>	1	5	3	<table border="1"><tr><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td></tr></table>	1	3	2				
1	5											
3												
1	3											
2												
2	<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>3</td><td>5</td></tr></table>	1	2	3	5	<table border="1"><tr><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td></tr></table>	1	3	2	4		
1	2											
3	5											
1	3											
2	4											
4	<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>3</td><td>5</td></tr></table>	1	2	4	3	5	<table border="1"><tr><td>1</td><td>3</td><td>5</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td></tr></table>	1	3	5	2	4
1	2	4										
3	5											
1	3	5										
2	4											

Θεώρημα 1.4.3 (Αντιστοιχία RS). *Η απεικόνιση*

$$w \mapsto (P(w), Q(w))$$

είναι αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία από το σύνολο των μεταθέσεων της \mathfrak{S}_n στο σύνολο των ζευγών (P, Q) Young ταμπλώ ίδιου σχήματος.

Για την απόδειξη του Θεωρήματος αυτού παραπέμπουμε στο [1, Θεώρημα 4.2.1]. Ένα άμεσο πόρισμα της αντιστοιχίας Robinson-Schensted για το πλήθος των Young ταμπλώ είναι το εξής

$$\sum_{\lambda \vdash n} (f^\lambda)^2 = n!. \tag{1.6}$$

Από τη θεωρία αναπαραστάσεων πεπερασμένων ομάδων, γνωρίζουμε ότι η τάξη μιας πεπερασμένης ομάδας ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των διαστάσεων των ανάγωγων αναπαραστάσεών της. Ο τύπος (1.6) εκφράζει αυτή ακριβώς την πληροφορία για τη συμμετρική ομάδα. Στην παράγραφο 2.5 θα δώσουμε περισσότερες λεπτομέρειες για το γεγονός αυτό.

Στο τρέχον παράδειγμα, έχουμε $w^{-1} = 24153$. Ο επόμενος πίνακας καταγράφει τα βήματα κατασκευής του P και Q-ταμπλώ της w^{-1} .

Στοιχείο εισαγωγής	P-ταμπλώ	Q-ταμπλώ												
2	<table border="1"><tr><td>2</td></tr></table>	2	<table border="1"><tr><td>1</td></tr></table>	1										
2														
1														
4	<table border="1"><tr><td>2</td><td>4</td></tr></table>	2	4	<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td></tr></table>	1	2								
2	4													
1	2													
1	<table border="1"><tr><td>1</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td></td></tr></table>	1	4	2		<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>3</td><td></td></tr></table>	1	2	3					
1	4													
2														
1	2													
3														
5	<table border="1"><tr><td>1</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>2</td><td></td><td></td></tr></table>	1	4	5	2			<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>3</td><td></td><td></td></tr></table>	1	2	4	3		
1	4	5												
2														
1	2	4												
3														
3	<table border="1"><tr><td>1</td><td>3</td><td>5</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td></td></tr></table>	1	3	5	2	4		<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>3</td><td>5</td><td></td></tr></table>	1	2	4	3	5	
1	3	5												
2	4													
1	2	4												
3	5													

Από τον υπολογισμό αυτόν παρατηρούμε ότι $P(w^{-1}) = Q(w)$ και $Q(w^{-1}) = P(w)$. Το επόμενο θεώρημα καταγράφει αυτό το αξιοσημείωτο φαινόμενο συμμετρίας που παρουσιάζει η αντιστοιχία Robinson-Schensted.

Θεώρημα 1.4.4 (Schützenberger [36]). *Έστω $w \in \mathfrak{S}_n$. Αν*

$$w \xrightarrow{RS} (P, Q),$$

τότε

$$w^{-1} \xrightarrow{RS} (Q, P).$$

Δηλαδή, $P(w^{-1}) = Q(w)$ και $Q(w^{-1}) = P(w)$ για κάθε $w \in \mathfrak{S}_n$.

Υπάρχουν διάφορες αποδείξεις του παραπάνω Θεωρήματος. Για την απόδειξη του Viennot, η οποία βασίζεται σε μια γεωμετρική ερμηνεία της αντιστοιχίας Robinson-Schensted παραπέμπουμε στο [1, Θεώρημα 4.4.1], ενώ για την απόδειξη του Fomin, η οποία χρησιμοποιεί τα λεγόμενα διαγράμματα Fomin παραπέμπουμε στο [35, Παράγραφο 5.2] ή στο [42, Θεώρημα 7.13.1]. Χρησιμοποιώντας τη συμμετρία αυτή μπορούμε να δείξουμε το εξής.

Πόρισμα 1.4.5. Για $n \geq 1$

$$\#I_n = \sum_{\lambda \vdash n} f^\lambda. \quad (1.7)$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 1.4.4 έπεται ότι $w \in I_n$ αν και μόνο αν $P(w) = Q(w)$. Επομένως, η αντιστοιχία Robinson-Schensted περιορίζεται σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία από το I_n στο σύνολο των ζευγών Young ταμπλώ (P, P) κάποιου σχήματος και έτσι προκύπτει ο τύπος (1.7). \square

Για ένα Young ταμπλώ T , ένας ακέραιος $i \in [n-1]$ ονομάζεται κάθοδος του T αν το $i+1$ εμφανίζεται στο T σε χαμηλότερη γραμμή από εκείνη στην οποία εμφανίζεται το i . Συμβολίζουμε με $\text{Des}(T)$ το σύνολο καθόδων ενός Young ταμπλώ T και με $\text{des}(T) = \#\text{Des}(T)$ το πλήθος των καθόδων του.

Λήμμα 1.4.6. Έστω T ταμπλώ και a, b θετικοί ακέραιοι, διαφορετικοί μεταξύ τους, που δεν είναι στοιχεία του T . Η διαδικασία εισαγωγής του b στις γραμμές του $T \leftarrow a$ καταλήγει σε τετράγωνο χαμηλότερης γραμμής από το τετράγωνο στο οποίο καταλήγει η εισαγωγή του a στις γραμμές του T αν και μόνο αν $b < a$.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε το λήμμα με επαγωγή στο πλήθος των γραμμών του T . Αν το T έχει μια γραμμή, υπάρχουν δυο περιπτώσεις για το $T \leftarrow a$. Στη πρώτη περίπτωση, ο a είναι μεγαλύτερος από κάθε στοιχείο του T και τοποθετείται στο τέλος της πρώτης (και μοναδικής) γραμμής του T και το ζητούμενο είναι προφανές. Στη δεύτερη περίπτωση, έστω x το μικρότερο στοιχείο του T που είναι μεγαλύτερο από το a και το τοποθετούμε σε μια δεύτερη γραμμή για να σχηματιστεί το $T \leftarrow a$. Για να σχηματιστεί καινούργια γραμμή κατά την εισαγωγή του b στο ταμπλώ $T \leftarrow a$ πρέπει αναγκαστικά $b < a$, διότι διαφορετικά θα υπήρχε ένα στοιχείο z της πρώτης γραμμής του $T \leftarrow a$ που θα ήταν μεγαλύτερο του b και κατά συνέπεια και του a και του x που θα τοποθετούνταν στα δεξιά του x στη δεύτερη γραμμή και αυτό θα ήταν το ταμπλώ $(T \leftarrow a) \leftarrow b$ πράγμα αδύνατο αν υποθέταμε ότι είχε τρεις γραμμές. Άρα, ισχύει ο ισχυρισμός όταν το T έχει μια γραμμή.

Έστω $k \geq 2$ και υποθέτουμε ότι ο ισχυρισμός ισχύει για όλα τα ταμπλώ με πλήθος γραμμών το πολύ $k-1$. Παρατηρούμε ότι κατά την εισαγωγή του a στις γραμμές του T υπάρχουν $k+1$ περιπτώσεις για το σχήμα του $T \leftarrow a$. Καλύπτονται όλες από την επαγωγική υπόθεση εκτός από μία, στην οποία ο $T \leftarrow a$ έχει $k+1$ γραμμές όπου στη τελευταία γραμμή υπάρχει το στοιχείο $x^{(k)}$ που ορίζεται επαγωγικά ως εξής

$$x^{(i)} = \min\{y \in r_i(T) : y > x^{(i-1)}\}$$

για $1 \leq i \leq k$, όπου $x^{(0)} = a$. Υποθέτουμε το ταμπλώ $(T \leftarrow a) \leftarrow b$ έχει $k+2$ γραμμές και ότι $b > a$. Τότε υπάρχουν

$$z^{(i)} = \min\{y \in r_i(T \leftarrow a) : y > z^{(i-1)}\}$$

για $1 \leq i \leq k$, όπου $z^{(0)} = b$. Αυτό σημαίνει ότι $x^{(k)} < z^{(k)}$ και γι αυτό το ταμπλώ $(T \leftarrow a) \leftarrow b$ έχει $k+1$ γραμμές, το οποίο είναι άτοπο. Άρα, $b < a$. Το αντίστροφο είναι προφανές και έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη. \square

Η επόμενη πρόταση συνδέει τις καθόδους μιας αυτοαντίστροφης μετάθεσης με τις καθόδους των Young ταμπλώ.

Πρόταση 1.4.7 (Strehl [45]). Για κάθε $n \geq 1$

$$I_n(x) = \sum_{Q \in \text{SYT}_n} x^{\text{des}(Q)}, \quad (1.8)$$

όπου SYT_n είναι το σύνολο των Young ταμπλώ με εισόδους από το $[n]$ οποιουδήποτε σχήματος.

Απόδειξη. Το Λήμμα 1.4.6 μας πληροφορεί ότι το σύνολο καθόδων μιας μετάθεσης $w \in \mathfrak{S}_n$ είναι ίσο με το σύνολο καθόδων του αντίστοιχου Q -ταμπλώ της w στην αντιστοιχία Robinson-Schensted. Επομένως,

$$I_n(x) = \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} x^{\text{des}(w)} = \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} x^{\text{des}(Q(w))}.$$

Το ζητούμενο έπεται από το τύπο (1.7) με αλλαγή μεταβλητών. \square

Αν T είναι ένα Young ταμπλώ, τότε ορίζουμε το ανάστροφο ταμπλώ T^t ως το ταμπλώ εκείνο του οποίου οι γραμμές συμπίπτουν με τις στήλες του T . Για παράδειγμα, αν

$$T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline \end{array}$$

τότε

$$T^t = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 5 \\ \hline 4 & \\ \hline \end{array}.$$

Πρόταση 1.4.8 (Strehl [45]). Για κάθε $n \geq 1$ το πολυώνυμο $I_n(x)$ είναι παλινδρομικό με κέντρο συμμετρίας $\frac{n-1}{2}$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι ένας ακέραιος $i \in [n-1]$ είναι κάθοδος ενός Young ταμπλώ $Q \in \text{SYT}_n$ αν και μόνο αν το i είναι άνοδος (δηλαδή δεν είναι κάθοδος) του ανάστροφου Young ταμπλώ Q^t . Επομένως, η απεικόνιση $\phi : \text{SYT}_n \rightarrow \text{SYT}_n$ με $\phi(Q) = Q^t$ για $Q \in \text{SYT}_n$ είναι αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία από το σύνολο των Young ταμπλώ του SYT_n με k καθόδους στο σύνολο εκείνων με k ανόδους, δηλαδή εκείνων με $n-1-k$ καθόδους. Άρα, το πολυώνυμο $I_n(x)$ είναι παλινδρομικό με κέντρο συμμετρίας $\frac{n-1}{2}$. \square

1.5 Μερικές διατάξεις και (P, ω) -διαμερίσεις

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε τις απεικονίσεις μεταξύ ενός μερικώς διατεταγμένου συνόλου και του συνόλου των μη αρνητικών ακεραίων \mathbb{N} οι οποίες αντιστρέφουν τη διάταξη και το πως σχετίζονται με τις καθόδους των μεταθέσεων.

Ορισμός 1.5.1. Έστω $w = w_1 w_2 \cdots w_n \in \mathfrak{S}_n$. Μια συνάρτηση $f : [n] \rightarrow \mathbb{N}$ ονομάζεται w -συμβατή αν ισχύουν τα εξής

- (α) $f(w_1) \geq f(w_2) \geq \cdots \geq f(w_n)$
- (β) Αν $w_i > w_{i+1}$, τότε $f(w_i) > f(w_{i+1})$.

Μπορεί να αποδείξει κανείς ότι για δοσμένη $f : [n] \rightarrow \mathbb{N}$, υπάρχει μοναδική $w \in \mathfrak{S}_n$ για την οποία η f είναι w -συμβατή (βλ. [41, Λήμμα 1.4.11]). Το γεγονός αυτό μας πληροφορεί ότι αν $\mathcal{A}(w)$ είναι το σύνολο όλων των w -συμβατών συναρτήσεων f για $w \in \mathfrak{S}_n$, τότε

$$\mathbb{N}^{[n]} = \bigsqcup_{w \in \mathfrak{S}_n} \mathcal{A}(w) \quad (1.9)$$

όπου $\mathbb{N}^{[n]}$ είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων $f : [n] \rightarrow \mathbb{N}$ και η ένωση είναι ξένη. Επίσης, έχουμε

$$[m]^{[n]} = \bigsqcup_{w \in \mathfrak{S}_n} \mathcal{A}_m(w), \quad (1.10)$$

όπου $[m]^{[n]}$ είναι το σύνολο των συναρτήσεων $f : [n] \rightarrow [m]$ και $\mathcal{A}_m(w)$ είναι το σύνολο όλων των w -συμβατών συναρτήσεων $f : [n] \rightarrow [m]$ για $w \in \mathfrak{S}_n$, δηλαδή $\mathcal{A}_m(w) = \mathcal{A}(w) \cap [m]^{[n]}$.

Λήμμα 1.5.2. Για $w \in \mathfrak{S}_n$ και $m \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\#\mathcal{A}_m(w) = \binom{m+n-1-\text{des}(w)}{n} = \binom{m-\text{des}(w)}{n}$$

και

$$\sum_{m \geq 1} \#\mathcal{A}_m(w) x^m = \frac{x^{1+\text{des}(w)}}{(1-x)^{n+1}},$$

όπου $\binom{m-\text{des}(w)}{n} = 0$, αν $0 \leq m < \text{des}(w)$.

Θεωρώντας πληθαρίθμους και στα δυο μέλη της (1.10), αθροίζοντας για $m \geq 0$ και χρησιμοποιώντας το Λήμμα 1.5.2 προκύπτει η ταυτότητα της Πρότασης 1.1.3.

Ο R. Stanley στη διδακτορική του διατριβή [38] γενίκευσε την παραπάνω συζήτηση για μερικώς διατεταγμένα σύνολα σε μια έννοια που ονομάζεται (P, ω) -διαμερίσεις. Έστω (P, \leq_P) μερικώς διατεταγμένο σύνολο με n στοιχεία και $\omega : P \rightarrow [n]$ μια 1-1 και επί αντιστοιχία, η οποία ονομάζεται επιγραφή του P .

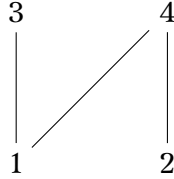
Ορισμός 1.5.3. Μια (P, ω) -διαμέριση είναι μια απεικόνιση $\sigma : P \rightarrow \mathbb{N}$ τέτοια ώστε

- (α) Αν $s \leq_P t$, τότε $f(s) \geq f(t)$.

(β) Αν $s <_P t$ και $\omega(s) > \omega(t)$, τότε $f(s) > f(t)$.

Αν η επιγραφή ω είναι φυσική, δηλαδή διατηρεί τη διάταξη του P , τότε μια (P, ω) -διαμέριση είναι απλώς μια απεικόνιση $\sigma : P \rightarrow \mathbb{N}$ που αντιστρέφει τη διάταξη. Στη περίπτωση αυτή η σ ονομάζεται P -διαμέριση. Συμβολίζουμε με $\mathcal{A}(P, \omega)$ το σύνολο των (P, ω) -διαμερίσεων.

Για παράδειγμα, ένα (φυσικά) επιγεγραμμένο μερικώς διατεταγμένο σύνολο είναι το εξής



Σχήμα 1.2: Αν $P = \{a, b, c, d\}$ με $a <_P b, d$ και $c <_P d$, τότε $\omega(a) = 1, \omega(b) = 3, \omega(c) = 2$ και $\omega(d) = 4$.

Η θεμελιώδης γεννήτρια συνάρτηση που σχετίζεται με τις (P, ω) -διαμερίσεις είναι η

$$F_{P, \omega} = F_{P, \omega}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{A}(P, \omega)} \prod_{s \in P} x_{\omega(s)}^{\sigma(s)} = \sum_{\sigma \in \mathcal{A}(P, \omega)} x_1^{\sigma(\omega^{-1}(1))} x_2^{\sigma(\omega^{-1}(2))} \dots x_n^{\sigma(\omega^{-1}(n))}$$

και περιέχει όλες τις πληροφορίες για αυτές. Για παράδειγμα, αν $P = \underline{n}$ είναι η αλυσίδα με n στοιχεία και ω είναι η προφανής φυσική επιγραφή, τότε

$$\begin{aligned} F_{\underline{n}, \omega} &= \sum_{r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_n \geq 0} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n} \\ &= \sum_{(r_1, r_2, \dots, r_n) \in \mathbb{N}^n} x_1^{r_1} (x_1 x_2)^{r_2} \dots (x_1 x_2 \dots x_n)^{r_n} \\ &= \frac{1}{\prod_{i=1}^n (1 - x_1 x_2 \dots x_i)} \end{aligned}$$

ενώ αν P είναι η αντιαλυσίδα με n στοιχεία και ω οποιαδήποτε φυσική επιγραφή, τότε

$$F_{P, \omega} = \sum_{r_1, r_2, \dots, r_n \geq 0} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n} = \frac{1}{\prod_{i=1}^n (1 - x_i)}.$$

Έστω $\mathcal{L}(P, \omega)$ το σύνολο των μεταθέσεων (a_1, a_2, \dots, a_n) του $[n]$ με την ιδιότητα

$$\omega^{-1}(a_i) <_P \omega^{-1}(a_j) \Rightarrow i < j$$

για όλα τα i, j . Το σύνολο $\mathcal{L}(P, \omega)$ ονομάζεται σύνολο Jordan-Hölder και τα στοιχεία του ονομάζονται γραμμικές επεκτάσεις του P . Στο τρέχον παράδειγμα, έχουμε

$$\mathcal{L}(P, \omega) = \{2143, 2134, 1243, 1234, 1324\}.$$

Για $\sigma \in \mathcal{A}(P, \omega)$, ορίζουμε $\sigma' : [n] \rightarrow \mathbb{N}$ με

$$\sigma'(i) = \sigma(\omega^{-1}(i))$$

για κάθε $i \in [n]$. Από τη σχέση (1.9) προκύπτει ότι υπάρχει (μοναδική) $w \in \mathfrak{S}_n$ ώστε $n \sigma'$ να είναι w -συμβατή. Για $w \in \mathfrak{S}_n$ συμβολίζουμε με S_w το σύνολο των συναρτήσεων $\sigma : P \rightarrow \mathbb{N}$ για τις οποίες $n \sigma'$ είναι w -συμβατή. Το επόμενο Λήμμα χαρακτηρίζει τις (P, ω) -διαμερίσεις.

Λήμμα 1.5.4. *Μια συνάρτηση $\sigma : P \rightarrow \mathbb{N}$ είναι (P, ω) -διαμέριση αν και μόνο αν $n \sigma'$ είναι w -συμβατή για κάποια $w \in \mathcal{L}(P, \omega)$. Ισοδύναμα έχουμε*

$$\mathcal{A}(P, \omega) = \bigsqcup_{w \in \mathcal{L}(P, \omega)} S_w. \quad (1.11)$$

Για την απόδειξη του παραπάνω Λήμματος καθώς και την απόδειξη του επόμενου θεωρήματος, το οποίο το συμπεριλαμβάνουμε για λόγους πληρότητας, αφού αποτελεί το κεντρικό θεώρημα για τη γεννήτρια συνάρτηση $F_{P, \omega}$ παραπέμπουμε στη παράγραφο 3.15 του [41].

Θεώρημα 1.5.5.

$$F_{P, \omega} = \sum_{w \in \mathcal{L}(P, \omega)} \frac{\prod_{i \in \text{Des}(w)} x_{w_1} x_{w_2} \cdots x_{w_i}}{\prod_{i=1}^n (1 - x_{w(1)} x_{w(2)} \cdots x_{w(i)})}$$

Στο τρέχον παράδειγμα το Λήμμα 1.5.4 μας πληροφορεί ότι κάθε (P, ω) -διαμέριση $\sigma : P \rightarrow \mathbb{N}$ ικανοποιεί μια εκ των συνθηκών

$$\begin{aligned} \sigma'(2) &> \sigma'(1) \geq \sigma'(4) > \sigma'(3) \\ \sigma'(2) &> \sigma'(1) \geq \sigma'(3) \geq \sigma'(4) \\ \sigma'(1) &\geq \sigma'(2) \geq \sigma'(4) > \sigma'(3) \\ \sigma'(1) &\geq \sigma'(2) \geq \sigma'(3) \geq \sigma'(4) \\ \sigma'(1) &\geq \sigma'(3) > \sigma'(2) \geq \sigma'(4) \end{aligned}$$

και το θεώρημα 1.5.5 μας πληροφορεί ότι

$$F_{P, \omega} = \frac{x_1^2 x_2 x_3 + x_1 + x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2}{(1 - x_1)(1 - x_1 x_2)(1 - x_1 x_2 x_3)(1 - x_1 x_2 x_3 x_4)}.$$

Συνεπώς, η σχέση (1.11) μας επιτρέπει να διαμερίσουμε το $\mathcal{A}(P, \omega)$ σε πεπερασμένο πλήθος συνόλων που μπορούμε να μελετήσουμε ξεχωριστά. Συμβολίζουμε με $e(P)$ το πληθάριθμο του $\mathcal{L}(P, \omega)$. Αποδεικνύεται ότι το $e(P)$ είναι ανεξάρτητο της επιγραφής ω και ότι ισούται με το πλήθος των γραμμικών επεκτάσεων του P , δηλαδή αναδιατάξεων (p_1, p_2, \dots, p_n) των στοιχείων του P με την ιδιότητα

$$p_i <_P p_j \Rightarrow i < j$$

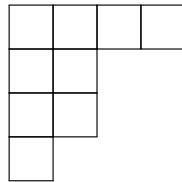
για όλα τα i, j . Αν για παράδειγμα $P = \underline{n}$ είναι η αλυσίδα με n στοιχεία, τότε υπάρχει μοναδική γραμμική επέκταση, γι αυτό $e(P) = 1$, ενώ αν P είναι η αντιαλυσίδα με n στοιχεία, τότε $e(P) = n!$, διότι κάθε μετάθεση των στοιχείων του P είναι γραμμική επέκταση του P . Παρατηρείστε ότι μια φυσική επιγραφή είναι γραμμική επέκταση και οι υπολογισμοί για την $F_{P, \omega}$ όταν P είναι αλυσίδα και αντιαλυσίδα αντίστοιχα με n στοιχεία είναι σε συμφωνία με το τύπο του Θεωρήματος 1.5.5.

Ένα υποσύνολο I του P ονομάζεται διατακτικό ιδεώδες αν για κάθε $s, t \in P$ με $s \leq_P t \in I$ έπεται ότι $s \in I$. Το σύνολο των διατακτικών ιδεωδών, μερικώς διατεταγμένο με τη σχέση του εγκλεισμού συμβολίζεται με $J(P)$ και ονομάζεται μερική διάταξη των ιδεωδών του P . Αποδεικνύεται ότι το $e(P)$ ισούται με το πλήθος των μεγιστικών αλυσίδων του $J(P)$ (βλ. [2]). Κλείνοντας την ενότητα αυτή επισημαίνουμε ότι ο υπολογισμός του πλήθους $e(P)$ των στοιχείων του $\mathcal{L}(P, \omega)$ σχετίζεται με πολλά προβλήματα απαρίθμησης.

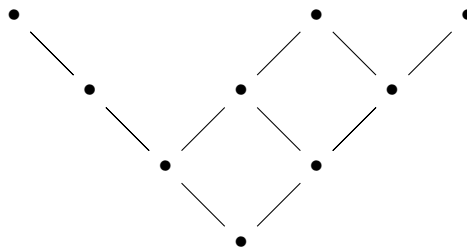
Για παράδειγμα, έστω $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) \vdash n$ μια διαμέριση του n με διάγραμμα Young Y_λ . Έστω P_λ το μερικώς διατεταγμένο σύνολο του οποίου τα στοιχεία είναι τα τετράγωνα του Y_λ με σχέση κάλυψης $s < t$ αν και μόνο αν το τετράγωνο t βρίσκεται ακριβώς στα δεξιά ή ακριβώς από κάτω του s . Με άλλα λόγια, τέτοια μερικώς διατεταγμένα σύνολα είναι τα πεπερασμένα διατακτικά ιδεώδη του $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, δηλαδή

$$P_\lambda = \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq \lambda_i\}.$$

Για παράδειγμα, για $n = 9$ και $\lambda = (4, 2, 2, 1)$ το διάγραμμα Young είναι



και το αντίστοιχο $P_{(4,2,2,1)}$ είναι



Πρόταση 1.5.6. Για $\lambda \vdash n$, ισχύει ότι $e(P_\lambda) = f^\lambda$.

Απόδειξη. Μια γραμμική επέκταση του P_λ είναι μια απαρίθμηση των τετραγώνων $w = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ του Y_λ για την οποία ισχύει $i < j$, όταν το t_i βρίσκεται αριστερά στην ίδια γραμμή ή παραπάνω στην ίδια στήλη του t_j . Αντιστοιχώντας το i στο τετράγωνο t_i , για $1 \leq i \leq n$ παίρνουμε ένα Young ταμπλώ T_w σχήματος λ και η απεικόνιση $w \mapsto T_w$ είναι αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία $\mathcal{L}(P_\lambda) \rightarrow \text{SYT}(\lambda)$. \square

Κεφάλαιο 2

Συμμετρικές Συναρτήσεις

2.1 Ο δακτύλιος των συμμετρικών συναρτήσεων

Ασθενής σύνθεση ενός μη αρνητικού ακεραίου $n \in \mathbb{N}$ ονομάζεται μια ακολουθία $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ μη αρνητικών ακεραίων ώστε $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots = n$. Οι ακέραιοι α_i ονομάζονται μέρη της α και γράφουμε $\alpha \vdash n$. Έστω $x = (x_1, x_2, \dots)$ ένα σύνολο (ανεξάρτητων) μεταβλητών.

Ορισμός 2.1.1. Η τυπική δυναμοσειρά

$$f(x) = \sum_{\alpha \vdash n} c_\alpha x^\alpha \in \mathbb{Q}[[x]]$$

όπου

$$x^\alpha = x^{\alpha_1} x^{\alpha_2} \dots$$

και $c_\alpha \in \mathbb{Q}$ για σύνθεση $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ ονομάζεται (ομογενής) συμμετρική συνάρτηση βαθμού n αν

$$f(x_{w_1}, x_{w_2}, \dots) = f(x_1, x_2, \dots)$$

για κάθε μετάθεση $w \in \mathfrak{S}(\mathbb{Z}_{>0})$. Το σύνολο των συμμετρικών συναρτήσεων βαθμού n συμβολίζεται με $\Lambda_{\mathbb{Q}}^n$.

Παρατηρούμε ότι αν $f, g \in \Lambda_{\mathbb{Q}}^n$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{Q}$, τότε $\lambda f + \mu g \in \Lambda_{\mathbb{Q}}^n$. Επομένως, το $\Lambda_{\mathbb{Q}}^n$ είναι \mathbb{Q} -διανυσματικός χώρος. Επιπλέον, αν $f \in \Lambda_{\mathbb{Q}}^n$ και $g \in \Lambda_{\mathbb{Q}}^m$ για $m \in \mathbb{N}$, τότε $fg \in \Lambda_{\mathbb{Q}}^{n+m}$ ως γινόμενο τυπικών δυναμοσειρών. Οπότε ορίζοντας

$$\Lambda_{\mathbb{Q}} := \Lambda_{\mathbb{Q}}^0 \oplus \Lambda_{\mathbb{Q}}^1 \oplus \Lambda_{\mathbb{Q}}^2 \oplus \dots$$

ως ευθύ άθροισμα \mathbb{Q} -διανυσματικών χώρων, όπου $\Lambda_{\mathbb{Q}}^0 = \mathbb{Q}$, η $\Lambda_{\mathbb{Q}}$ έχει δομή μεταθετικής \mathbb{Q} -άλγεβρας την οποία ονομάζουμε άλγεβρα των συμμετρικών συναρτήσεων. Για περισσότερες πληροφορίες για την άλγεβρα των συμμετρικών συναρτήσεων παραπέμπουμε στα [42, 30].

Στη συνέχεια της ενότητας αυτής θα ορίσουμε ορισμένες χρήσιμες βάσεις της $\Lambda_{\mathbb{Q}}^n$. Έστω $\lambda \vdash n$. Αν $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k \geq 1$ είναι τα μέρη της διαμέρισης λ , τότε θέτουμε $\lambda_i = 0$, για $i > k$.

Ορισμός 2.1.2. Η μονωνυμική (monomial) συμμετρική συνάρτηση $m_\lambda = m_\lambda(x) \in \Lambda_{\mathbb{Q}}^n$ ορίζεται θέτοντας

$$m_\lambda = \sum_{\alpha} x^\alpha,$$

όπου τα α διατρέχει όλες τις διακεκρωμένες μεταθέσεις των μερών του λ .

Για παράδειγμα, για τις τρεις διαμερίσεις $(3), (2, 1), (1, 1, 1)$ του 3 έχουμε

$$\begin{aligned} m_{(3)} &= x_1^3 + x_2^3 + \dots = \sum_{i \geq 1} x_i^3 \\ m_{(2,1)} &= x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + \dots + x_1 x_2^2 + x_2^2 x_3 + \dots \\ m_{(1,1,1)} &= x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \dots + x_2 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_5 + \dots = \sum_{1 \leq i < j < k} x_i x_j x_k. \end{aligned}$$

Είναι εμφανές ότι $m_\lambda \in \Lambda_{\mathbb{Q}}^n$ για κάθε $\lambda \vdash n$ και ότι κάθε συμμετρική συνάρτηση $f \in \Lambda_{\mathbb{Q}}^n$ μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός μονωνυμικών συμμετρικών συναρτήσεων, δηλαδή

$$f(x) = \sum_{\lambda \vdash n} c_\lambda m_\lambda$$

για κάποια $c_\lambda \in \mathbb{Q}$, με μοναδικό τρόπο. Επομένως, το σύνολο $\{m_\lambda : \lambda \vdash n\}$ αποτελεί βάση του \mathbb{Q} -διανυσματικού χώρου $\Lambda_{\mathbb{Q}}^n$ και γι αυτό

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\Lambda_{\mathbb{Q}}^n) = p(n),$$

όπου $p(n)$ είναι το πλήθος των διαμερίσεων του n .

Αξίζει να σημειωθεί ότι ενώ δεν υπάρχει κάποιος απλός γενικός τύπος για το $p(n)$, η αντίστοιχη γεννήτρια συνάρτηση υπολογίζεται εύκολα (βλ. [1, Πρόταση 1.2.6]) και δίνεται από

$$\sum_{n \geq 0} p(n) t^n = \prod_{i \geq 1} \frac{1}{1 - t^i}.$$

Ορισμός 2.1.3. Για $n \geq 1$

(α) η στοιχειώδης (elementary) συμμετρική γεννήτρια συνάρτηση $e_n = e_n(x) \in \Lambda_{\mathbb{Q}}^n$ ορίζεται θέτοντας

$$e_n = m_{(1^n)} = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n},$$

(β) η πλήρης ομογενής (complete homogeneous) συμμετρική συνάρτηση $h_n = h_n(x) \in \Lambda_{\mathbb{Q}}^n$ ορίζεται θέτοντας

$$h_n = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n},$$

(γ) η δυναμοπροσθετική (power sum) συμμετρική συνάρτηση ορίζεται θέτοντας

$$p_n = m_{(n)} = \sum_{i \geq 1} x_i^n.$$

Για $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) \vdash n$ ορίζουμε $e_\lambda = e_{\lambda_1} e_{\lambda_2} \dots e_{\lambda_k}$, $h_\lambda = h_{\lambda_1} h_{\lambda_2} \dots h_{\lambda_k}$ και $p_\lambda = p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \dots p_{\lambda_k}$ αντίστοιχα.

Για παράδειγμα, για τις τρεις διαμερίσεις $(3), (2, 1), (1, 1, 1)$ του 3 έχουμε

$$\begin{aligned} e_{(3)} &= m_{(1,1,1)} \\ e_{(2,1)} &= (x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_2x_3 + x_2x_4 + \dots)(x_1 + x_2 + \dots) = m_{(2,1)} + 3m_{(1,1,1)} \\ e_{(1,1,1)} &= (x_1 + x_2 + \dots)^3 = m_{(3)} + 3m_{(2,1)} + 6m_{(1,1,1)}. \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} p_{(3)} &= x_1^3 + x_2^3 + \dots = m_{(3)} \\ p_{(2,1)} &= (x_1^2 + x_2^2 + \dots)(x_1 + x_2 + \dots) = m_{(3)} + m_{(2,1)} \\ p_{(1^3)} &= (x_1 + x_2 + \dots)^3 = m_{(3)} + 3m_{(2,1)} + 6m_{(1^3)}. \end{aligned}$$

Οι συντελεστές στα δεξιά μέλη των παραπάνω αναπτυγμάτων έχουν συνδυαστική ερμηνεία. Πιο συγκεκριμένα, ισχύει ότι

$$e_\lambda = \sum_{\mu \vdash n} M_{\lambda\mu} m_\mu$$

όπου $M_{\lambda\mu}$ είναι το πλήθος των $(0, 1)$ -πινάκων $A = (a_{ij})$ με $\text{row}(A) = \lambda$ και $\text{col}(A) = \mu$, όπου

$$\begin{aligned} \text{row}(A) &= (r_1, r_2, \dots) \\ \text{col}(A) &= (c_1, c_2, \dots) \end{aligned}$$

με

$$\begin{aligned} r_i &= \sum_{j \geq 1} a_{ij} \\ c_j &= \sum_{i \geq 1} a_{ij} \end{aligned}$$

για $i, j \geq 1$. Για την απόδειξη αυτού και για περαιτέρω αναπτύγματα των πλήρως ομογενών συμμετρικών συναρτήσεων και των δυναμοπροσθετικών συμμετρικών συναρτήσεων παραπέμπουμε στο [42, Κεφάλαιο 7]. Επίσης αποδεικνύεται ότι τα σύνολα $\{e_\lambda : \lambda \vdash n\}$, $\{h_\lambda : \lambda \vdash n\}$ και $\{p_\lambda : \lambda \vdash n\}$ αποτελούν βάση του \mathbb{Q} -διανυσματικού χώρου $\Lambda_{\mathbb{Q}}^n$.

Υπάρχει μια ενδιαφέρουσα δυϊκότητα μεταξύ των e_λ και h_λ την οποία αξίζει να παρατηρήσουμε. Για $f \in \Lambda_{\mathbb{Q}}$ και $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ θέτουμε

$$f(1^n) = f(x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1, x_{n+1} = x_{n+2} = \dots = 0).$$

Έτσι, για θετικό ακέραιο k έχουμε

$$e_k(1^n) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} 1 = \binom{n}{k}$$

και

$$h_k(1^n) = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n} 1 = \binom{n+k-1}{k}$$

όπου με $\binom{n}{k}$ συμβολίζουμε το πλήθος των συνδυασμών με επανάληψη k από n αντικείμενα και δίνεται από $\binom{n}{k} = \binom{n+k-1}{k}$. Οι δυο αυτοί ακέραιοι όμως συνδέονται με το εξής νόμο (συνδυαστικής) αντιστροφής

$$\binom{n}{k} = (-1)^k \binom{-n}{k}.$$

2.2 Οι συναρτήσεις Schur

Στην ενότητα αυτή θα κατασκευάσουμε μια ακόμη βάση του $\Lambda_{\mathbb{Q}}^n$, τις λεγόμενες συναρτήσεις Schur.

Έστω $\lambda \vdash n$. Γενικευμένο (ή ημισύνθετος) Young ταμπλώ (semistandard Young tableaux) σχήματος λ ονομάζεται κάθε απεικόνιση των τετραγώνων του διαγράμματος Young Y_λ της λ με το $\mathbb{Z}_{>0}$ ώστε

- (α) οι ακέραιοι που αντιστοιχούν στα τετράγωνα οποιασδήποτε γραμμής του Y_λ αυξάνουν ασθενώς προς τα δεξιά και
- (β) οι ακέραιοι που αντιστοιχούν στα τετράγωνα οποιασδήποτε στήλης του Y_λ αυξάνουν (αυστηρά) προς τα κάτω.

Για παράδειγμα, ένα γενικευμένο Young ταμπλώ σχήματος $\lambda = (4, 3, 2, 2)$ είναι το εξής

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 2 \\ \hline 2 & 2 & 3 & \\ \hline 8 & 10 & & \\ \hline 11 & 11 & & \\ \hline \end{array} .$$

Το σύνολο των γενικευμένων Young ταμπλώ σχήματος λ συμβολίζουμε με $SSYT_\lambda$. Για $T \in SSYT_\lambda$ η ακολουθία $\text{cont}(T) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ όπου $\alpha_i = \alpha_i(T)$ είναι το πλήθος των εμφανίσεων του ακεραίου i στο ταμπλώ T για κάθε i ονομάζεται τύπος (ή περιεχόμενο) του T και αποτελεί ασθενή σύνθεση του n . Το σύνολο των γενικευμένων Young ταμπλώ σχήματος λ και τύπου α συμβολίζουμε με $SSYT_{\lambda, \alpha}$. Επίσης, για $T \in SSYT_{\lambda, \alpha}$ γράφουμε

$$x^T = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots.$$

Στο τρέχον παράδειγμα έχουμε $\alpha(T) = (2, 4, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 2, 1, 0, \dots)$ και

$$x^T = x_1^2 x_2^4 x_3 x_8 x_{10} x_{11}^2.$$

Ορισμός 2.2.1. Η συνάρτηση Schur $s_\lambda = s_\lambda(x)$ που αντιστοιχεί στην διαμέριση $\lambda \vdash n$ ορίζεται θέτοντας

$$s_\lambda = \sum_{T \in SSYT_\lambda} x^T.$$

Έστω $\lambda = (n)$ η διαμέριση με ένα μέρος. Κάθε πολυσύνολο του $[n]$ (υποσύνολο του $[n]$ όπου επιτρέπεται η επανάληψη των στοιχείων του) αντιστοιχεί σε ακριβώς ένα γενικευμένο Young ταμπλώ όπου τα στοιχεία του εμφανίζονται από τα αριστερά προς τα δεξιά σε (ασθενώς) αύξουσα σειρά. Συνεπώς,

$$s_{(n)} = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n} = h_n$$

και συμπίπτει με τη πλήρη ομογενή συμμετρική συνάρτηση.

Έστω τώρα ότι $\lambda = (1^n)$ η διαμέριση με n μέρη ίσα με 1. Κάθε υποσύνολο του $[n]$ αντιστοιχεί σε ακριβώς ένα γενικευμένο Young ταμπλώ όπου τα στοιχεία του εμφανίζονται από πάνω προς τα κάτω σε (αυστηρά) αύξουσα σειρά. Συνεπώς,

$$s_{(1^n)} = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n} = e_n$$

και συμπίπτει με τη στοιχειώδη συμμετρική συνάρτηση.

Από τον ορισμό δεν είναι άμεσα εμφανές ότι το s_λ είναι συμμετρική συνάρτηση. Θα το δούμε αυτό στην επόμενη πρόταση. Η απόδειξη οφείλεται στους Bender και Knuth [7].

Πρόταση 2.2.2. Για διαμέριση $\lambda \vdash n$, ισχύει ότι $s_\lambda \in \Lambda_{\mathbb{Q}}^n$.

Απόδειξη. Το σύνολο των αντιμεταθέσεων $(i \ i+1)$ παράγει τη συμμετρική ομάδα S_n . Συνεπώς, αρκεί να αποδείξουμε ότι οι συναρτήσεις Schur παραμένουν αναλλοίωτες από μια αντιμετάθεση $(i \ i+1)$ των μεταβλητών, δηλαδή

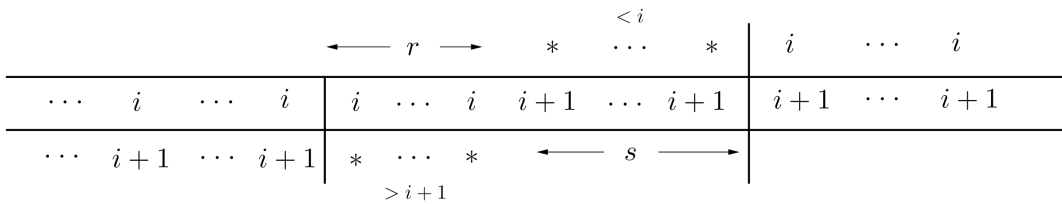
$$s_\lambda(x) = s_\lambda(x_1, \dots, x_{i+1}, x_i, \dots).$$

Έστω $\lambda \vdash n$. Για ασθενή σύνθεση $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots) \models n$ θέτουμε

$$\hat{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \alpha_i, \dots).$$

Θα κατασκευάσουμε μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ϕ μεταξύ των συνόλων $SSYT_{\lambda, \alpha}$ και $SSYT_{\lambda, \hat{\alpha}}$. Για $T \in SSYT_{\lambda, \alpha}$, ορίζουμε $\phi(T)$ να είναι το γενικευμένο Young ταμπλώ που προκύπτει από το T ως εξής :

- (α) Τα στοιχεία του T που είναι διαφορετικά των i και $i+1$ παραμένουν στις θέσεις τους.
- (β) Η θέση που έχουν τα i και $i+1$ στις γραμμές του T είναι η εξής



Σχήμα 2.1: Η γενική εικόνα της τυχαίας γραμμής του T , όπου r είναι το πλήθος των i που εμφανίζονται σε αυτή και δεν έχουν ακριβώς από κάτω τους $i+1$ και s είναι το πλήθος των $i+1$ που εμφανίζονται μετά τα i και δεν έχουν ακριβώς από πάνω τους i . Τα r, s εξαρτώνται από τη γραμμή στην οποία βρίσκονται.

Τα ζεύγη $(i, i+1)$ που εμφανίζονται στην ίδια στήλη, με το $i+1$ να βρίσκεται ακριβώς κάτω από το i παραμένουν στις θέσεις τους και για τις υπόλοιπες εμφανίσεις των i και $i+1$ στο T , σε κάθε γραμμή ανταλλάσσουμε το πλήθος των i με εκείνο των $i+1$.

Είναι προφανές ότι $\phi(T) \in \text{SSYT}_{\lambda, \hat{\alpha}}$ και ότι $n \circ \phi$ είναι αμφιμονοσήμαντη. Επίσης, από την κατασκευή της, $n \circ \phi$ εναλλάσει τους εκθέτες των x_i και x_{i+1} και αφήνει όλους τους άλλους σταθερούς. Άρα, έχουμε το ζητούμενο. \square

Έστω $\lambda \vdash n$. Αν

$$K_{\lambda\alpha} = \# \text{SSYT}_{\lambda\alpha}$$

για $\alpha \vdash n$, τότε από τον Ορισμό 2.2.1 έπεται ότι

$$s_\lambda = \sum_{\alpha \vdash n} K_{\lambda\alpha} x^\alpha$$

και επειδή, από τη πρόταση 2.2.2, $n \circ s_\lambda$ είναι συμμετρική συνάρτηση έπεται ότι

$$s_\lambda = \sum_{\mu \vdash n} K_{\lambda\mu} m_\mu.$$

Οι αριθμοί $K_{\lambda\mu}$ ονομάζονται αριθμοί Kostka και έχουν ιδιαίτερη σημασία στη θεωρία αναπαραστάσεων της συμμετρικής ομάδας, όπως θα δούμε στην παράγραφο 2.5. Γενικός τύπος για τους αριθμούς Kostka δεν είναι γνωστός. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει η περίπτωση όπου $\mu = (1^n)$. Στη περίπτωση αυτή έχουμε

$$K_{\lambda(1^n)} = f^\lambda$$

το οποίο συναντήσαμε στην Παράγραφο 1.4 του προηγούμενου κεφαλαίου και απαριθμεί το πλήθος των Young ταμπλώ σχήματος λ .

Για να δείξουμε ότι οι συναρτήσεις Schur αποτελούν βάση του $\Lambda_{\mathbb{Q}}^n$ αρκεί να δείξουμε ότι ο πίνακας μετάβασης στη βάση των μονωνυμικών συμμετρικών συναρτήσεων είναι αντιστρέψιμος. Μάλιστα, θα δείξουμε ότι είναι κάτω τριγωνικός με στοιχεία θετικούς ακεραίους και ότι έχει μοναδιαία διαγώνιο.

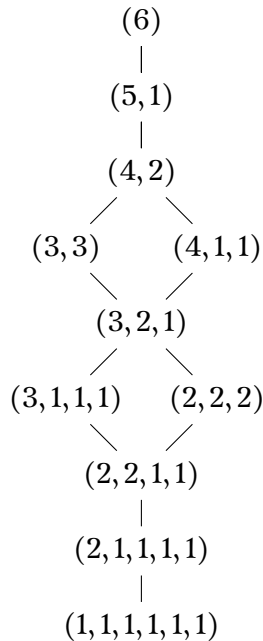
Για παράδειγμα, αν θέλουμε να εκφράσουμε το $s_{(2,1)}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $m_{(3)}$, $m_{(1,1,1)}$ και $m_{(2,1)}$ παρατηρούμε ότι δεν μπορεί να υπάρξει γενικευμένο ταμπλώ σχήματος $(2,1)$ με τρεις εισόδους ίσες. Επομένως, ο συντελεστής του $m_{(3)}$ είναι 0. Για την περίπτωση όπου έχουμε $x_i x_j x_k$ με $i < j < k$ έχουμε δυο επιλογές, ανάλογα με το τετράγωνο στο οποίο θα τοποθετηθούν τα j και k . Επομένως, ο συντελεστής του $m_{(1,1,1)}$ είναι ίσος με 2. Τέλος, για $i \neq j$ υπάρχει ένα γενικευμένο ταμπλώ σχήματος $(2,1)$ και ίδιου τύπου που δίνει $x_i^2 x_j$, ανάλογα με το αν $i < j$ ή $j < i$. Οπότε, ο συντελεστής του $m_{(2,1)}$ είναι ίσος με 1. Με παρόμοιο σκεπτικό προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} s_{(1,1,1)} &= m_{(1,1,1)} \\ s_{(2,1)} &= 2m_{(1,1,1)} + m_{(2,1)} \\ s_{(3)} &= m_{(1,1,1)} + m_{(2,1)} + m_{(3)}. \end{aligned}$$

Έστω $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k), \mu = (\mu_1, \dots, \mu_l) \vdash n$. Θέτουμε $\lambda_j = 0$ για $j > k$ και $\mu_j = 0$, για $j > l$. Γράφουμε $\lambda \succeq \mu$ αν

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_i \geq \mu_1 + \dots + \mu_i$$

για κάθε i . Η σχέση \succeq είναι σχέση μερικής διάταξης στο σύνολο των διαμερίσεων του n .



Σχήμα 2.2: Η σχέση \succeq δεν είναι ολική διάταξη για $n \geq 6$.

Λήμμα 2.2.3. Για διαμερίσεις $\lambda, \mu \vdash n$, αν $K_{\lambda\mu} \neq 0$, τότε $\lambda \succeq \mu$ και επιπλέον $K_{\lambda\lambda} = 1$.

Απόδειξη. Έστω $T \in \text{SSYT}_{\lambda\mu}$, διότι $K_{\lambda\mu} \neq 0$. Αρχικά υποθέτουμε ότι $\lambda = \mu$. Τότε υπάρχει μόνο μια επιλογή για το T , τα στοιχεία της i -οστής γραμμής να είναι όλα ίσα με i , για κάθε i . Συνεπώς, $K_{\lambda\lambda} = 1$.

Τώρα, υποθέτουμε ότι $\lambda \neq \mu$. Αυτό σημαίνει ότι στο T κάθε 1 πρέπει να βρίσκεται στη πρώτη γραμμή, κάθε 2 πρέπει να βρίσκεται στη πρώτη ή τη δεύτερη γραμμή κ.ο.κ.. Συνεπώς,

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_i \geq \mu_1 + \dots + \mu_i$$

για κάθε i που σημαίνει ότι $\lambda \succeq \mu$. □

Πόρισμα 2.2.4. Το σύνολο $\{s_\lambda : \lambda \vdash n\}$ αποτελεί βάση του \mathbb{Q} -διανυσματικού χώρου $\Lambda_{\mathbb{Q}}^n$.

Απόδειξη. Από το Λήμμα 2.2.3 έπεται ότι ο πίνακας μετάβασης που εκφράζει τις συναρτήσεις Schur στις μονωνυμικές συμμετρικές συναρτήσεις είναι κάτω τριγωνικός με 1 στη διαγώνιο (ως προς οποιαδήποτε γραμμική διάταξη που επεκτείνει την \succeq). □

2.3 Η ταυτότητα Cauchy

Μια ενδιαφέρουσα ιδιότητα των συναρτήσεων Schur θα προκύψει γενικεύοντας την αντιστοιχία Robinson - Schensted του κεφαλαίου 1. Η κατασκευή έγινε από τον Knuth [28].

Γενικευμένη μετάθεση μήκους n (ή λεξικογραφική $2 \times n$ διάταξη) ονομάζεται ένας $2 \times n$ πίνακας

$$w = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$$

του οποίου οι στήλες βρίσκονται σε λεξικογραφική διάταξη, δηλαδή ισχύει ότι

- (α) $i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_n$
- (β) αν $i_k = i_{k+1}$, τότε $j_k \leq j_{k+1}$.

Συμβολίζουμε με GP_n το σύνολο των γενικευμένων μεταθέσεων μήκους n . Για παράδειγμα, για $n = 8$ μια γενικευμένη μετάθεση μήκους 9 είναι

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 3 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Η αντιστοιχία Knuth είναι μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία

$$GP_n \rightarrow \bigcup_{\lambda \vdash n} SSYT_\lambda \times SSYT_\lambda$$

η οποία σε κάθε γενικευμένη μετάθεση

$$w = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix} \in GP_n$$

αντιστοιχίζει ένα ζεύγος γενικευμένων Young ταμπλώ ($P(w), Q(w)$) ίδιου σχήματος σύμφωνα με τη διαδικασία που περιγράψαμε στην Παράγραφο 1.5 διαφοροποιημένη ως εξής:

- (α) Το P -ταμπλώ $P(w)$ ορίζεται να είναι

$$P(w) = ((\cdots((\emptyset \leftarrow j_1) \leftarrow j_2) \leftarrow \cdots) \leftarrow j_n),$$

όπου αν σε κάποια εισαγωγή το j_k ισούται με το μεγαλύτερο στοιχείο της πρώτης γραμμής, τότε τοποθετείται στη γραμμή αυτή, προσθέτοντας ένα τετράγωνο στο τέλος της με το j_k στο εσωτερικό της.

- (β) Το Q -ταμπλώ $Q(w)$ έχει ίδιο σχήμα με το $P(w)$ και σε αυτό κάθε i_k καταλαμβάνει το τετράγωνο στο οποίο τερματίζεται η εισαγωγή του j_k στο ταμπλώ $(\cdots((\emptyset \leftarrow j_1) \leftarrow j_2) \leftarrow \cdots) \leftarrow j_{k-1})$, για $1 \leq k \leq n$.

Για παράδειγμα, για τη γενικευμένη μετάθεση του τρέχοντος παραδείγματος τα βήματα της παραπάνω διαδικασίας είναι τα εξής

στοιχείο εισαγωγής	P-ταμπλώ	Q-ταμπλώ																														
2	<table border="1"><tr><td>2</td></tr></table>	2	<table border="1"><tr><td>1</td></tr></table>	1																												
2																																
1																																
4	<table border="1"><tr><td>2</td><td>4</td></tr></table>	2	4	<table border="1"><tr><td>1</td><td>1</td></tr></table>	1	1																										
2	4																															
1	1																															
1	<table border="1"><tr><td>1</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td></td></tr></table>	1	4	2		<table border="1"><tr><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td></td></tr></table>	1	1	2																							
1	4																															
2																																
1	1																															
2																																
1	<table border="1"><tr><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td></tr></table>	1	1	2	4	<table border="1"><tr><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td></tr></table>	1	1	2	4																						
1	1																															
2	4																															
1	1																															
2	4																															
3	<table border="1"><tr><td>1</td><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td></td></tr></table>	1	1	3	2	4		<table border="1"><tr><td>1</td><td>1</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td></td></tr></table>	1	1	4	2	4																			
1	1	3																														
2	4																															
1	1	4																														
2	4																															
3	<table border="1"><tr><td>1</td><td>1</td><td>3</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td></td><td></td></tr></table>	1	1	3	3	2	4			<table border="1"><tr><td>1</td><td>1</td><td>4</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td></td><td></td></tr></table>	1	1	4	4	2	4																
1	1	3	3																													
2	4																															
1	1	4	4																													
2	4																															
2	<table border="1"><tr><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td><td></td><td></td></tr><tr><td>4</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	1	1	2	3	2	3			4				<table border="1"><tr><td>1</td><td>1</td><td>4</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td></td><td></td></tr><tr><td>5</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	1	1	4	4	2	4			5									
1	1	2	3																													
2	3																															
4																																
1	1	4	4																													
2	4																															
5																																
4	<table border="1"><tr><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>4</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	1	1	2	3	4	2	3				4					<table border="1"><tr><td>1</td><td>1</td><td>4</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>5</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	1	1	4	4	5	2	4				5				
1	1	2	3	4																												
2	3																															
4																																
1	1	4	4	5																												
2	4																															
5																																

Παρατηρούμε ότι το P-ταμπλώ θα έχει στοιχεία j_1, j_2, \dots, j_n και το Q-ταμπλώ θα έχει στοιχεία i_1, i_2, \dots, i_n . Είναι προφανές ότι $w \in \mathfrak{S}_n$ αν και μόνο αν τα $P(w), Q(w) \in \text{SYT}_n$.

Μια γενικευμένη μετάθεση $w = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix} \in \text{GP}_n$ μπορεί να περιγραφεί από ένα \mathbb{N} -πίνακα (πίνακα με στοιχεία στο \mathbb{N}) $A = (a_{ij})_{i,j \geq 1}$ με πεπερασμένο φορέα, όπου

$$a_{ij} = \#\{1 \leq k \leq n : (i_k, j_k) = (i, j)\}$$

για $i, j \geq 1$ και αντίστροφα. Στο τρέχον παράδειγμα, έχουμε

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Έτσι, συγκεντρώνουμε την παραπάνω συζήτηση στο παρακάτω θεώρημα. Θα

συμβολίζουμε με w_A τη γενικευμένη μετάθεση που αντιστοιχεί σε ένα \mathbb{N} -πίνακα με πεπερασμένο φορέα.

Θεώρημα 2.3.1 (Αντιστοιχία RSK). *Η απεικόνιση*

$$A \mapsto (P(w_A), Q(w_A))$$

είναι αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία από το σύνολο των \mathbb{N} -πινάκων $A = (a_{ij})_{i,j \geq 1}$ πεπερασμένου φορέα στο σύνολο των ζευγών (P, Q) γενικευμένων Young ταμπλώ ίδιου σχήματος. Με την αντιστοιχία αυτή

- το j εμφανίζεται ως στοιχείο του P ακριβώς $c_j = \sum_i a_{ij}$ φορές, δηλαδή

$$\text{cont}(P) = \text{col}(A)$$

- και το i εμφανίζεται ως στοιχείο του Q ακριβώς $r_i = \sum_j a_{ij}$ φορές, δηλαδή

$$\text{cont}(Q) = \text{row}(A).$$

Για την απόδειξη παραπέμπουμε στο [42, Θεώρημα 7.11.5]. Η επόμενη πρόταση ονομάζεται ταυτότητα Cauchy και είναι μια σημαντική ιδιότητα των συναρτήσεων Schur που προκύπτει απευθείας από το Θεώρημα 2.3.1. Έστω Par το σύνολο όλων των διαμερίσεων των φυσικών αριθμών.

Πρόταση 2.3.2 (Ταυτότητα Cauchy).

$$\sum_{\lambda \in \text{Par}} s_\lambda(x) s_\lambda(y) = \prod_{i,j \geq 1} \frac{1}{1 - x_i y_j}. \quad (2.1)$$

Απόδειξη. Το δεξί μέλος της (2.1) γράφεται ως

$$\prod_{i,j \geq 1} \frac{1}{1 - x_i y_j} = \prod_{i,j \geq 1} \sum_{a_{ij} \geq 0} (x_i y_j)^{a_{ij}} = \sum_{a_{ij} \geq 0} \prod_{i,j \geq 1} (x_i y_j)^{a_{ij}}.$$

Επομένως, ο συντελεστής του $x^\alpha y^\beta$, όπου $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ και $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots)$ στο παραπάνω ανάπτυγμα ισούται με το πλήθος των \mathbb{N} -πινάκων $A = (a_{ij})_{i,j \geq 1}$ με $\text{row}(A) = \alpha$ και $\text{col}(A) = \beta$. Από την άλλη μεριά, ο συντελεστής του $x^\alpha y^\beta$ στο αριστερό μέλος της (2.1) είναι ίσος με το πλήθος των ζευγών γενικευμένων Young ταμπλώ (P, Q) ίδιου σχήματος με $\text{cont}(P) = \alpha$ και $\text{cont}(Q) = \beta$. Το Θεώρημα 2.3.1 μας πληροφορεί την ισότητα των δυο συντελεστών. \square

Όπως και η αντιστοιχία RS έτσι και η αντιστοιχία RSK εμφανίζει μια αξιοσημείωτη συμμετρία. Πιο συγκεκριμένα, αν ένας \mathbb{N} -πίνακας A με πεπερασμένο φορέα, απεικονίζεται στο ζεύγος γενικευμένων ταμπλώ (P, Q) , τότε ο ανάστροφος A^t απεικονίζεται στο ζεύγος (Q, P) . Περιοριζόμενοι στους συμμετρικούς πίνακες προκύπτει η εξής πρόταση.

Πόρισμα 2.3.3. *Η απεικόνιση RSK περιορίζεται σε μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία από το σύνολο των συμμετρικών \mathbb{N} -πινάκων πεπερασμένου φορέα στο σύνολο των γενικευμένων Young ταμπλώ. Με την αντιστοιχία αυτή το ταμπλώ έχει τύπο $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ αν τα $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ είναι τα αθροίσματα των γραμμών (ή των στηλών) του πίνακα.*

Με χρήση του Πορίσματος 2.3.3 είμαστε σε θέση να αποδείξουμε μια ακόμη ιδιότητα των συναρτήσεων Schur η οποία αποδείχτηκε (αλγεβρικά) πρώτα από τον Schur και στη συνέχεια εμφανίστηκε στο βιβλίο του D. E. Littlewood [29].

Πρόταση 2.3.4.

$$\sum_{\lambda \in \text{Par}} s_{\lambda}(x) = \prod_{i \geq 1} \frac{1}{1-x_i} \prod_{1 \leq i < j} \frac{1}{1-x_i x_j}. \quad (2.2)$$

Απόδειξη. Το δεξί μέλος της (2.2) γράφεται

$$\begin{aligned} \prod_{i \geq 1} \frac{1}{1-x_i} \prod_{1 \leq i < j} \frac{1}{1-x_i x_j} &= \prod_{i \geq 1} \left(\sum_{a_{ii} \geq 0} x_i^{a_{ii}} \right) \prod_{1 \leq i < j} \left(\sum_{a_{ij} \geq 0} (x_i x_j)^{a_{ij}} \right) \\ &= \sum_{a_{ij} \geq 0} \left(\prod_{i=j} x_i^{a_{ii}} \right) \left(\prod_{i < j} (x_i x_j)^{a_{ij}} \right). \end{aligned}$$

Επομένως, ο συντελεστής x^{α} , όπου $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ στο παραπάνω ανάπτυγμα ισούται με το πλήθος των συμμετρικών \mathbb{N} -πινάκων A με πεπερασμένο φορέα και $\text{row}(A) = \alpha$. Από την άλλη μεριά, ο συντελεστής του x^{α} στο αριστερό μέλος της (2.2) ισούται με το πλήθος των γενικευμένων Young ταμπλώ τύπου α . Από το Πρόσιμα 2.3.3 έπεται η ισότητα των δυο συντελεστών. \square

2.4 Quasi-συμμετρικές συναρτήσεις

Στην ενότητα αυτή θα δώσουμε μια ακόμη περιγραφή των συναρτήσεων Schur, εκφράζοντας αυτές ως γραμμικό συνδυασμό στοιχείων της βάσης ενός χώρου μεγαλύτερου από το $\Lambda_{\mathbb{Q}}$. Για να το πετύχουμε αυτό θα χρειαστούμε τη θεωρία των (P, ω) -διαμερίσεων που συναντήσαμε στην Παράγραφο 1.5.

Για μια τυπική δυναμοσειρά $f(x) \in \mathbb{Q}[[x]]$ με $[x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_k^{a_k}] f(x)$ συμβολίζουμε τον συντελεστή του $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_k^{a_k}$ στο $f(x)$, για $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{Z}_{>0}$. Ο επόμενος ορισμός οφείλεται στον I. Gessel [20].

Ορισμός 2.4.1. Μια τυπική δυναμοσειρά $f(x) \in \mathbb{Q}[[x]]$ φραγμένου βαθμού ονομάζεται quasi-συμμετρική συνάρτηση αν για όλα τα $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{Z}_{>0}$ έχουμε

$$[x_{i_1}^{a_1} x_{i_2}^{a_2} \dots x_{i_k}^{a_k}] f(x) = [x_{j_1}^{a_1} x_{j_2}^{a_2} \dots x_{j_k}^{a_k}] f(x)$$

όταν $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ και $j_1 < j_2 < \dots < j_k$.

Από τον ορισμό 2.4.1 βλέπουμε ότι κάθε συμμετρική συνάρτηση είναι quasi-συμμετρική συνάρτηση, αλλά το αντίστροφο γενικά δεν ισχύει. Για παράδειγμα, η τυπική δυναμοσειρά $\sum_{1 \leq i < j} x_i^2 x_j$ είναι quasi-συμμετρική, όχι όμως συμμετρική.

Έστω QSym^n το σύνολο των ομογενών quasi-συμμετρικών συναρτήσεων βαθμού n . Το QSym^n είναι \mathbb{Q} -διανυσματικός χώρος. Μπορεί, επίσης να δειχθεί ότι αν $f \in \text{QSym}^n$ και $g \in \text{QSym}^m$, τότε $fg \in \text{QSym}^{n+m}$. Οπότε, αν θέσουμε

$$\text{QSym} = \text{QSym}^0 \oplus \text{QSym}^1 \oplus \text{QSym}^2 \oplus \dots$$

τότε η QSym είναι μια \mathbb{Q} -άλγεβρα, η οποία ονομάζεται άλγεβρα των quasi-συμμετρικών συναρτήσεων.

Ορισμός 2.4.2. Για σύνθεση $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \vDash n$, n μονωνυμική quasi-συμμετρική συνάρτηση $M_\alpha = M_{n,\alpha}(x) \in \text{QSym}^n$ ορίζεται ως

$$M_{n,\alpha} = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} x_{i_1}^{\alpha_1} x_{i_2}^{\alpha_2} \dots x_{i_k}^{\alpha_k}.$$

Είναι εμφανές ότι κάθε $f \in \text{QSym}^n$ μπορεί να γραφεί ως

$$f(x) = \sum_{\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \vDash n} ([x_{i_1}^{\alpha_1} x_{i_2}^{\alpha_2} \dots x_{i_k}^{\alpha_k}] f(x)) M_{n,\alpha}.$$

Επομένως, το σύνολο $\{M_{n,\alpha} : \alpha \vDash n\}$ αποτελεί βάση του \mathbb{Q} -διανυσματικού χώρου QSym^n . Το πλήθος των συνθέσεων του n είναι ίσο με 2^{n-1} . Πράγματι, σε κάθε σύνθεση $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \vDash n$, αντιστοιχεί ένα υποσύνολο του $[n-1]$ το οποίο συμβολίζουμε

$$S_\alpha = \{\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \dots, \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{k-1}\}$$

και σε κάθε υποσύνολο $S = \{s_1 < s_2 < \dots < s_k\} \subseteq [n-1]$ αντιστοιχεί μια σύνθεση του n , την οποία συμβολίζουμε

$$\text{co}(S) = (s_1, s_2 - s_1, s_3 - s_2, \dots, n - s_k),$$

ώστε $\text{co}(S_\alpha) = \alpha$ και $S_{\text{co}(S)} = S$. Άρα,

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\text{QSym}^n) = 2^{n-1}.$$

Ορισμός 2.4.3. Για $\alpha \vDash n$, n θεμελιώδης quasi-συμμετρική συνάρτηση $F_{n,\alpha} = F_{n,\alpha}(x) \in \text{QSym}^n$ ορίζεται ως

$$F_{n,\alpha} = \sum_{\substack{i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_n \\ j \in S_\alpha \Rightarrow i_j < i_{j+1}}} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n}.$$

Ισοδύναμα, για $S \subseteq [n-1]$ ορίζεται

$$F_{n,S} = \sum_{\substack{i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_n \\ j \in S \Rightarrow i_j < i_{j+1}}} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n}.$$

Παρατηρούμε ότι για $S = \emptyset$ έχουμε $F_{n,\emptyset} = h_n$ και για $S = [n-1]$ έχουμε $F_{n,[n-1]} = e_n$. Για σύνθεση $\alpha \vDash n$, από τον Ορισμό 2.4.3 προκύπτει η σχέση

$$F_{n,\alpha} = \sum_{S_\alpha \subseteq T \subseteq [n-1]} M_{n,\text{co}(T)} \quad (2.3)$$

ομαδοποιώντας τις ακολουθίες $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_n$ ανάλογα αν $i_j < i_{j+1}$ ή $i_j = i_{j+1}$. Για παράδειγμα, για $n = 4$ και $\alpha = (1, 2, 1)$ έχουμε $S_\alpha = \{1, 3\}$ και

$$\begin{aligned} F_{4,(1,2,1)} &= \sum_{i_1 < i_2 \leq i_3 < i_4} x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4} \\ &= \sum_{i_1 < i_2 = i_3 < i_4} x_{i_1} x_{i_2}^2 x_{i_4} + \sum_{i_1 < i_2 < i_3 < i_4} x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4} \\ &= M_{4,(1,2,1)} + M_{4,(1,1,1,1)}. \end{aligned}$$

Το σύνολο $\{F_{n,\alpha} : \alpha \vDash n\}$ αποτελεί βάση του \mathbb{Q} -διανυσματικού χώρου QSym^n . Για να το δούμε αυτό, ας θυμηθούμε την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού. Αν $f, g : 2^{[n]} \rightarrow \mathbb{C}$ δυο συναρτήσεις, όπου $2^{[n]}$ είναι το σύνολο όλων των υποσυνόλων του $[n]$, τότε

$$f(S) = \sum_{S \subseteq T \subseteq [n]} g(T)$$

για κάθε $S \subseteq [n]$ αν και μόνο αν

$$g(S) = \sum_{S \subseteq T \subseteq [n]} (-1)^{\#T \setminus S} f(T)$$

για κάθε $S \subseteq [n]$. Η αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού είναι ειδική περίπτωση του θεωρήματος αντιστροφής Möbius του G. C. Rota, για τη περίπτωση της άλγεβρας Boole τάξης n . Για περισσότερες πληροφορίες παραπέμπουμε στο [41, Κεφάλαιο 3]. Επομένως, από την σχέση 2.3 και την αρχή εγκλεισμού-αποκλεισμού έπεται ότι

$$M_{n,\alpha} = \sum_{S_\alpha \subseteq T \subseteq [n-1]} (-1)^{\#T \setminus S_\alpha} F_{n,\text{co}(T)}$$

και προκύπτει το ζητούμενο.

Θα εξετάσουμε τώρα τη σχέση που έχουν οι quasi-συμμετρικές συναρτήσεις με τη θεωρία των (P, ω) -διαμερίσεων που είδαμε στην παράγραφο 1.5. Στα πλαίσια αυτής της παραγράφου είναι βολικό να δουλεύουμε με τις αντίστροφες έννοιες από αυτές της Παραγράφου 1.5.

Για $w = w_1 w_2 \cdots w_n \in \mathfrak{S}_n$, μια συνάρτηση $f : [n] \rightarrow \mathbb{N}$ ονομάζεται αντιστρόφως w -συμβατή αν

(α) $f(w_1) \leq f(w_2) \leq \cdots \leq f(w_n)$

(β) Αν $w_i > w_{i+1}$ για κάποιο $1 \leq i \leq n-1$, τότε $f(w_i) < f(w_{i+1})$.

Εξακολουθεί να ισχύει ότι για κάθε συνάρτηση $f : [n] \rightarrow \mathbb{N}$, υπάρχει μοναδική $w \in \mathfrak{S}_n$ έτσι ώστε $n \vdash f$ να είναι αντιστρόφως w -συμβατή. Αν $\mathcal{A}^f(w)$ είναι το σύνολο όλων των αντιστρόφως w -συμβατών συναρτήσεων, τότε

$$F_{n,\text{Des}(w)} = \sum_{f \in \mathcal{A}^f(w)} \chi^f$$

όπου

$$\chi^f = \chi_{f(1)} \chi_{f(2)} \cdots \chi_{f(n)}.$$

Έστω (P, \leq_P) μερικώς διατεταγμένο σύνολο με $\#P = n$ και $\omega : P \rightarrow [n]$ μια επιγραφή. Μια αντίστροφη (P, ω) -διαμέριση είναι μια απεικόνιση $\sigma : P \rightarrow \mathbb{Z}_{>0}$ έτσι ώστε

(α) Αν $s \leq_P t$, τότε $\sigma(s) \leq \sigma(t)$.

(β) Αν $s <_P t$ και $\omega(s) > \omega(t)$, τότε $\sigma(s) < \sigma(t)$.

Έστω $\mathcal{A}^r(P, \omega)$ το σύνολο των αντίστροφων (P, ω) -διαμερίσεων και S_w^r το σύνολο των συναρτήσεων $\sigma : P \rightarrow \mathbb{Z}_{>0}$ για τις οποίες η $\sigma' : [n] \rightarrow \mathbb{Z}_{>0}$ με

$$\sigma'(i) = \sigma(\omega^{-1}(i))$$

για $i \in [n]$ είναι αντιστρόφως w -συμβατή για κάποια $w \in \mathfrak{S}_n$. Το Λήμμα 1.5.4 εξακολουθεί να ισχύει στην αντίστροφη μορφή του.

Λήμμα 2.4.4. Μια συνάρτηση $\sigma : P \rightarrow \mathbb{Z}_{>0}$ είναι αντίστροφη (P, ω) -διαμέριση αν και μόνο αν η σ' είναι αντιστρόφως w -συμβατή, για κάποια $w \in \mathfrak{L}(P, \omega)$. Ισοδύναμα,

$$\mathcal{A}^r(P, \omega) = \bigsqcup_{w \in \mathfrak{L}(P, \omega)} S_w^r.$$

Έστω

$$K_{P, \omega} = K_{P, \omega}(x) = \sum_{\sigma \in \mathcal{A}^r(P, \omega)} x^\sigma$$

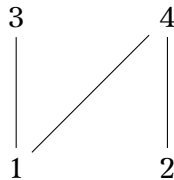
η γεννήτρια συνάρτηση που σχετίζεται με τις αντίστροφες (P, ω) -διαμερίσεις, όπου

$$x^\sigma = \prod_{s \in P} x_{\sigma(s)} = \prod_{i \geq 1} x_i^{\#\sigma^{-1}(i)}.$$

Η $K_{P, \omega}$ είναι quasi-συμμετρική συνάρτηση. Πράγματι, στο ανάπτυγμα της σε μονωνυμικές γεννήτριες συναρτήσεις, για $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \models n$ ο συντελεστής του $M_{n, \alpha}$ είναι το πλήθος των αντίστροφων (P, ω) -διαμερίσεων $\sigma : P \rightarrow \mathbb{Z}_{>0}$ ώστε $\#\sigma^{-1}(1) = \alpha_1, \#\sigma^{-1}(2) = \alpha_2, \dots, \#\sigma^{-1}(k) = \alpha_k$. Από το Λήμμα 2.4.4 έπεται ότι

$$\begin{aligned} K_{P, \omega} &= \sum_{\sigma \in \mathcal{A}^r(P, \omega)} x^\sigma \\ &= \sum_{w \in \mathfrak{L}(P, \omega)} \sum_{\sigma \in S_w^r} x^\sigma \\ &= \sum_{w \in \mathfrak{L}(P, \omega)} \sum_{\substack{\sigma(\omega^{-1}(w_1)) \leq \dots \leq \sigma(\omega^{-1}(w_n)) \\ j \in \text{Des}(w) \Rightarrow \sigma(\omega^{-1}(w_j)) < \sigma(\omega^{-1}(w_{j+1}))}} \prod_{s \in P} x_{\sigma(s)} \\ &= \sum_{w \in \mathfrak{L}(P, \omega)} F_{n, \text{Des}(w)}. \end{aligned}$$

Για παράδειγμα, αν $P = \{a, b, c, d\}$ με σχέσεις κάλυψης $a <_P b, d$ και $c <_P d$ και επιγραφή ω όπως παρακάτω



Σχήμα 2.3: Το μερικώς διατεταγμένο σύνολο P με επιγραφή $\omega(a) = 1, \omega(b) = 3, \omega(c) = 2$ και $\omega(d) = 4$.

τότε το σύνολο Jordan-Hölder του P είναι

$$\mathcal{L}(P, \omega) = \{3142, 3124, 1342, 1324, 1234\}.$$

Το Λήμμα 2.4.4 μας πληροφορεί ότι κάθε αντίστροφη (P, ω) -διαμέριση $\sigma : P \rightarrow \mathbb{Z}_{>0}$ πρέπει να ικανοποιεί μια εκ των παρακάτω συνθηκών

$$\begin{cases} \sigma'(3) < \sigma'(1) \leq \sigma'(4) < \sigma'(2) \\ \sigma'(3) < \sigma'(1) \leq \sigma'(2) \leq \sigma'(4) \\ \sigma'(1) \leq \sigma'(3) \leq \sigma'(4) < \sigma'(2) \\ \sigma'(1) \leq \sigma'(3) < \sigma'(2) \leq \sigma'(4) \\ \sigma'(1) \leq \sigma'(2) \leq \sigma'(3) \leq \sigma'(4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma(c) < \sigma(a) \leq \sigma(d) < \sigma(b) \\ \sigma(c) < \sigma(a) \leq \sigma(b) \leq \sigma(d) \\ \sigma(a) \leq \sigma(c) \leq \sigma(d) < \sigma(b) \\ \sigma(a) \leq \sigma(c) < \sigma(b) \leq \sigma(d) \\ \sigma(a) \leq \sigma(b) \leq \sigma(c) \leq \sigma(d) \end{cases} . \quad (2.4)$$

Άρα,

$$\begin{aligned} K_{P,\omega} &= \sum_{\sigma \in \mathcal{A}^+(P,\omega)} x^\sigma \\ &= \sum_{\sigma \text{ όπως στις σχέσεις 2.4}} x_{\sigma(a)} x_{\sigma(b)} x_{\sigma(c)} x_{\sigma(d)} \\ &= F_{4,\{1,3\}} + F_{4,\{1\}} + F_{4,\{3\}} + F_{4,\emptyset}. \end{aligned}$$

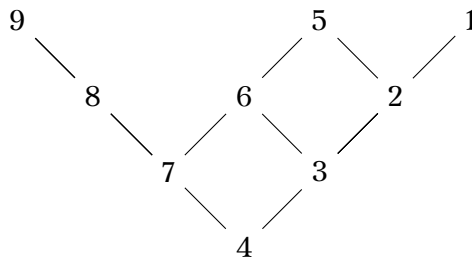
Συμπερασματικά,

$$K_{P,\omega} = \sum_{w \in \mathcal{L}(P,\omega)} F_{n, \text{Des}(w)}. \quad (2.5)$$

Θέλουμε τώρα να εφαρμόσουμε την σχέση 2.5 για τις συναρτήσεις Schur. Έστω $\lambda \vdash n$ και P_λ το μερικώς διατεταγμένο σύνολο της Παραγράφου 1.5, του οποίου τα στοιχεία είναι τα τετράγωνα του διαγράμματος Young Y_λ με τη μερική διάταξη της γειτνίασης. Θεωρούμε την επιγραφή $\omega_\lambda : P_\lambda \rightarrow [n]$ η οποία δίνει τις τιμές $1, 2, \dots$ στα τετράγωνα της πρώτης στήλης του P_λ ξεκινώντας από κάτω προς τα πάνω και συνεχίζει στα τετράγωνα της δεύτερης στήλης κ.ο.κ. μέχρι να εξαντληθούν οι στήλες του P_λ . Η ω_λ ονομάζεται επιγραφή Schur. Για παράδειγμα, για $n = 9$ και $\lambda = (4, 2, 2, 1)$ η επιγραφή Schur $\omega_{(4,2,2,1)}$ ως διάγραμμα Young είναι

4	7	8	9
3	6		
2	5		
1			

και ως μερικώς διατεταγμένο σύνολο είναι



Παρατηρούμε ότι μια αντίστροφη $(P_\lambda, \omega_\lambda)$ -διαμέριση δεν είναι παρά ένα γενικευμένο Young ταμπλώ σχήματος λ . Επομένως, η γεννήτρια συνάρτηση που αντιστοιχεί στις αντίστροφες $(P_\lambda, \omega_\lambda)$ -διαμερίσεις είναι η συνάρτηση Schur, δηλαδή

$$K_{P_\lambda, \omega_\lambda} = s_\lambda. \tag{2.6}$$

Από την άλλη μεριά, κάθε γραμμική επέκταση $\xi : P_\lambda \rightarrow [n]$ (δηλαδή 1-1 και επί απεικόνιση που διατηρεί τη διάταξη) αντιστοιχεί σε ένα Young ταμπλώ $T_\xi \in SYT_\lambda$ όπως είδαμε στην Πρόταση 1.5.6 καθώς και σε μια μετάθεση $w_\xi \in \mathfrak{S}_n$ που δίνεται από

$$w_\xi = (\omega_\lambda(\xi^{-1}(1)), \omega_\lambda(\xi^{-1}(2)), \dots, \omega_\lambda(\xi^{-1}(n))).$$

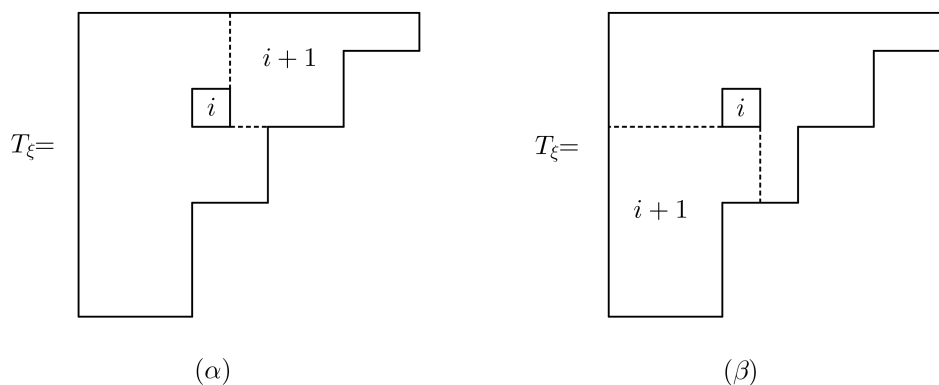
Λήμμα 2.4.5. *Αν $\xi : P_\lambda \rightarrow [n]$ είναι γραμμική επέκταση του P_λ , τότε $\text{Des}(T_\xi) = \text{Des}(w_\xi)$.*

Απόδειξη. Έστω $1 \leq i \leq n-1$ και $s = (a, b), t = (a', b')$ τα τετράγωνα του T_ξ που περιέχουν τα i και $i+1$ αντίστοιχα. Έχουμε τις εξής περιπτώσεις

(α) $a' \leq a$ και $b' > b$ και

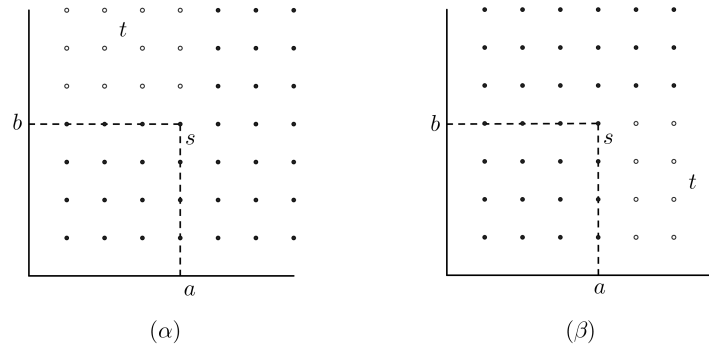
(β) $a' > a$ και $b' \leq b$

όπως φαίνονται στο σχήμα 2.4.



Σχήμα 2.4: Οι πιθανές θέσεις των i και $i+1$ στο T_ξ .

Στην πρώτη περίπτωση είναι προφανές ότι $i \notin \text{Des}(T_\xi)$ και ότι $\omega_\lambda(s) < \omega_\lambda(t)$. Συνεπώς, $i \notin \text{Des}(w_\xi)$. Στη δεύτερη περίπτωση έχουμε $i \in \text{Des}(T_\xi)$ και ότι $\omega_\lambda(s) > \omega_\lambda(t)$. Οπότε $i \in \text{Des}(w_\xi)$, όπως θέλαμε.



Σχήμα 2.5: Οι πιθανές θέσεις των s και t σχεδιάζοντας το P_λ ως υποσύνολο του $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Οι θέσεις του t συμβολίζονται με κενές τελείες.

□

Στο τρέχον παράδειγμα, ας διαλέξουμε $\xi : P_{(4,2,2,1)} \rightarrow [n]$ τη γραμμική επέκταση του $P_{(4,2,2,1)}$ που δίνει τις τιμές 1, 2, 3, 4 στα τετράγωνα της πρώτης στήλης του $P_{(4,2,2,1)}$ από πάνω προς τα κάτω, τις τιμές 5, 6, 7 στα τετράγωνα της δεύτερης στήλης από πάνω προς τα κάτω κ.ο.κ. Τότε

$$T_\xi = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 5 & 8 & 9 \\ \hline 2 & 6 & & \\ \hline 3 & 7 & & \\ \hline 4 & & & \\ \hline \end{array}$$

και

$$w_\xi = (4, 3, 2, 1, 7, 6, 5, 8, 9)$$

και έχουμε $\text{Des}(T_\xi) = \text{Des}(w_\xi) = \{1, 2, 3, 5, 6\}$ σε συμφωνία με το Λήμμα 2.4.5.

Αντικαθιστώντας τη σχέση (2.6) στη (2.5) και εφαρμόζοντας το Λήμμα 2.4.5 έχουμε το ζητούμενο ανάπτυγμα των συναρτήσεων Schur.

Θεώρημα 2.4.6. Για διαμέριση $\lambda \vdash n$,

$$s_\lambda = \sum_{T \in \text{SYT}(\lambda)} F_{n, \text{Des}(T)}.$$

2.5 Σύνδεση με τη θεωρία αναπαραστάσεων της \mathfrak{S}_n

Η τελευταία περιγραφή των συναρτήσεων Schur που θα δώσουμε περιέχει τους ανάγωγους χαρακτήρες της συμμετρικής ομάδας \mathfrak{S}_n . Για το σκοπό αυτό θα χρειαστεί να περιγράψουμε τα (ανάγωγα) \mathfrak{S}_n -πρότυπα Specht. Θεωρούμε τη βασική θεωρία αναπαραστάσεων γνωστή και παραπέμπουμε για οποιοδήποτε συμβολισμό και έννοια δεν εξηγούμε στα [27, 35].

Για $w \in \mathfrak{S}_n$, κυκλικός τύπος της w ονομάζεται n διαμέριση (a_1, a_2, \dots, a_l) , όπου a_i είναι το μήκος του i -οστού κύκλου της w , στην κυκλική της μορφή, όταν

οι κύκλοι έχουν διαταχθεί σύμφωνα με τα μήκη τους σε φθίνουσα σειρά. Είναι γνωστό ότι δυο μεταθέσεις είναι συζυγείς αν και μόνο αν έχουν τον ίδιο κυκλικό τύπο. Οπότε το πλήθος των κλάσεων συζυγίας της συμμετρικής ομάδας \mathfrak{S}_n είναι ίσο με $p(n)$. Όμως, το πλήθος των κλάσεων συζυγίας μιας πεπερασμένης ομάδας είναι ίσο με το πλήθος των ανάγωγων χαρακτήρων της. Άρα, το πλήθος των ανάγωγων χαρακτήρων της \mathfrak{S}_n είναι και αυτό ίσο με $p(n)$.

Για διαμέριση $\lambda \vdash n$, ταμπλώ σχήματος λ ονομάζεται μια αρίθμηση των τετραγώνων του διαγράμματος Young της Y_λ , δηλαδή μια 1-1 και επί αντιστοιχία των τετραγώνων του Y_λ με το $[n]$ χωρίς περιορισμούς. Δυο ταμπλώ ίδιου σχήματος λέμε ότι είναι ισοδύναμα αν και μόνο αν οι αντίστοιχες γραμμές των ταμπλώ περιέχουν τα ίδια στοιχεία. Για παράδειγμα

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 7 & 4 & 1 & 2 \\ \hline 3 & 5 & & \\ \hline 8 & 6 & & \\ \hline \end{array} \sim \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 4 & 7 & 2 & 1 \\ \hline 5 & 3 & & \\ \hline 8 & 6 & & \\ \hline \end{array}$$

ενώ

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 7 & 4 & 1 & 2 \\ \hline 3 & 5 & & \\ \hline 8 & 6 & & \\ \hline \end{array} \not\sim \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 5 & 8 & 1 & 2 \\ \hline 3 & 7 & & \\ \hline 6 & 4 & & \\ \hline \end{array}.$$

Μια κλάση ισοδυναμίας ταμπλώ σχήματος λ ονομάζεται ταμπλοειδές σχήματος λ και γράφουμε $\{t\}$ για το ταμπλοειδές, όπου t είναι αντιπρόσωπος της κλάσης ισοδυναμίας. Για παράδειγμα,

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 & 7 \\ \hline 3 & 5 & & \\ \hline 6 & 8 & & \\ \hline \end{array} \quad \text{και} \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 5 & 8 \\ \hline 3 & 7 & & \\ \hline 4 & 6 & & \\ \hline \end{array}$$

είναι δυο ταμπλοειδή σχήματος $(4, 2, 2)$. Αν $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$, τότε το πλήθος των ταμπλοειδών σχήματος λ είναι ίσο με $\frac{n!}{\lambda!}$, όπου $\lambda! = \lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_k!$.

Η \mathfrak{S}_n δρα στο σύνολο των ταμπλώ $t = (t_{ij})$ σχήματος λ ως εξής:

$$w \cdot t = (w(t_{ij}))$$

για κάθε $w \in \mathfrak{S}_n$. Η δράση αυτή επάγει μια δράση της \mathfrak{S}_n στο σύνολο των ταμπλοειδών σχήματος λ

$$w \cdot \{t\} = \{w \cdot t\}$$

για κάθε $w \in \mathfrak{S}_n$. Συμβολίζουμε με M^λ την αναπαράσταση μεταθέσεων της παραπάνω δράσης. Τότε $\dim_{\mathbb{C}} M^\lambda = \frac{n!}{\lambda!}$ και μπορεί να αποδείξει κανείς ότι το M^λ είναι κυκλικό \mathfrak{S}_n -πρότυπο που παράγεται από κάθε ταμπλοειδές σχήματος λ .

Παράδειγμα 2.5.1. Για $\lambda = (n)$ έχουμε μόνο ένα ταμπλοειδές

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & \dots & n \\ \hline \end{array}$$

και το $M^{(n)}$ δεν είναι άλλο από την τετριμμένη αναπαράσταση της \mathfrak{S}_n . Για $\lambda = (1^n)$, κάθε ταμπλοειδές σχήματος λ αντιστοιχεί σε μια μετάθεση της \mathfrak{S}_n και γι αυτό το $M^{(1^n)}$ είναι η κανονική αναπαράσταση της \mathfrak{S}_n . Τέλος, αν $\lambda = (n-1, 1)$, τότε κάθε ταμπλοειδές σχήματος λ καθορίζεται μοναδικά από το στοιχείο που βρίσκεται στη δεύτερη γραμμή του. Με άλλα λόγια, το $M^{(n-1, 1)}$ είναι ισόμορφο με την αναπαράσταση μεταθέσεων που αντιστοιχεί στη συνήθη δράση της \mathfrak{S}_n στο $[n]$.

Για παράδειγμα, για $n = 3$ έχουμε τις διαμερίσεις (3) , $(2, 1)$ και $(1, 1, 1)$. Από το Παράδειγμα 2.5.1 τα πρότυπα $M^{(3)}$, $M^{(2, 1)}$ και $M^{(1, 1, 1)}$ αντιστοιχούν στο τετριμμένο, το $\mathbb{C}[3]$ και την κανονική αναπαράσταση αντίστοιχα, των οποίων τις τιμές των χαρακτήρων $\phi^{(3)}$, $\phi^{(2, 1)}$ και $\phi^{(1, 1, 1)}$ μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε

	$K_{(1^3)}$	$K_{(2, 1)}$	$K_{(3)}$
$\phi^{(3)}$	1	1	1
$\phi^{(2, 1)}$	3	1	0
$\phi^{(1^3)}$	6	0	0

Σχήμα 2.6: Οι τιμές των χαρακτήρων της \mathfrak{S}_3 που αντιστοιχούν στα πρότυπα $M^{(3)}$, $M^{(2, 1)}$ και $M^{(1, 1, 1)}$, όπου $K_{(1^3)}$, $K_{(2, 1)}$ και $K_{(3)}$ είναι οι κλάσεις συζυγίας που αντιστοιχούν στις διαμερίσεις των υποδεικτών αντίστοιχα.

Η ομοιότητα των τιμών του Σχήματος 2.6 με τους συντελεστές στο ανάπτυγμα των δυναμοπροσθετικών συμμετρικών συναρτήσεων στη βάση των μονωνυμικών συναρτήσεων που βρήκαμε στην Παράγραφο 2.1 δεν είναι τυχαία, όπως μας πληροφορεί η επόμενη πρόταση.

Πρόταση 2.5.2. Για $\lambda \vdash n$

$$p_\lambda(x) = \sum_{\mu \vdash n} \phi^\mu(\lambda) m_\mu(x)$$

όπου $\phi^\mu(\lambda)$ είναι η τιμή του χαρακτήρα του προτύπου M^μ στην κλάση συζυγίας της \mathfrak{S}_n κυκλικού τύπου λ .

Απόδειξη. Έστω $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) \vdash n$. Τότε

$$p_\lambda(x) = \left(\sum_{i \geq 1} x_i^{\lambda_1} \right) \left(\sum_{i \geq 1} x_i^{\lambda_2} \right) \cdots \left(\sum_{i \geq 1} x_i^{\lambda_k} \right) = \sum_{\mu \vdash n} b_{\lambda\mu} m_\mu(x)$$

όπου για $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_l)$, το $b_{\lambda\mu}$ είναι ο συντελεστής του

$$x^\mu = x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \cdots x_l^{\mu_l}$$

στο $p_\lambda(x)$. Συνεπώς, το $b_{\lambda\mu}$ ισούται με το πλήθος των διαμερίσεων (B_1, B_2, \dots, B_l) του $[k]$ με

$$\mu_j = \sum_{i \in B_j} \lambda_i$$

για $1 \leq j \leq l$.

Από την άλλη μεριά, το $\phi^\mu(\lambda)$ είναι ίσο με το πλήθος των ταμπλοειδών t σχήματος μ για τα οποία $w \cdot t = t$, όπου $w \in \mathfrak{S}_n$ με κυκλικό τύπο λ . Άρα, $b_{\lambda\mu} = \phi^\mu(\lambda)$. \square

Για ταμπλώ t σχήματος λ , έστω $C(t)$ η υποομάδα της \mathfrak{S}_n που σταθεροποιεί τις στήλες του t . Για παράδειγμα, για

$$t = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 7 & 4 & 1 & 2 \\ \hline 3 & 5 & & \\ \hline 8 & 6 & & \\ \hline \end{array}$$

έχουμε

$$C(t) = \mathfrak{S}(\{3, 7, 8\}) \times \mathfrak{S}(\{4, 5, 6\}) \times \mathfrak{S}(\{1\}) \times \mathfrak{S}(\{2\}) \cong \mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_1$$

όπου το ευθύ γινόμενο είναι εσωτερικό. Το στοιχείο του προτύπου M^λ της μορφής

$$e_T = \sum_{w \in C(T)} \epsilon(w) w \cdot \{T\}$$

όπου $\epsilon(w)$ είναι το πρόσημο της w , ονομάζεται πολυταμπλοειδές σχήματος λ . Ο υπόχωρος S^λ του M^λ ο οποίος παράγεται γραμμικά από τα πολυταμπλοειδή σχήματος λ ονομάζεται πρότυπο Specht. Αποδεικνύεται ότι τα πρότυπα Specht είναι κυκλικά ανάγωγα \mathfrak{S}_n -πρότυπα με

$$S^\lambda \cong_{\mathfrak{S}_n} S^\mu \Rightarrow \lambda = \mu$$

για $\lambda, \mu \vdash n$. Μια γνωστή βάση του \mathbb{C} -διανυσματικού χώρου S^λ είναι το σύνολο $\{e_t : t \in \text{SYT}(\lambda)\}$. Επομένως, τα πρότυπα Specht είναι όλα τα ανάγωγα πρότυπα της \mathfrak{S}_n και γι' αυτό

$$\dim_{\mathbb{C}}(S^\lambda) = f^\lambda.$$

Αφού η τάξη $n!$ της \mathfrak{S}_n ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των διαστάσεων των S^λ έπεται ότι

$$\sum_{\lambda \vdash n} (f^\lambda)^2 = n!$$

αποδεικνύοντας αλγεβρικά τη σχέση (1.6), την οποία είδαμε συνδυαστικά μέσω της αντιστοιχίας RS στη Παράγραφο 1.4.

Κάθε πρότυπο M^λ διασπάται σε ανάγωγα \mathfrak{S}_n -πρότυπα. Επομένως, τα πρότυπα Specht εμφανίζονται στη διάσπαση αυτή με κάποια πολλαπλότητα (πιθανώς μηδέν). Το επόμενο θεώρημα, γνωστό ως κανόνας του Young μας πληροφορεί για τις πολλαπλότητες αυτές.

Θεώρημα 2.5.3 (Κανόνας του Young). Για $\mu \vdash n$

$$M^\mu \cong_{\mathfrak{S}_n} \bigoplus_{\lambda \vdash n} K_{\lambda\mu} S^\lambda$$

όπου $K_{\lambda\mu}$ είναι αριθμός Kostka όπως ορίστηκε στην Παράγραφο 2.2.

Για την απόδειξη αυτού του σημαντικού θεωρήματος παραπέμπουμε στο [35, Θεώρημα 2.11.2]. Συμβολίζουμε με Cl_n το \mathbb{C} -διανυσματικό χώρο των συναρτήσεων $f : \mathfrak{S}_n \rightarrow \mathbb{C}$ οι οποίες είναι σταθερές σε κάθε κλάση συζυγίας της \mathfrak{S}_n (οι συναρτήσεις αυτές ονομάζονται class functions). Οι χαρακτήρες είναι τέτοιες συναρτήσεις. Για $f, g \in Cl_n$ θέτουμε

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{n!} \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} \overline{f(w)} g(w).$$

Γνωρίζουμε ότι το σύνολο των ανάγωγων χαρακτήρων της \mathfrak{S}_n αποτελεί ορθοκανονική βάση του Cl_n ως προς το \langle, \rangle και επιπλέον αν $\chi, \psi \in Cl_n$ χαρακτήρες με χ ανάγωγος, τότε η τιμή $\langle \chi, \psi \rangle$ ισούται με τη πολλαπλότητα εμφάνισης του χ στη διάσπαση του ψ σε ανάγωγους χαρακτήρες.

Έστω χ^λ ο χαρακτήρας του προτύπου Specht S^λ για $\lambda \vdash n$ και έστω $\chi^\lambda(\mu)$ η τιμή του χ^λ στην κλάση συζυγίας της \mathfrak{S}_n κυκλικού τύπου μ . Για μια διαμέριση μ μπορούμε να γράψουμε

$$\mu = (1^{m_1}, 2^{m_2}, \dots, n^{m_n})$$

όπου m_i είναι το πλήθος των δεικτών j με $\mu_j = i$. Μπορεί να δείξει κανείς ότι η κλάση συζυγίας της \mathfrak{S}_n που αντιστοιχεί στην μ έχει ακριβώς $\frac{n!}{z_\mu}$ στοιχεία, όπου $z_\mu = \prod_{i=1}^n i^{m_i} m_i!$.

Πρόταση 2.5.4. Για $\lambda \vdash n$

$$s_\lambda(x) = \sum_{\mu \vdash n} \frac{1}{z_\mu} \chi^\lambda(\mu) p_\mu(x). \quad (2.7)$$

Απόδειξη. Από τον κανόνα του Young έχουμε

$$K_{\lambda\nu} = \langle \phi^\nu, \chi^\lambda \rangle = \frac{1}{n!} \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} \phi^\nu(w) \chi^\lambda(w) = \sum_{\mu \vdash n} \frac{1}{z_\mu} \phi^\nu(\mu) \chi^\lambda(\mu), \quad (2.8)$$

για $\lambda, \nu \vdash n$. Άρα,

$$\begin{aligned} s_\lambda(x) &= \sum_{\nu \vdash n} K_{\lambda\nu} m_\nu(x) \\ &\stackrel{(2.8)}{=} \sum_{\nu \vdash n} \left(\sum_{\mu \vdash n} \frac{1}{z_\mu} \phi^\nu(\mu) \chi^\lambda(\mu) \right) m_\nu(x) \\ &= \sum_{\mu \vdash n} \frac{1}{z_\mu} \chi^\lambda(\mu) \left(\sum_{\nu \vdash n} \phi^\nu(\mu) m_\nu(x) \right) \\ &= \sum_{\mu \vdash n} \frac{1}{z_\mu} \chi^\lambda(\mu) p_\mu(x) \end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα έπεται από τη Πρόταση 2.5.2. □

Τέλος, αναφέρουμε το αποτέλεσμα της Άσκησης 7.69 (β) του [42], το οποίο θα μας φανεί χρήσιμο στο Κεφάλαιο 4. Σημειώνουμε επίσης, ότι το αποτέλεσμα αυτό ισχύει γενικότερα για πεπερασμένες ομάδες για τις οποίες κάθε αναπαράσταση είναι ισοδύναμη με πραγματική αναπαράσταση. Επομένως και για την υπεροκταεδρική ομάδα, την οποία θα συναντήσουμε στο Κεφάλαιο 3.

Πρόταση 2.5.5. Για $w \in \mathfrak{S}_n$

$$\sum_{\lambda \vdash n} \chi^\lambda(w) = \#\{u \in \mathfrak{S}_n : u^2 = w\}.$$

Κεφάλαιο 3

Πολυώνυμα Euler για την υπεροκταεδρική ομάδα

3.1 B-κάθοδοι και B-πολυώνυμα Euler

Έστω $\Omega_n = \{1, 2, \dots, n\} \cup \{-1, -2, \dots, -n\}$ εφοδιασμένο με την επαγόμενη ολική διάταξη των ακεραίων.

Ορισμός 3.1.1. Το σύνολο των 1-1 και επί απεικονίσεων $w : \Omega_n \rightarrow \Omega_n$ με την ιδιότητα

$$w(-a) = -w(a) \quad (3.1)$$

για κάθε $a \in \Omega_n$ εφοδιασμένο με τη πράξη της σύνθεσης απεικονίσεων ονομάζεται υπεροκταεδρική ομάδα και συμβολίζεται με B_n . Τα στοιχεία της B_n ονομάζονται προσημασμένες μεταθέσεις (signed permutations).

Παρατηρούμε ότι η υπεροκταεδρική ομάδα B_n έχει $2^n n!$ στοιχεία. Για συντομία, για μια $w \in B_n$, θα γράφουμε $w = w(1)w(2)\dots w(n)$ με μια μπάρα πάνω από τα στοιχεία που ανήκουν στο $\{-1, -2, \dots, -n\}$ και θα συμπληρώνουμε σύμφωνα με τον κανόνα (3.1). Για παράδειγμα, για $n = 5$ μια προσημασμένη μετάθεση είναι $n w = \bar{2}13\bar{4}\bar{5}$.

Ορισμός 3.1.2. Έστω $w \in B_n$. Ένας ακέραιος $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ ονομάζεται B-κάθοδος της w , αν $w(i) > w(i+1)$, όπου $w(0) = 0$ κατά σύμβαση. Συμβολίζουμε με $\text{Des}_B(w)$ το σύνολο των B-καθόδων της w , δηλαδή

$$\text{Des}_B(w) = \{i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\} : w(i) > w(i+1)\}$$

και θέτουμε $\text{des}_B(w) = \#\text{Des}_B(w)$.

Για παράδειγμα, για $n = 5$, η $w = \bar{2}13\bar{4}\bar{5} \in B_5$ έχει $\text{Des}_B(w) = \{0, 3, 4\}$ και $\text{des}_B(w) = 3$. Το πολυώνυμο

$$B_n(x) = \sum_{w \in B_n} x^{\text{des}_B(w)}$$

ονομάζεται B-πολυώνυμο Euler, όπου $B_0(x) = 1$ κατά σύμβαση. Μερικές τιμές του είναι οι εξής

$$B_1(x) = 1 + x$$

$$B_2(x) = 1 + 6x + x^2$$

$$B_3(x) = 1 + 23x + 23x^2 + x^3$$

$$B_4(x) = 1 + 76x + 230x^2 + 76x^3 + x^4$$

$$B_5(x) = 1 + 237x + 1682x^2 + 1682x^3 + 237x^4 + x^5$$

$$B_6(x) = 1 + 722x + 10543x^2 + 23548x^3 + 10543x^4 + 722x^5 + x^6.$$

Εύκολα παρατηρεί κανείς ότι τα B-πολυώνυμα Euler είναι παλινδρομικά με κέντρο συμμετρίας $\frac{n}{2}$. Η παρακάτω πρόταση συγκεντρώνει κάποιες βασικές ιδιότητες των B-πολυωνύμων Euler ανάλογες των Προτάσεων 1.1.3 και 1.1.4.

Πρόταση 3.1.3. *Ισχύουν τα εξής:*

(α) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{m \geq 0} (2m+1)^n x^m = \frac{B_n(x)}{(1-x)^{n+1}}.$$

(β) Για κάθε $n \geq 1$ ισχύει

$$B_n(x) = ((2n-1)x+1)B_{n-1}(x) + 2(x-x^2)B'_{n-1}(x).$$

(γ) (Εκθετική γεννήτρια συνάρτηση)

$$\sum_{n \geq 0} B_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{(x-1)e^{t(x-1)}}{x - e^{2t(x-1)}}.$$

Παρατηρούμε επίσης ότι

$$B_1(x) = 1 + x$$

$$B_2(x) = (1+x)^2 + 4x$$

$$B_3(x) = (1+x)^3 + 20x(1+x)$$

$$B_4(x) = (1+x)^4 + 72x(1+x)^2 + 80x^2$$

$$B_5(x) = (1+x)^5 + 232x(1+x)^3 + 976x^2(1+x).$$

$$B_6(x) = (1+x)^6 + 716x(1+x)^4 + 7664x^2(1+x)^2 + 3904x^3$$

Όπως επιβεβαιώνεται από τον παραπάνω υπολογισμό για $n \leq 6$, τα B-πολυώνυμα Euler είναι γ-μη αρνητικά. Αυτό αποδείχτηκε από τον Stembridge [44] σε γενικότερο πλαίσιο για πολυώνυμα Euler που προκύπτουν από πεπερασμένες ομάδες Coxeter. Η υπεροκταεδρική ομάδα B_n είναι μια ομάδα Coxeter τύπου B. Στην παρούσα εργασία δε θα μας απασχολήσει η συνδυαστική θεωρία των ομάδων Coxeter. Παραπέμπουμε τον ενδιαφερόμενο αναγνώστη στα [9, 25] και [33, Μέρος 3].

Το 2007 ο T.K. Petersen [32] έδωσε μια συνδυαστική ερμηνεία για το γ -διάγραμμα των B-πολυωνύμων Euler παρόμοια με αυτή της Πρότασης 1.2.1, την οποία θα παρουσιάσουμε στην επόμενη πρόταση. Η απόδειξη βασίζεται στη δράση FSS που συναντήσαμε στην απόδειξη της Πρότασης 1.2.1 με κάποιες διαφοροποιήσεις. Για $u \in \mathfrak{S}_n$ θέτουμε $u(0) = 0$ και $u(n+1) = n+1$. Το πλήθος των αριστερών κορυφών της u ορίζεται να είναι

$$\text{lpk}(u) = \#\{i \in [n-1] : u(i-1) < u(i) > u(i+1)\}.$$

Πρόταση 3.1.4 (Petersen [32]). *Για κάθε $n \geq 1$*

$$B_n(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \gamma_{n,j}^B x^j (1+x)^{n-2j} \tag{3.2}$$

όπου

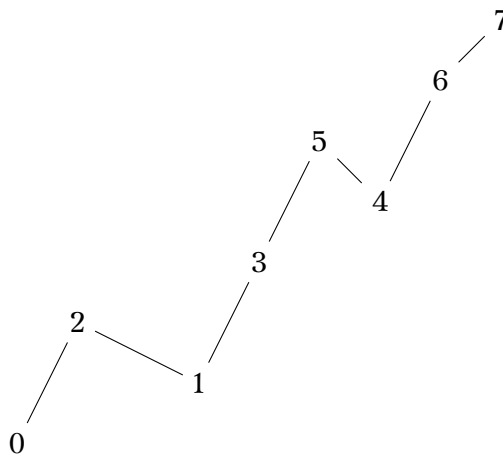
$$\gamma_{n,j}^B = 4^j \#\{u \in \mathfrak{S}_n : \text{lpk}(u) = j\}$$

για κάθε j .

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε μια μετάθεση $u \in \mathfrak{S}_n$ και θεωρούμε το σύνολο $B(u)$ των 2^n προσημασμένων μεταθέσεων της B_n από τις οποίες προκύπτει n u αν παραλείψουμε τα πρόσημα των εισόδων τους, δηλαδή

$$B(u) = \{w \in B_n : |w(i)| = u(i), \text{ για κάθε } 1 \leq i \leq n\}.$$

Για παράδειγμα, αν $u = 213546$, τότε $\bar{2}1\bar{3}\bar{5}4\bar{6}, \bar{2}13\bar{5}\bar{4}\bar{6}, 2\bar{1}354\bar{6} \in B(u)$ μεταξύ άλλων. Θα δείξουμε ότι η κατανομή του Euler (B-κάθοδοι) επί των στοιχείων της $B(u)$ είναι γ -μη αρνητική για κάθε $u \in \mathfrak{S}_n$ και εξαρτάται από το πλήθος των αριστερών κορυφών της u .



Σχήμα 3.1: Η γραφική παράσταση της μετάθεσης u . Η u έχει 2 αριστερές κορυφές και 2 κοιλάδες.

Η βασική ιδέα είναι ότι έχοντας υπολογίσει τις κοιλάδες και τις κορυφές της u , οι B-κάθοδοι μιας $w \in B(u)$ καθορίζονται (ανεξάρτητα) από τις επιλογές

προσήμες των στοιχείων που δε βρίσκονται σε κοιλάδα ή που βρίσκονται σε κορυφή. Πιο συγκεκριμένα, για $w \in B(u)$, γράφουμε $w(i) = \sigma_i u(i)$ για κάποιο $\sigma_i \in \{-1, +1\}$ για $1 \leq i \leq n$. Παρατηρούμε ότι

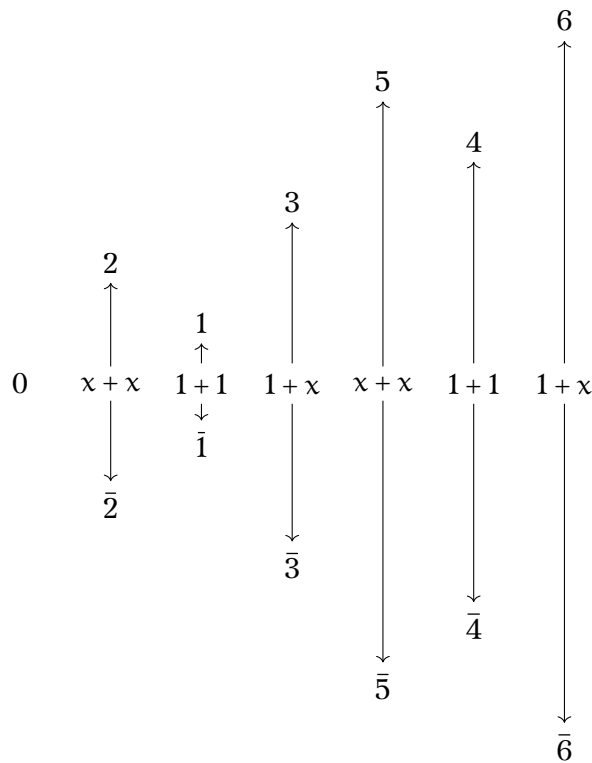
- $i - 1 \in \text{Des}_B(w)$ αν $u(i - 1) < u(i)$ και $\sigma_i = -1$ και
- $i - 1 \in \text{Des}_B(w)$ αν $u(i - 1) > u(i)$ και $\sigma_{i-1} = +1$.

Με άλλα λόγια, το πρόσημο σ_i καθορίζει την B-κάθοδο στη θέση $i - 1$ αν και μόνο αν $i - 1 \notin \text{Des}(u)$ και καθορίζει την B-κάθοδο στη θέση i αν και μόνο αν $i \in \text{Des}(u)$.

Στο τρέχον παράδειγμα έχουμε $\text{Des}(u) = \{1, 4\}$. Επομένως, σύμφωνα με την παρατήρηση, για $w \in B(u)$ έχουμε $0 \in \text{Des}_B(w)$ αν και μόνο αν $\sigma_1 = -1$, το $u(2) = 1$ είναι μικρότερο από τα γειτονικά του στοιχεία (δηλαδή είναι κοιλάδα) και γι αυτό το σ_2 δεν επηρεάζει τις B-καθόδους της w , $2 \in \text{Des}_B(w)$ αν και μόνο αν $\sigma_3 = 1$, $3 \in \text{Des}_B(w)$ αν και μόνο αν $\sigma_4 = -1$ και $4 \in \text{Des}_B(w)$ αν και μόνο αν $\sigma_4 = +1$, το $u(5) = 4$ είναι και αυτό κοιλάδα και δεν επηρεάζει τις B-καθόδους της w και τέλος $5 \in \text{Des}_B(w)$ αν και μόνο αν $\sigma_6 = -1$. Ανάλογα με το πρόσημο κάθε εισόδου κάθε $w \in B(u)$ προκύπτει ότι

$$\sum_{w \in B(u)} x^{\text{des}_B(w)} = (x + x)(1 + 1)(1 + x)(x + x)(1 + 1)(1 + x) = 8x^2(1 + x)^2.$$

Ο παραπάνω υπολογισμός γίνεται καλύτερα αντιληπτός κοιτάζοντας το επόμενο σχήμα.



Θέτοντας

$$c_i(u) = \begin{cases} 2x, & \text{αν } u(i-1) < u(i) > u(i+1) \\ 2, & \text{αν } u(i-1) > u(i) < u(i+1) \\ 1+x, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

για κάθε $1 \leq i \leq n$, έπεται ότι

$$\sum_{w \in B(u)} x^{\text{des}_B(w)} = \prod_{i=1}^n c_i(u).$$

Κάθε αριστερή κορυφή συνεισφέρει ένα παράγοντα $2x$ στο παραπάνω γινόμενο, κάθε κοιλάδα ένα παράγοντα 2 και κάθε άλλο στοιχείο ένα παράγοντα $1+x$. Συνεπώς, αν n u έχει k αριστερές κορυφές, τότε έχει k κοιλάδες και γι αυτό $n-2k$ θέσεις οι οποίες δεν είναι ούτε αριστερές κορυφές, ούτε κοιλάδες. Επομένως,

$$\sum_{w \in \mathfrak{S}_n} x^{\text{des}_B(w)} = (4x)^{\text{lpk}(u)} (1+x)^{n-2\text{lpk}(u)} \quad (3.3)$$

και αθροίζοντας της σχέση (3.3) πάνω από όλες τις μεταθέσεις $u \in \mathfrak{S}_n$ έχουμε

$$B_n(x) = \sum_{u \in \mathfrak{S}_n} \sum_{w \in B(u)} x^{\text{des}_B(w)} = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \gamma_{n,j}^B x^j (1+x)^{n-2j}$$

όπου

$$\gamma_{n,j}^B = 4^j \#\{u \in \mathfrak{S}_n : \text{lpk}(u) = j\}$$

για κάθε j . □

Τώρα στρέφουμε την προσοχή μας στις αυτοαντίστροφες προσημασμένες μεταθέσεις, των οποίων το σύνολο συμβολίζουμε με I_n^B . Για $n \geq 1$ θεωρούμε το B-πολυώνυμο Euler περιορισμένο στην κλάση των αυτοαντίστροφων προσημασμένων μεταθέσεων

$$I_n^B(x) = \sum_{w \in I_n^B} x^{\text{des}_B(w)}.$$

Μερικές τιμές του είναι οι εξής:

$$I_1^B(x) = 1+x$$

$$I_2^B(x) = 1+4x+x^2$$

$$I_3^B(x) = 1+9x+9x^2+x^3$$

$$I_4^B(x) = 1+17x+40x^2+17x^3+x^4$$

$$I_5^B(x) = 1+28x+127x^2+127x^3+28x^4+x^5$$

$$I_6^B(x) = 1+43x+331x^2+632x^3+331x^4+43x^5+x^6.$$

Στο Κεφάλαιο 4 θα αποδείξουμε την παλινδρομικότητα και τη μονοτροπία που εμφανίζουν τα πολυώνυμα $I_n^B(x)$, το οποίο αποτελεί και το βασικό αποτέλεσμα της παρούσας εργασίας. Στην επόμενη παράγραφο θα αποδείξουμε την παλινδρομικότητά του, με τρόπο όμοιο με αυτό του Strehl της Πρότασης 1.4.8 του $I_n(x)$, εισάγοντας ένα B-ανάλογο της αντιστοιχίας Robinson-Schensted.

Τέλος, υπολογίζουμε την εκθετική γεννήτρια συνάρτηση του πλήθους των αυτοαντίστροφων προσημασμένων μεταθέσεων.

Πρόταση 3.1.5. Έστω $b_n = \#I_n^B$, για $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ και $b_0 = 1$. Τότε

$$\sum_{n \geq 0} b_n \frac{x^n}{n!} = e^{2x+x^2}. \quad (3.4)$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι αν διαλέξουμε μια μετάθεση του συνόλου $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$ όπου $\epsilon_i \in \{i, -i\}$ για κάθε $1 \leq i \leq n$, τότε μπορούμε να τη συμπληρώσουμε σε μετάθεση του Ω_n σύμφωνα με τον κανόνα (3.1). Επομένως, το b_n απαριθμεί το πλήθος των διαμερίσεων του $[n]$ σε μέρη που έχουν ένα ή δυο στοιχεία επιλεγώντας τα δυο φορές. Οπότε αν θέσουμε $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ με $h(n) = b_n$ για $n \in \mathbb{N}$ και $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ με

$$f(n) = \begin{cases} 2, & n \in \{1, 2\} \\ 0, & n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\} \end{cases}$$

έχουμε

$$h(n) = \sum_{\pi \in \Pi_n} f(\#B_1) \cdots f(\#B_k)$$

και για αυτό από τον εκθετικό τύπο έπεται ότι

$$\sum_{n \geq 0} b_n \frac{x^n}{n!} = E_h(x) = \exp(E_f(x)) = \exp\left(\sum_{n \geq 0} f(n) \frac{x^n}{n!}\right) = e^{2x+x^2}.$$

□

Πόρισμα 3.1.6. Έστω $b_n = \#I_n^B$, για $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ και $b_0 = 1$. Τότε

(α) Για $n \geq 1$

$$b_{n+1} = 2(b_n + nb_{n-1}).$$

(β) Για $n \in \mathbb{N}$

$$b_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \frac{(2k)!}{k!} 2^{n-2k}.$$

Απόδειξη. (α) Παραγωγίζοντας την (1.14) ως προς x έχουμε

$$\sum_{n \geq 0} b_{n+1} \frac{x^n}{n!} = (2 + 2x)e^{2x+x^2} = 2(1+x) \sum_{n \geq 0} b_n \frac{x^n}{n!}.$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές του x^n στα ακραία μέλη της προηγούμενης σχέσης προκύπτει ο ζητούμενος τύπος.

(β) Αναπτύσσουμε την τυπική δυναμοσειρά e^{2x+x^2} ως εξής:

$$\begin{aligned} e^{2x+x^2} &= e^{2x} e^{x^2} \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n}}{2^n n!} \sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n}}{n!} \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{2^{n-2k}}{(n-2k)! k!} x^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} \frac{(2k)!}{k!} 2^{n-2k} \frac{x^n}{n!}. \end{aligned}$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές του x^n στην (3.4) χρησιμοποιώντας τον παραπάνω υπολογισμό προκύπτει ο ζητούμενος τύπος. □

3.2 Προσημασμένα σύνολα και διμερή Young ταμπλώ

Στη παράγραφο αυτή θα συστηματικοποιήσουμε την έννοια της προσήμανσης. Η ορολογία σε αυτή, καθώς και στις επόμενες παραγράφους ακολουθεί κυρίως το [3]. Έστω $\Omega_n = \{1, 2, \dots, n\} \cup \{\bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{n}\}$. Η απόλυτη τιμή ενός στοιχείου $a \in \Omega_n$ είναι το στοιχείο του $[n]$ που προκύπτει από το a , αν αφαιρέσουμε την μπάρα (αν έχει). Ένα στοιχείο $a \in \Omega$ το οποίο έχει μπάρα, θα το αποκαλούμε προσημασμένο. Στο Ω_n θεωρούμε την ολική διάταξη

$$\bar{1} <_r \bar{2} <_r \dots <_r \bar{n} <_r 1 <_r 2 <_r \dots <_r n$$

που αντιστοιχεί στη δεξιά λεξικογραφική διάταξη στο $[n] \times \{-, +\}$.

Μια προσημασμένη σύνθεση (signed composition) του n είναι μια (συνήθης) σύνθεση του n της οποίας κάποια μέρη είναι προσημασμένα. Για κάθε σύνθεση του n με k μέρη έχουμε 2^k επιλογές προσήμανσης και το πλήθος των συνθέσεων του n με k μέρη είναι ίσο με $\binom{n-1}{k-1}$, για $1 \leq k \leq n$. Άρα, το πλήθος των προσημασμένων συνθέσεων του n είναι ίσο με

$$\sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} 2^k = 2 \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} 2^k = 2 \cdot 3^{n-1}.$$

Για μια προσημασμένη σύνθεση γράφουμε $\alpha \models n$.

Στη παράγραφο 2.4 είδαμε ότι οι συνθέσεις του $[n]$ είναι σε 1-1 και επί αντιστοιχία με το σύνολο των υποσυνόλων του $[n-1]$. Ισοδύναμα, για $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \models n$, μπορούμε να ορίσουμε

$$S_\alpha = \{\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \dots, \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = n\}$$

και η απεικόνιση $\alpha \mapsto S_\alpha$ να είναι 1-1 και επί αντιστοιχία μεταξύ του συνόλου των συνθέσεων του n και του συνόλου των υποσυνόλων του $[n]$ που περιέχουν το n . Θα διατηρήσουμε τον ίδιο συμβολισμό, αφού δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης. Για κάθε προσημασμένη σύνθεση $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ του n , ορίζουμε τη συνάρτηση-πρόσημο $\epsilon : S_\alpha \rightarrow \{-, +\}$ όπου

$$\epsilon(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_i) = \begin{cases} -, & \text{αν το } i\text{-οστό μέρος της } \alpha \text{ είναι προσημασμένο} \\ +, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Αν με $\Sigma^B(n)$ συμβολίσουμε το σύνολο των ζευγών (S, ϵ) όπου S είναι υποσύνολο του $[n]$ το οποίο περιέχει το n και $\epsilon : S \rightarrow \{-, +\}$ απεικόνιση, τότε η συνάρτηση $\alpha \mapsto (S_\alpha, \epsilon) \in \Sigma^B(n)$ για α προσημασμένη μετάθεση είναι αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία. Τα στοιχεία του συνόλου $\Sigma^B(n)$ ονομάζονται προσημασμένα σύνολα.

Για $\sigma = (S, \epsilon) \in \Sigma^B(n)$ με $S = \{s_1 < s_2 < \dots < s_k = n\}$ επεκτείνουμε τη συνάρτηση-πρόσημο στην $\tilde{\epsilon} : [n] \rightarrow \{-, +\}$ με $\tilde{\epsilon}(j) = \epsilon(s_i)$ για $s_{i-1} < j \leq s_i$ για κάθε $1 \leq i \leq k$, όπου $s_0 = 0$. Το $\tilde{\epsilon}$ ονομάζεται διάνυσμα πρόσημου του σ . Επίσης,

ορίζουμε $wDes(\sigma)$ να είναι το σύνολο των στοιχείων του $S \setminus \{n\}$ για τα οποία $\epsilon(s_i) = \epsilon(s_{i+1})$ ή $\epsilon(s_i) = +$ και $\epsilon(s_{i+1}) = -$.

Για παράδειγμα, για $n = 8$ και $\alpha = (\bar{1}, 3, 2, \bar{2})$ έχουμε

$$(S_\alpha, \epsilon) = (\{1, 4, 6, 8\}, (-, +, +, -))$$

και $wDes((S_\alpha, \epsilon)) = \{4, 6\}$. Το διάνυσμα προσήμου του προσημασμένου συνόλου του παραδείγματος είναι $\tilde{\epsilon} = (-, +, +, +, +, +, -, -)$.

Ορισμός 3.2.1. Έστω $w \in B_n$. Το προσημασμένο σύνολο καθόδων (signed descent set) της w , το οποίο συμβολίζεται με $sDes(w)$, ορίζεται ως το προσημασμένο σύνολο $(S, \epsilon) \in \Sigma^B(n)$ όπου

- (α) το S περιέχει το n ,
- (β) για $s \in [n - 1]$ το s είναι στοιχείο του S αν $w(s) >_r w(s + 1)$ ή αν το $w(s)$ είναι προσημασμένο ενώ το $w(s + 1)$ όχι.
- (γ) για κάθε $s \in S$, η συνάρτηση-πρόσημο ορίζεται ως εξής

$$\epsilon(s) = \begin{cases} -, & \text{αν το } w(s) \text{ είναι προσημασμένο} \\ +, & \text{διαφορετικά} \end{cases}.$$

Για παράδειγμα, για $n = 5$ και $w = \bar{2}13\bar{4}\bar{5}$, έχουμε $sDes(w) = (\{1, 3, 5\}, (-, +, -))$. Παρατηρούμε επίσης ότι για κάθε $w \in B_n$

$$wDes(sDes(w)) = \{i \in [n - 1] : w(i) >_r w(i + 1)\}$$

και γι αυτό αν θέσουμε $w(0) = 0$ και

$$Des^B(w) = \{i \in \{0, 1, 2, \dots, n - 1\} : w(i) >_r w(i + 1)\},$$

όπου $\bar{1} <_r \bar{2} <_r \dots <_r \bar{n} <_r 0 <_r 1 <_r 2 <_r \dots <_r n$, τότε έπεται ότι

$$B_n(x) = \sum_{w \in B_n} x^{\#Des^B(w)}.$$

Διαμέριση με δυο μέρη (bipartition) ενός ακεραίου $n \geq 1$ ονομάζεται ένα ζεύγος διαμερίσεων (λ, μ) οι οποίες μπορεί να είναι και κενές, ώστε $\lambda \vdash k$ και $\mu \vdash n - k$, για κάθε $0 \leq k \leq n$. Συμβολίζουμε με \emptyset την κενή διαμέριση. Για μια διαμέριση με δυο μέρη του n γράφουμε $(\lambda, \mu) \vdash n$. Για παράδειγμα, για $n = 3$ έχουμε τις εξείς διαμερίσεις με δυο μέρη :

$$(\emptyset, (3)), (\emptyset, (2, 1)), (\emptyset, (1, 1, 1)), ((1), (2)), ((1), (1, 1)), \\ ((2), (1)), ((1, 1), (1)), ((3), \emptyset), ((2, 1), \emptyset), ((1, 1, 1), \emptyset).$$

Ορισμός 3.2.2. Έστω $(\lambda, \mu) \vdash n$. Διμερές Young ταμπλώ (standard Young bitableaux) σχήματος (λ, μ) ονομάζεται το ζεύγος ταμπλώ $Q = (Q^+, Q^-)$ των οποίων οι αριθμοί που αντιστοιχούν στις γραμμές αυξάνουν (αυστηρά) από τα αριστερά προς τα δεξιά και οι αριθμοί που αντιστοιχούν στις στήλες αυξάνουν (αυστηρά) από πάνω προς τα κάτω ώστε

- (α) το Q^+ έχει σχήμα λ
- (β) το Q^- έχει σχήμα μ
- (γ) κάθε στοιχείο του $[n]$ εμφανίζεται ακριβώς μια φορά είτε στο Q^+ είτε στο Q^- .

Για παράδειγμα, για $n = 10$ και αμφιδιαμέριση $\lambda = ((3, 2), (2, 2, 1))$ ένα διμερές Young ταμπλώ σχήματος λ είναι

$$Q = \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 5 & 8 \\ \hline 6 & 7 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 4 \\ \hline 3 & 9 \\ \hline 10 \\ \hline \end{array} \right).$$

Το σύνολο των διμερών Young ταμπλώ σχήματος (λ, μ) συμβολίζουμε με $SYB(\lambda, \mu)$. Για $Q = (Q^+, Q^-) \in SYB(\lambda, \mu)$, ο ακέραιος $i \in [n - 1]$ ονομάζεται B-κάθοδος του Q αν

- (α) το i και το $i + 1$ εμφανίζονται στο ίδιο ταμπλώ (Q^+ ή Q^-) και το $i + 1$ βρίσκεται σε χαμηλότερη σειρά από το i
- (β) το i εμφανίζεται στο Q^+ και το $i + 1$ εμφανίζεται στο Q^- .

Το σύνολο των B-καθόδων του Q συμβολίζουμε με $Des_B(Q)$ και θέτουμε

$$des_B(Q) = \begin{cases} \#Des_B(Q), & 1 \in Q^+ \\ \#Des_B(Q) + 1, & 1 \in Q^- \end{cases}.$$

Στο τρέχον παράδειγμα έχουμε $Des_B(Q) = \{2, 5, 8, 9\}$ και $des_B(Q) = 4$.

Ορισμός 3.2.3. Έστω $Q = (Q^+, Q^-) \in SYB(\lambda, \mu)$. Το προσημασμένο σύνολο καθόδων του Q , το οποίο συμβολίζεται με $sDes(Q)$, ορίζεται ως το προσημασμένο σύνολο $(S, \epsilon) \in \Sigma^B(n)$, όπου

- (α) το S περιέχει το n
- (β) για $s \in [n - 1]$, το s είναι στοιχείο του S αν τα s και $s + 1$ εμφανίζονται στο ίδιο ταμπλώ (Q^+ ή Q^-) και το $s + 1$ εμφανίζεται χαμηλότερα από το s ή αν τα s και $s + 1$ εμφανίζονται σε διαφορετικό ταμπλώ
- (γ) για κάθε $s \in S$, η συνάρτηση-πρόσημο ορίζεται ως εξής

$$\epsilon(s) = \begin{cases} -, & \text{αν το } s \text{ εμφανίζεται στο } Q^- \\ +, & \text{αν το } s \text{ εμφανίζεται στο } Q^+ \end{cases}$$

Στο τρέχον παράδειγμα έχουμε $sDes(Q) = (\{1, 2, 4, 5, 8, 9, 10\}, (-, +, -, +, +, -, -))$. Παρατηρούμε ότι για το διάνυσμα προσήμου που αντιστοιχεί στο $sDes(Q)$ ισχύει ότι

$$\tilde{\epsilon}(i) = \begin{cases} -, & \text{αν το } i \text{ εμφανίζεται στο } Q^- \\ +, & \text{αν το } i \text{ εμφανίζεται στο } Q^+ \end{cases}$$

για κάθε $i \in [n]$. Επίσης, ισχύει ότι $w\text{Des}(s\text{Des}(Q)) = \text{Des}_B(Q)$.

Η ακόλουθη γενίκευση της αντιστοιχίας Robinson-Schensted εμφανίστηκε πρώτη φορά στο [39, Σελίδες 145-146] και έπειτα στο [43]. Έστω $w \in B_n$ και $(w(a_1), \dots, w(a_k))$ η υπακολουθία των μη προσημασμένων στοιχείων της w . Εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο της αντιστοιχίας Robinson-Schensted στην γενικευμένη μετάθεση

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_k \\ w(a_1) & w(a_2) & \dots & w(a_k) \end{pmatrix}$$

προκύπτει ένα ζεύγος ταμπλώ $(P^+(w), Q^+(w))$ σχήματος $\lambda \vdash k$. Όμοια, εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο για την υπακολουθία των προσημασμένων στοιχείων της w προκύπτει ένα ακόμη ζεύγος ταμπλώ $(P^-(w), Q^-(w))$ σχήματος $\mu \vdash n - k$. Θέτουμε $P^B(w) = (P^+(w), P^-(w))$ και $Q^B(w) = (Q^+(w), Q^-(w))$.

Θεώρημα 3.2.4 (Αντιστοιχία RS στην B_n). *Η απεικόνιση*

$$w \mapsto (P^B(w), Q^B(w))$$

είναι αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία από το σύνολο των προσημασμένων μεταθέσεων στο σύνολο των ζευγών διμερών Young ταμπλώ ίδιου σχήματος.

Για παράδειγμα, για $w = \bar{2}16\bar{5}\bar{4}3\bar{7}$ οι υπακολουθίες των μη προσημασμένων εισόδων και των προσημασμένων εισόδων είναι

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 7 \\ 2 & 5 & 4 & 7 \end{pmatrix} \text{ και } \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

αντίστοιχα. Εκτελώντας τα βήματα της αντιστοιχίας RS σε κάθε μια από αυτές προκύπτουν τα εξής διμερή Young ταμπλώ

$$P^B(w) = \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 6 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 4 & 7 \\ \hline 5 & & \\ \hline \end{array} \right)$$

και

$$Q^B(w) = \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 6 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 7 \\ \hline 5 & & \\ \hline \end{array} \right).$$

Το φαινόμενο συμμετρίας που εμφανίζει η αντιστοιχία Robinson-Schensted δε θα μπορούσε να λείπει από ένα B-ανάλογό της.

Πρόταση 3.2.5. *Για $w \in B_n$ ισχύει ότι*

(α) $P^B(w^{-1}) = Q^B(w)$ και

(β) $s\text{Des}(w) = s\text{Des}(Q^B(w))$.

Η απόδειξη της πρότασης 3.2.5 είναι άμεση συνέπεια των ορισμών και των αντίστοιχων προτάσεων για τη συμμετρική ομάδα. Άμεσο πόρισμα της παραπάνω πρότασης είναι οι εξής σχέσεις

$$\sum_{(\lambda, \mu) \vdash n} (f^{(\lambda, \mu)})^2 = 2^n n!$$

και

$$\sum_{(\lambda, \mu) \vdash n} f^{(\lambda, \mu)} = \#I_n^B,$$

όπου $f^{(\lambda, \mu)}$ είναι το πλήθος των διμερών Young ταμπλώ σχήματος (λ, μ) . Από την απόδειξη της πρότασης 1.4.7 προκύπτει το εξής.

Πρόταση 3.2.6. Για κάθε $n \geq 1$

$$I_n^B(x) = \sum_{Q \in \text{SYB}_n} x^{\text{des}_B(Q)} \quad (3.5)$$

όπου SYB_n είναι το σύνολο όλων των διμερών Young ταμπλώ στο $[n]$.

Θα χρησιμοποιήσουμε το τύπο (3.5) για να πάρουμε μια συνδυαστική ερμηνεία της παλινδρομικότητας των συντελεστών του πολυωνύμου $I_n^B(x)$. Η ιδέα είναι η ίδια με εκείνη του Strehl για το πολυώνυμο $I_n(x)$. Για $Q = (Q^+, Q^-) \in \text{SYB}_n$, ορίζουμε $(Q^t)^+ = (Q^-)^t$ και $(Q^t)^- = (Q^+)^t$ και θέτουμε $Q^t = ((Q^t)^+, (Q^t)^-) \in \text{SYB}_n$ το ανάστροφο διμερές Young ταμπλώ.

Πρόταση 3.2.7. Για κάθε $n \geq 1$ το πολυώνυμο $I_n^B(x)$ είναι παλινδρομικό με κέντρο συμμετρίας $\frac{n}{2}$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι ο ακέραιος $i \in [n-1]$ είναι B-κάθοδος ενός διμερούς Young ταμπλώ $Q = (Q^+, Q^-)$ αν και μόνο αν το i είναι B-άνοδος (δηλαδή δεν είναι B-κάθοδος) του ανάστροφου Q^t . Επίσης, αν το 1 εμφανίζεται στο Q^- , τότε στο ανάστροφο ταμπλώ θα εμφανίζεται στο $(Q^t)^+$, δηλαδή δε θα είναι B-κάθοδος, όμοια και στη περίπτωση που εμφανίζεται στο Q^+ . Άρα, η απεικόνιση $\phi : \text{SYB}_n \rightarrow \text{SYB}_n$ με $\phi(Q) = Q^t$ είναι αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση από το σύνολο των διμερών ταμπλώ Q με $\text{des}_B(Q) = k$ στο σύνολο των διμερών ταμπλώ Q με $\text{des}_B(Q) = n - k$, για κάθε $0 \leq k \leq n$ και έχουμε το ζητούμενο. \square

3.3 Προσημασμένες quasi-συμμετρικές συναρτήσεις

Στη παράγραφο 2.4 εισάγαμε την έννοια της quasi-συμμετρικής συνάρτησης και γράψαμε τις συνάρτησεις Schur ως γραμμικό συνδυασμό των θεμελιωδών quasi-συμμετρικών συναρτήσεων, πιο συγκεκριμένα

$$s_\lambda = \sum_{Q \in \text{SYT}(\lambda)} F_{n, \text{Des}(Q)}(x)$$

για τυχαία διαμέριση $\lambda \vdash n$ (βλ. θεώρημα 2.4.6). Σκοπός αυτής της παραγράφου είναι να δείξουμε μια ανάλογη σχέση, όπου το άθροισμα αυτή τη φορά να διατρέχει τα διμερή Young ταμπλώ. Για να το πετύχουμε αυτό θα χρειαστούμε ένα B-ανάλογο των quasi-συμμετρικών συναρτήσεων. Διάφορα τέτοια ανάλογα έχουν αναπτυχθεί, βλ. για παράδειγμα [13, 31, 34]. Εμείς θα χρησιμοποιήσουμε την έννοια της προσημασμένης quasi-συμμετρικής συνάρτησης του Poirier. Σημειώνουμε ότι ιδιότητες αυτής έχουν μελετηθεί περαιτέρω από τους Bergeron-Hogweg [8].

Ορισμός 3.3.1. Έστω $x = (x_1, x_2, \dots)$ και $y = (y_1, y_2, \dots)$ δυο σύνολα (ανεξάρτητων) μεταβλητών. Μια τυπική δυναμοσειρά $f(x, y) \in \mathbb{Q}[[x, y]]$ φραγμένου βαθμού ονομάζεται προσημασμένη quasi-συμμετρική συνάρτηση (signed quasisymmetric function) αν για κάθε προσημασμένη σύνθεση $(\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ έχουμε

$$[z_{i_1}^{\alpha_1} \dots z_{i_k}^{\alpha_k}] f(x, y) = [z_{j_1}^{\alpha_1} \dots z_{j_k}^{\alpha_k}] f(x, y)$$

για $i_1 < \dots < i_k$ και $j_1 < \dots < j_k$, όπου κάθε z_i γίνεται y_i ή x_i ανάλογα με το αν το i -οστό μέρος της προσημασμένης σύνθεσης $(\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ είναι προσημασμένο ή όχι αντίστοιχα.

Συμβολίζουμε με $s\text{QSym}^n$ το σύνολο των ομογενών προσημασμένων quasi-συμμετρικών συναρτήσεων βαθμού n . Το $s\text{QSym}^n$ είναι \mathbb{Q} -διανυσματικός χώρος και επιπλέον αν $f \in s\text{QSym}^n$ και $g \in s\text{QSym}^m$, τότε $fg \in s\text{QSym}^{n+m}$. Έτσι θέτουμε

$$s\text{QSym} = s\text{QSym}^0 \oplus s\text{QSym}^1 \oplus s\text{QSym}^2 \oplus \dots$$

όπου $s\text{QSym}^0 = \mathbb{Q}$, το $s\text{QSym}$ είναι διαβαθμισμένη άλγεβρα και ονομάζεται άλγεβρα των προσημασμένων quasi-συμμετρικών συναρτήσεων.

Για $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ προσημασμένη σύνθεση του n , ορίζουμε την μονωνυμική προσημασμένη quasi-συμμετρική συνάρτηση $M_\alpha = M_\alpha(x, y) \in s\text{QSym}^n$ ως εξής

$$M_\alpha = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} z_{i_1}^{\alpha_1} z_{i_2}^{\alpha_2} \dots z_{i_k}^{\alpha_k}$$

όπου κάθε z_{i_j} γίνεται y_{i_j} ή x_{i_j} ανάλογα με το αν το j -οστό μέρος της προσημασμένης σύνθεσης $(\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ είναι προσημασμένο ή όχι αντίστοιχα. Το σύνολο $\{M_\alpha : \alpha \models n\}$ αποτελεί βάση του \mathbb{Q} -διανυσματικού χώρου $s\text{QSym}^n$ και γι αυτό

$$\dim_{\mathbb{Q}}(s\text{QSym}^n) = 2 \cdot 3^{n-1}.$$

Για προσημασμένο σύνολο $\sigma = (S, \epsilon) \in \Sigma^B(n)$ ορίζουμε τη θεμελιώδη προσημασμένη quasi-συμμετρική συνάρτηση $F_\sigma = F_\sigma(x, y) \in s\text{QSym}^n$ ως εξής

$$F_\sigma = \sum_{\substack{i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_n \\ j \in w\text{Des}(\sigma) \Rightarrow i_j < i_{j+1}}} z_{i_1} z_{i_2} \dots z_{i_n}$$

όπου

$$z_{i_j} = \begin{cases} x_{i_j}, & \text{αν } \tilde{\epsilon}(j) = + \\ y_{i_j}, & \text{αν } \tilde{\epsilon}(j) = - \end{cases}.$$

Το σύνολο $\{F_\sigma : \sigma \in \Sigma^B(n)\}$ αποτελεί και αυτό βάση του \mathbb{Q} -διανυσματικού χώρου $s\text{QSym}^n$ (βλ. [24]). Για παράδειγμα, για $n = 8$ και $\sigma = (S, \epsilon) = (\{1, 4, 6, 8\}, (-, +, +, -))$ έχουμε δει ότι $w\text{Des}(\sigma) = \{4, 6\}$ και γι αυτό

$$F_\sigma(x, y) = \sum_{i_1 \leq i_2 \leq i_3 < i_4 \leq i_5 < i_6 \leq i_7 \leq i_8} y_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4} x_{i_5} x_{i_6} y_{i_7} y_{i_8}$$

αφού το διάνυσμα πρόσημα που αντιστοιχεί στο σ είδαμε ότι είναι το $\tilde{\epsilon} = (-, +, +, +, +, +, -, -)$.

Οι θεμελιώδεις προσημασμένες quasi-συμμετρικές συναρτήσεις συνδέονται με φυσικό τρόπο με τα προσημασμένα σύνολα καθόδων διμερών Young ταμπλώ. Το επόμενο θεώρημα περιγράφει αυτή τη σχέση και οφείλεται στους R. Adin, C. Athanasiadis, S. Elizalde και Y. Roichman [3, Πρόταση 4.2].

Θεώρημα 3.3.2 (Adin et al. [3]). Για τυχαίες διαμερίσεις λ, μ

$$s_\lambda(x)s_\mu(y) = \sum_{Q \in \text{SYB}(\lambda, \mu)} F_{\text{sDes}(Q)}(x, y). \quad (3.6)$$

Απόδειξη. Αρκεί να βρούμε μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ του συνόλου των ζευγών (S, T) γενικευμένων Young ταμπλώ σχήματος λ και μ αντίστοιχα και του συνόλου των ζευγών (Q, z) των διμερών Young ταμπλώ σχήματος (λ, μ) και των μονώνυμων z που εμφανίζονται στο ανάπτυγμα του $F_{\text{sDes}(Q)}$ έτσι ώστε $x^S y^T = z$.

Έστω (S, T) ζεύγος γενικευμένων Young ταμπλώ σχήματος (λ, μ) αντίστοιχα. Ορίζουμε $Q \in \text{SYB}(\lambda, \mu)$ ως εξής: αριθμούμε τις εισόδους του T οι οποίες είναι ίσες με 1 ξεκινώντας από κάτω προς τα πάνω και συνεχίζοντας από τα αριστερά στα δεξιά, έπειτα αριθμούμε τις εισόδους του S οι οποίες είναι ίσες με 1 με τον ίδιο τρόπο και στη συνέχεια επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία για τις εισόδους των S, T οι οποίες είναι ίσες με 2, 3 κ.ο.κ.. Στη περίπτωση όπου το ταμπλώ S δεν έχει την είσοδο ίση με i , συνεχίζουμε στις εισόδους του T οι οποίες είναι ίσες με i και αν ούτε το T έχει τέτοιες εισόδους, συνεχίζουμε τη διαδικασία για τις εισόδους οι οποίες είναι ίσες με $i + 1$. Τέλος, θέτουμε $z = x^S y^T$.

Για παράδειγμα, για $\lambda = (4, 2, 2, 1), \mu = (5, 3, 3, 2, 1)$ και γενικευμένα ταμπλώ

$$S = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 3 \\ \hline 3 & 3 & & \\ \hline 5 & 7 & & \\ \hline 7 & & & \\ \hline \end{array} \quad \text{και} \quad T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 6 & 6 & 8 \\ \hline 2 & 2 & 7 & & \\ \hline 4 & 5 & 8 & & \\ \hline 5 & 6 & & & \\ \hline 6 & & & & \\ \hline 7 & & & & \\ \hline \end{array}$$

προκύπτει το διμερές ταμπλώ

$$Q = \left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 9 & 10 \\ \hline 7 & 8 & & \\ \hline 12 & 20 & & \\ \hline 19 & & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 17 & 18 & 24 \\ \hline 5 & 6 & 22 & & \\ \hline 11 & 14 & 23 & & \\ \hline 13 & 16 & & & \\ \hline 15 & & & & \\ \hline 16 & & & & \\ \hline \end{array} \right)$$

και το μονώνυμο

$$z = x_1 y_1^2 x_2 y_2^2 x_3^4 y_4 x_5 y_5^2 y_6^4 x_7^2 y_7^2 y_8^2.$$

Επειδή

$$\text{sDes}(Q) = (\{1, 3, 4, 6, 10, 11, 12, 14, 18, 20, 22, 24\}, (+, -, +, -, +, -, +, -, -, +, -, -))$$

το παραπάνω μονώνυμο είναι σε συμφωνία με τη θεμελιώδη προσημασμένη quasi-συμμετρική συνάρτηση

$$F_{\text{sDes}(Q)} = \sum_{\substack{i_1 \leq \dots \leq i_{24} \\ j \in \{1, 4, 10, 12, 14, 20, 22\} \Rightarrow i_j < i_{j+1}}} x_{i_1} \cdots y_{i_{24}}.$$

Η απεικόνιση που κατασκευάσαμε είναι καλά ορισμένα αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία, όπως θέλαμε. \square

3.4 Σύνδεση με τη θεωρία αναπαραστάσεων της B_n

Στη Παράγραφο 2.5 βρήκαμε μια έκφραση των συναρτήσεων Schur ως συνάρτηση των δυναμοπροσθετικών συμμετρικών συναρτήσεων. Η σχέση (2.7) υποδεικνύει ότι υπάρχει άμεση σχέση μεταξύ της συνδυαστικής των συμμετρικών συναρτήσεων και αυτής της θεωρίας αναπαραστάσεων της S_n . Η σχέση μεταξύ τους καταγράφεται από τη λεγόμενη χαρακτηριστική απεικόνιση Frobenius $ch^n : Cl_n \rightarrow \Lambda_{\mathbb{C}}^n$ η οποία ορίζεται θέτοντας

$$ch^n(\chi) = \frac{1}{n!} \sum_{w \in S_n} \chi(w) p_w = \sum_{\mu \vdash n} \frac{1}{z_\mu} \chi(\mu) p_\mu$$

όπου p_w είναι η δυναμοπροσθετική συμμετρική συνάρτηση που αντιστοιχεί στον κυκλικό τύπο της w , για $\chi \in Cl_n$. Μια βασική ιδιότητα που μας πληροφορεί η σχέση (2.7) είναι ότι η χαρακτηριστική συνάρτηση απεικονίζει τους ανάγωγους χαρακτήρες της S_n στις συναρτήσεις Schur, δηλαδή

$$ch^n(\chi^\lambda) = s_\lambda$$

για $\lambda \vdash n$. Η ch^n είναι γραμμικός ισομορφισμός και ισομετρία, αν εφοδιάσουμε το $\Lambda_{\mathbb{C}}^n$ με ένα εσωτερικό γινόμενο που ορίζεται θέτοντας

$$\langle s_\lambda, s_\mu \rangle = \begin{cases} 1, & \text{αν } \lambda = \mu \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

για $\lambda, \mu \vdash n$ και επεκτείνοντας στο $\Lambda_{\mathbb{C}}^n$. Για περισσότερες πληροφορίες για τη χαρακτηριστική συνάρτηση παραπέμπουμε στα [30, 42, 35].

Θα περιγράψουμε κάποια βασικά στοιχεία για τη θεωρία αναπαραστάσεων της υπεροκταεδρικής ομάδας, ακολουθώντας το [3]. Κάθε προσημασμένη μετάθεση $w \in B_n$ μπορεί να γραφεί ως γινόμενο ξένων κύκλων ώστε αν $c = (a_1 a_2 \dots a_k)$ είναι στην ανάλυση αυτή, τότε και ο $\bar{c} = (\bar{a}_1 \bar{a}_2 \dots \bar{a}_k)$ θα είναι στην κυκλική αυτή ανάλυση της w . Αν οι c, \bar{c} δεν είναι ξένοι, τότε $c = \bar{c}$. Για παράδειγμα, για $n = 5$ και $w = \bar{2}13\bar{4}\bar{5}$, η κυκλική ανάλυση της w είναι

$$w = (1\bar{2}\bar{1}2)(\bar{3})(3)(\bar{4}4)(\bar{5}5).$$

Στη περίπτωση όπου οι c και \bar{c} είναι ξένοι, λέμε ότι ο $c\bar{c}$ είναι θετικός κύκλος της w μήκους k , ενώ αν $c = \bar{c}$ (στη περίπτωση αυτή ο k είναι αναγκαστικά άρτιος), τότε ο c λέγεται αρνητικός κύκλος της w μήκους $\frac{k}{2}$. Στο τρέχον παράδειγμα, η $w = \bar{2}13\bar{4}\bar{5}$ έχει τρεις αρνητικούς κύκλους, τους $(1\bar{2}\bar{1}2)$, $(\bar{4}4)$ και $(\bar{5}5)$ μήκους 2, 1 και 1 αντίστοιχα και ένα θετικό κύκλο, το $(\bar{3})(3)$ μήκους 1.

Ορισμός 3.4.1. Για $w \in B_n$, προσημασμένος κυκλικός τύπος (signed cycle type) της w ονομάζεται η διαμέριση με δυο μέρη $(\lambda, \mu) \vdash n$ όπου τα μέρη της λ (αντίστοιχα της μ) είναι τα μήκη των θετικών (αντίστοιχα αρνητικών) κύκλων στην κυκλική ανάλυση της w .

Ο κυκλικός τύπος της προσημασμένης μετάθεσης του τρέχοντος παραδείγματος είναι $((1), (2, 1, 1))$. Δυο προσημασμένες μεταθέσεις είναι συζυγείς αν και μόνο αν έχουν τον ίδιο κυκλικό τύπο. Κατά συνέπεια, οι κλάσεις συζυγίας και γι αυτό οι ανάγωγοι χαρακτήρες της B_n είναι σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία με τις διαμερίσεις με δύο μέρη του n . (βλ. για παράδειγμα [26, Θεώρημα 4.2.8] ή [30, Παράρτημα Β] ή [34, Πρόταση 1]) Επομένως το πλήθος των ανάγωγων χαρακτήρων της B_n ισούται με

$$\sum_{a+b=n} p(a)p(b),$$

όπου $p(k)$ είναι το πλήθος των διαμερίσεων του $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ και $p(0) = 1$ κατά σύμβαση.

Για $n \geq 1$ ορίζουμε

$$p_n^+(x, y) = p_n(x) + p_n(y) = \sum_{i \geq 1} (x_i^n + y_i^n)$$

και

$$p_n^-(x, y) = p_n(x) - p_n(y) = \sum_{i \geq 1} (x_i^n - y_i^n)$$

και για διαμέριση $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) \vdash n$ θέτουμε

$$p_\lambda^+(x, y) = p_{\lambda_1}^+ p_{\lambda_2}^+ \cdots p_{\lambda_k}^+ \quad \text{και} \quad p_\lambda^- = p_{\lambda_1}^- p_{\lambda_2}^- \cdots p_{\lambda_k}^-.$$

Τα στοιχεία p_λ^+ και p_λ^- είναι ομογενείς συμμετρικές συναρτήσεις βαθμού n στο x και y ξεχωριστά, δηλαδή είναι στοιχεία του $\Lambda_{\mathbb{C}}(x) \otimes \Lambda_{\mathbb{C}}(y)$, όπου $\Lambda_{\mathbb{C}}$ είναι η \mathbb{C} -άλγεβρα των συμμετρικών συναρτήσεων. Η χαρακτηριστική συνάρτηση ενός χαρακτήρα $\chi : B_n \rightarrow \mathbb{C}$ της B_n ορίζεται ως

$$\text{ch}(\chi) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{w \in B_n} \chi(w) p_w(x, y)$$

όπου $p_w(x, y) = p_\lambda^+(x, y) p_\mu^-(x, y)$ για $w \in B_n$ με προσημασμένο κυκλικό τύπο (λ, μ) . Αποδεικνύεται ότι η χαρακτηριστική συνάρτηση είναι \mathbb{C} -γραμμικός ισομορφισμός μεταξύ του $\text{Cl}_{\mathbb{C}}(B_n)$ και των ομογενών συναρτήσεων βαθμού n του $\Lambda_{\mathbb{C}}(x) \otimes \Lambda_{\mathbb{C}}(y)$. (βλ. [34, Θεώρημα 2])

Πρόταση 3.4.2. *Αν $\chi^{\lambda, \mu}$ είναι ο ανάγωγος χαρακτήρας της B_n που αντιστοιχεί στη διαμέριση με δυο μέρη $(\lambda, \mu) \vdash n$, τότε $\text{ch}(\chi^{\lambda, \mu}) = s_\lambda(x) s_\mu(y)$ ή ισοδύναμα*

$$\begin{aligned} s_\lambda(x) s_\mu(y) &= \frac{1}{2^n n!} \sum_{w \in B_n} \sum_{w \in B_n} \chi^{\lambda, \mu}(w) p_w(x, y) \\ &= \sum_{(\alpha, \beta) \vdash n} \frac{1}{z_\alpha z_\beta} \chi^{\lambda, \mu}(\alpha, \beta) p_\alpha^+(x, y) p_\beta^-(x, y) \end{aligned}$$

όπου $\chi^{\lambda, \mu}(\alpha, \beta)$ είναι η τιμή του $\chi^{\lambda, \mu}$ στην κλάση συζυγίας που αντιστοιχεί στη διαμέριση με δυο μέρη $(\alpha, \beta) \vdash n$.

Για την απόδειξη της πρότασης αυτής παραπέμπουμε στο άρθρο του Poirier [34, Πρόταση 3] και σημειώνουμε ότι είναι η ειδική περίπτωση για το σπειρωτό γινόμενο (wreath product) $Z_2 \wr \mathfrak{S}_n$ όπου Z_2 είναι η κυκλική ομάδα τάξης 2, το οποίο δεν είναι άλλο από την υπεροκταεδρική ομάδα B_n .

Κεφάλαιο 4

Η μονοτροπία των πολυωνύμων $I_n(x)$ και $I_n^B(x)$

4.1 Γεννήτριες συναρτήσεις των $I_n(x)$ και $I_n^B(x)$

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε τη συμπεριφορά των πολυωνύμων $I_n(x)$ και $I_n^B(x)$. Θυμίζουμε τους ορισμούς,

$$I_n(x) = \sum_{w \in I_n} x^{\text{des}(w)} = \sum_{Q \in \text{SYT}_n} x^{\text{des}(Q)}$$

όπου $I_n = \{w \in \mathfrak{S}_n : w^{-1} = w\}$ είναι το σύνολο των αυτοαντίστροφων μεταθέσεων της \mathfrak{S}_n και

$$I_n^B(x) = \sum_{w \in I_n^B} x^{\text{des}(w)} = \sum_{Q \in \text{SYB}_n} x^{\text{des}_B(Q)}$$

όπου $I_n^B = \{w \in B_n : w^{-1} = w\}$ είναι το σύνολο των αυτοαντίστροφων προσημασμένων μεταθέσεων της B_n . Ξεκινάμε την μελέτη μας από τις γεννήτριες συναρτήσεις των παραπάνω πολυωνύμων. Ο υπολογισμός της γεννήτριας συνάρτησης $I_n(x)$ εμφανίστηκε το 1985 από τους Désarménien και Foata [15] και αργότερα από τους Gessel και Reutenauer το 1993 [21] χρησιμοποιώντας διαφορετικές μεθόδους. Οι δική μας συμβαδίζει με αυτή των τελευταίων.

Θεώρημα 4.1.1 (Désarménien-Foata [15]).

$$\sum_{n \geq 0} I_n(x) \frac{t^n}{(1-x)^{n+1}} = \sum_{m \geq 0} \frac{x^m}{(1-t)^{m+1} (1-t^2)^{\binom{m+1}{2}}}. \quad (4.1)$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι για $S \subseteq [n-1]$ αν θέσουμε $x_1 = x_2 = \dots = x_m = 1$ και $x_l = 0$ για $l > m$ στη θεμελιώδη quasi-συμμετρική συνάρτηση έχουμε

$$F_{n,S}(1^m) = \left(\binom{m - \#S}{n} \right) = \binom{m - \#S + n - 1}{n}.$$

Επομένως,

$$\sum_{m \geq 1} F_{n,S}(1^m) x^{m-1} = \sum_{m \geq 1} \left(\binom{m - \#S}{n} \right) x^{m-1} = \frac{x^{\#S}}{(1-x)^{n+1}}. \quad (4.2)$$

Πράγματι, γνωρίζουμε ότι η γεννήτρια συνάρτηση των συνδυασμών με επανάληψη $\binom{n}{k}$ δίνεται από

$$\sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} x^k = \frac{1}{(1-x)^n}$$

και το $\binom{m-\#S+n-1}{n}$ είναι ίσο με το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης

$$a_0 + a_1 + \dots + a_n + \#S = m - 1$$

στο σύνολο των μη αρνητικών ακεραίων \mathbb{N} . Γι αυτό

$$\begin{aligned} \sum_{m \geq 1} \binom{m-\#S}{n} x^{m-1} &= \sum_{(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^{n+1}} x^{a_1 + a_2 + \dots + a_n + \#S} \\ &= x^{\#S} \cdot \sum_{k \geq 0} \binom{n+1}{k} x^k \\ &= \frac{x^{\#S}}{(1-x)^{n+1}} \end{aligned}$$

από όπου προκύπτει η (4.2). Για κάθε $w \in \mathfrak{S}_n$ θέτουμε $S = \text{Des}(w)$ στη (4.2) και παίρνουμε τη σχέση

$$\sum_{m \geq 1} F_{n, \text{Des}(w)}(1^m) x^{m-1} = \frac{x^{\text{des}(w)}}{(1-x)^{n+1}}. \quad (4.3)$$

Αθροίζοντας στη (4.3) στις $w \in I_n$ έπεται ότι

$$\frac{I_n(x)}{(1-x)^{n+1}} = \sum_{w \in I_n} \sum_{m \geq 1} F_{n, \text{Des}(w)}(1^m) x^{m-1} = \sum_{m \geq 1} \sum_{Q \in \text{SYT}_n} F_{n, \text{Des}(Q)}(1^m) x^{m-1}$$

όπου η τελευταία ισότητα έπεται από το πρόγραμμα 1.4.3.. Από το θεώρημα 2.4.6 όμως γνωρίζουμε ότι

$$s_\lambda(x) = \sum_{Q \in \text{SYT}(\lambda)} F_{n, \text{Des}(Q)}(x)$$

για κάθε διαμέριση $\lambda \vdash n$, όπου εδώ $x = (x_1, x_2, \dots)^1$. Κάνοντας αυτή την αντικατάσταση στο παραπάνω τύπο παίρνουμε τη σχέση

$$\frac{I_n(x)}{(1-x)^{n+1}} = \sum_{m \geq 1} \sum_{\lambda \vdash n} s_\lambda(1^m) x^{m-1}. \quad (4.4)$$

Αθροίζοντας για κάθε $n \geq 0$ στη σχέση (4.4) έχουμε

$$\sum_{n \geq 0} I_n(x) \frac{t^n}{(1-x)^{n+1}} = \sum_{m \geq 1} \sum_{\lambda \in \text{Par}} s_\lambda(1^m) x^{m-1} t^{|\lambda|} = \sum_{m \geq 1} \sum_{\lambda \in \text{Par}} s_\lambda(t, t, \dots, t, 0, 0, \dots) x^{m-1}$$

όπου από τη Πρόταση 2.3.4 έπεται ότι

$$\sum_{\lambda \in \text{Par}} s_\lambda(t, t, \dots, t, 0, 0, \dots) = \frac{1}{(1-t)^m (1-t^2)^{\binom{m}{2}}}$$

¹εδώ και σε ότι ακολουθεί δε θα κάνουμε διάκριση μεταξύ των δυο μορφών του x , θα είναι ξεκάθαρο κάθε φορά σε ποιά μορφή αναφερόμαστε

και γι αυτό

$$\sum_{n \geq 0} I_n(x) \frac{t^n}{(1-x)^{n+1}} = \sum_{m \geq 1} \frac{x^{m-1}}{(1-t)^m (1-t^2)^{\binom{m}{2}}}$$

η οποία είναι η ζητούμενη σχέση (4.1). □

Ακολουθώντας τα βήματα της προηγούμενης απόδειξης, μπορούμε να βρούμε και τη γεννήτρια συνάρτηση του $I_n^B(x)$.

Θεώρημα 4.1.2.

$$\sum_{n \geq 0} I_n^B(x) \frac{t^n}{(1-x)^{n+1}} = \sum_{m \geq 0} \frac{x^m}{(1-t)^{2m+1} (1-t^2)^{m^2}}. \quad (4.5)$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι για $\sigma \in \Sigma^B(n)$ αν θέσουμε $x_1 = x_2 = \dots = x_m = 1$ και $y_1 = 0, y_2 = y_3 = \dots = y_m = 1$ και $x_l = y_l = 0$ για $l > m$, έχουμε

$$F_{sDes(\sigma)}(1^m, 01^{m-1}) = \begin{cases} \left(\binom{m-\#wDes(\sigma)}{n} \right), & \text{αν το διάνυσμα-πρόσημο} \\ & \text{του } \sigma \text{ αρχίζει με } + \\ \left(\binom{m-\#wDes(\sigma)-1}{n} \right), & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Επομένως, για κάθε $w \in B_n$ θέτοντας $\sigma = sDes(w)$ από τη παραπάνω παρατήρηση και αυτή μετά τον ορισμό 3.2.1 παίρνουμε τη σχέση

$$\sum_{m \geq 1} F_{sDes(w)}(1^m, 01^{m-1}) x^{m-1} = \frac{x^{des_B(w)}}{(1-x)^{n+1}}. \quad (4.6)$$

Αθροίζοντας στη (4.6) στις $w \in I_n^B$ έπεται ότι

$$\frac{I_n^B(x)}{(1-x)^{n+1}} = \sum_{w \in I_n^B} \sum_{m \geq 1} F_{sDes(w)}(1^m, 01^{m-1}) x^{m-1} = \sum_{m \geq 1} \sum_{Q \in SYB_n} F_{sDes(Q)}(1^m, 01^{m-1}) x^{m-1}$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από τη Πρόταση 3.2.6. Από το Θεώρημα 3.2.6 όμως γνωρίζουμε ότι

$$s_\lambda(x) s_\mu(y) = \sum_{Q \in SYB(\lambda, \mu)} F_{sDes(Q)}(x, y)$$

για διαμερίσεις $\lambda, \mu \in \text{Par}$. Κάνοντας την αντικατάσταση στο παραπάνω τύπο παίρνουμε τη σχέση

$$\frac{I_n^B(x)}{(1-x)^{n+1}} = \sum_{m \geq 1} \sum_{(\lambda, \mu) \vdash n} s_\lambda(1^m) s_\mu(1^{m-1}) x^{m-1}. \quad (4.7)$$

Παίρνοντας τώρα τη γεννήτρια συνάρτηση στο αριστερό μέλος της (4.7) έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} I_n^B(x) \frac{t^n}{(1-x)^{n+1}} &= \sum_{m \geq 1} \sum_{\lambda, \mu \in \text{Par}} s_\lambda(1^m) s_\mu(1^{m-1}) x^{m-1} t^{|\lambda|+|\mu|} \\ &= \sum_{m \geq 1} \left(\sum_{\lambda \in \text{Par}} s_\lambda(\underbrace{t, t, \dots, t}_{m \text{ φορές}}, 0, 0, \dots) \right) \left(\sum_{\mu \in \text{Par}} s_\mu(\underbrace{t, t, \dots, t}_{m-1 \text{ φορές}}, 0, 0, \dots) \right) \\ &= \sum_{m \geq 1} \frac{x^{m-1}}{(1-t)^m (1-t^2)^{\binom{m}{2}} (1-t)^{m-1} (1-t^2)^{\binom{m-1}{2}}} \\ &= \sum_{m \geq 1} \frac{x^{m-1}}{(1-t)^{2m-1} (1-t^2)^{(m-1)^2}} \end{aligned}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει δυο φορές τη πρόταση 2.3.4 και έτσι έχουμε τη ζητούμενη σχέση (4.5). \square

Στη συνέχεια θα δείξουμε δυο τύπους οι οποίοι συνδέουν τα πολυώνυμα $I_n(x)$ και $I_n^B(x)$ με τα αντίστοιχα πολυώνυμα Euler $A_n(x)$ και $B_n(x)$.

Πρόταση 4.1.3 (Αθανασιάδης [5]). Για $n \geq 1$

$$I_n(x) = \frac{1}{n!} \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} (1-x)^{n-c(w^2)} A_{c(w^2)}(x) \quad (4.8)$$

όπου $c(\pi)$ είναι το πλήθος των κύκλων της μετάθεσης $\pi \in \mathfrak{S}_n$.

Απόδειξη. Στη Πρόταση 2.5.4 είδαμε ότι

$$s_\lambda = \frac{1}{n!} \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} \chi^\lambda(w) p_w$$

όπου χ^λ είναι ο ανάγωγος χαρακτήρας της \mathfrak{S}_n που αντιστοιχεί στη διαμέριση λ και p_w είναι η δυναμοπροσθετική συμμετρική συνάρτηση που αντιστοιχεί στον κυκλικό τύπο της $w \in \mathfrak{S}_n$. Παρατηρώντας ότι $p_w(1^m) = m^{c(w)}$, για $w \in \mathfrak{S}_n$ και θετικό ακέραιο m και αντικαθιστώντας το παραπάνω ανάπτυγμα στη σχέση (4.4) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \frac{I_n(x)}{(1-x)^{n+1}} &= \sum_{m \geq 1} \sum_{\lambda \vdash n} \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} \frac{1}{n!} \chi^\lambda(w) p_w(1^m) x^{m-1} \\ &= \sum_{m \geq 1} \frac{1}{n!} \sum_{\lambda \vdash n} \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} \chi^\lambda(w) m^{c(w)} x^{m-1} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{m \geq 1} \left(\sum_{w \in \mathfrak{S}_n} m^{c(w)} \sum_{\lambda \vdash n} \chi^\lambda(w) \right) x^{m-1}. \end{aligned}$$

Στη Πρόταση 2.5.5 όμως είδαμε ότι

$$\sum_{\lambda \vdash n} \chi^\lambda(w) = \#\{u \in \mathfrak{S}_n : u^2 = w\}$$

για κάθε $w \in \mathfrak{S}_n$. Επομένως,

$$\begin{aligned} \frac{I_n(x)}{(1-x)^{n+1}} &= \frac{1}{n!} \sum_{m \geq 1} \left(\sum_{w \in \mathfrak{S}_n} m^{c(w)} \#\{u \in \mathfrak{S}_n : u^2 = w\} \right) x^{m-1} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} \#\{u \in \mathfrak{S}_n : u^2 = w\} \left(\sum_{m \geq 1} m^{c(w)} x^{m-1} \right) \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} \#\{u \in \mathfrak{S}_n : u^2 = w\} \frac{A_{c(w)}(x)}{(1-x)^{c(w)+1}} \end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από την Πρόταση 1.1.3. Άρα,

$$I_n(x) = \frac{1}{n!} \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} \#\{u \in \mathfrak{S}_n : u^2 = w\} (1-x)^{n-c(w)} A_{c(w)}(x)$$

η οποία είναι η προς απόδειξη σχέση (4.8). □

Όπως και στη περίπτωση του Θεωρήματος 4.1.1 έτσι και εδώ τα βήματα της προηγούμενης απόδειξης, μας δίνουν μια αντίστοιχη της σχέσης (4.8) για την υπεροκταεδρική ομάδα.

Πρόταση 4.1.4 (Αθανασιάδης [5]). Για $n \geq 1$

$$I_n^B(x) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{w \in B_n} (1-x)^{n-c_+(w^2)} B_{c_+(w^2)}(x) \quad (4.9)$$

όπου $c_+(w)$ είναι το πλήθος των θετικών κύκλων της προσημασμένης μετάθεσης w .

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι αν θέσουμε $x_1 = x_2 = \dots = x_m = 1$ και $y_1 = 0, y_2 = \dots = y_m = 0$ και $x_l = y_l = 0$ για $l > m$ στα $p_n^+(x, y)$ και $p_n^-(x, y)$ παίρνουμε

$$p_n^+(1^m, 01^{m-1}) = 2m - 1 \quad \text{και} \quad p_n^-(1^m, 01^{m-1}) = 1.$$

Συνεπώς, για κάθε $w \in B_n$ ισχύει ότι

$$p_w(1^m, 01^{m-1}) = (2m - 1)^{c_+(w)}.$$

Στη Πρόταση 3.4.2 είδαμε ότι

$$s_\lambda(x) s_\mu(y) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{w \in B_n} \chi^{\lambda, \mu}(w) p_w(x, y)$$

όπου $\chi^{\lambda, \mu}$ είναι ο ανάγωγος χαρακτήρας της B_n που αντιστοιχεί στη διαμέριση με δυο μέρη (λ, μ) και $p_w = p_\lambda^+ p_\mu^-$. Αντικαθιστώντας το παραπάνω ανάπτυγμα στη σχέση (4.7) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \frac{I_n^B(x)}{(1-x)^{n+1}} &= \sum_{m \geq 1} \sum_{w \in B_n} \frac{1}{2^n n!} \sum_{(\lambda, \mu) \vdash n} \chi^{\lambda, \mu}(w) p_w(1^m, 01^{m-1}) x^{m-1} \\ &= \sum_{m \geq 1} \sum_{w \in B_n} \frac{1}{2^n n!} \sum_{(\lambda, \mu) \vdash n} \chi^{\lambda, \mu}(w) (2m - 1)^{c_+(w)} x^{m-1} \\ &= \frac{1}{2^n n!} \sum_{m \geq 1} \left(\sum_{w \in B_n} (2m - 1)^{c_+(w)} \sum_{(\lambda, \mu) \vdash n} \chi^{\lambda, \mu}(w) \right) x^{m-1}. \end{aligned}$$

Από τη παρατήρηση πριν τη Πρόταση 2.5.5 όμως γνωρίζουμε ότι

$$\sum_{(\lambda, \mu) \vdash n} \chi^{\lambda, \mu}(w) = \#\{u \in B_n : u^2 = w\}$$

για κάθε $w \in B_n$. Επομένως,

$$\begin{aligned} \frac{I_n^B(x)}{(1-x)^{n+1}} &= \frac{1}{2^n n!} \sum_{w \in B_n} \#\{u \in B_n : u^2 = w\} \left(\sum_{m \geq 1} (2m-1)^{c_+(w)} \chi^{m-1} \right) \\ &= \frac{1}{2^n n!} \sum_{w \in B_n} \#\{u \in B_n : u^2 = w\} \frac{B_{c_+(w)}(x)}{(1-x)^{c_+(w)+1}} \end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από την Πρόταση 3.1.3 (α). Άρα,

$$I_n^B(x) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{w \in B_n} \#\{u \in B_n : u^2 = w\} (1-x)^{n-c_+(w)} B_{c_+(w)}(x)$$

η οποία είναι η προς απόδειξη σχέση (4.9). \square

Οι σχέσεις (4.8) και (4.9) δίνουν νέες αποδείξεις για τη παλινδρομικότητα των πολυωνύμων $I_n(x)$ και $I_n^B(x)$ (βλ. Προτάσεις 1.4.8 και 3.2.7 αντίστοιχα).

Πόρισμα 4.1.5. Για $n \geq 1$

$$(α) \quad I_n(x) = x^{n-1} I_n\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$(β) \quad I_n^B(x) = x^n I_n^B\left(\frac{1}{x}\right).$$

Απόδειξη. Από τη πρόταση (4.1.3) έχουμε

$$\begin{aligned} x^{n-1} I_n\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{1}{n!} \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{n-c(w^2)} x^{n-1} A_{c(w^2)}\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} x^{c(w^2)-n} (x-1)^{n-c(w^2)} x^{n-1} x^{1-c(w^2)} A_{c(w^2)}(x) \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} (-1)^{n-c(w^2)} (1-x)^{n-c(w^2)} A_{c(w^2)}(x) \\ &= I_n(x) \end{aligned}$$

διότι $n - c(w^2) \equiv 0 \pmod{2}$, για κάθε $w \in \mathfrak{S}_n$ και χρησιμοποιώντας τη παλινδρομικότητα του πολυωνύμου Euler (βλ. πρόταση 1.1.2) και έτσι έχουμε το (α).

Ομοίως, για το (β) από τη πρόταση (4.1.4) έχουμε

$$\begin{aligned} x^n I_n^B\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{1}{2^n n!} \sum_{w \in B_n} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{n-c_+(w^2)} x^n B_{c_+(w^2)}\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{1}{2^n n!} \sum_{w \in B_n} x^{c_+(w^2)-n} (x-1)^{n-c_+(w^2)} x^n x^{-c_+(w^2)} B_{c_+(w^2)}(x) \\ &= \frac{1}{2^n n!} \sum_{w \in B_n} (-1)^{n-c_+(w^2)} (1-x)^{n-c_+(w^2)} B_{c_+(w^2)}(x) \\ &= I_n^B(x) \end{aligned}$$

διότι $n - c_+(w^2) \equiv 0 \pmod{2}$ για κάθε $w \in B_n$ και χρησιμοποιώντας τη παλινδρομικότητα το B-πολυωνύμου Euler. \square

4.2 Αναδρομικοί τύποι για τα $I_n(x)$ και $I_n^B(x)$

Έστω $I_{n,k} = \#\{w \in \mathfrak{S}_n : \text{des}(w) = k\}$ και $I_{n,k}^B = \#\{w \in B_n : \text{des}_B(w) = k\}$ για κάθε $0 \leq k \leq n-1$ και $0 \leq k \leq n$, αντίστοιχα. Χρησιμοποιώντας τις γεννίτριες συναρτήσεις που υπολογίσαμε στη προηγούμενη παράγραφο θα αποδείξουμε αναδρομικούς τύπους για τις παραπάνω ακολουθίες. Ο αναδρομικός τύπος για την $(I_{n,k})_{0 \leq k \leq n-1}$ υπολογίστηκε το 2006 από τους V. Guo και J. Zeng [23]. Θα παρουσιάσουμε τη μέθοδό τους και θα τη χρησιμοποιήσουμε για να αποδείξουμε έναν ανάλογο αναδρομικό τύπο για την ακολουθία $(I_{n,k}^B)_{0 \leq k \leq n}$.

Θεώρημα 4.2.1 (Guo-Zeng [23]). *Για $n \geq 3$ και $k \geq 0$ οι αριθμοί $I_{n,k}$ ικανοποιούν τον παρακάτω αναδρομικό τύπο :*

$$\begin{aligned} nI_{n,k} &= (k+1)I_{n-1,k} + (n-k)I_{n-1,k-1} + ((k+1)^2 + n-2)I_{n-2,k} \\ &\quad + (2k(n-k-1) - n+3)I_{n-2,k-1} + ((n-k)^2 + n-2)I_{n-2,k-2}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

όπου $I_{n,k} = 0$ για $k < 0$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-t)^{m+1}(1-t^2)^{\binom{m+1}{2}}} &= \sum_{k \geq 0} \sum_{\substack{0 \leq j \leq k \\ j \equiv 0 \pmod{2}}} \left(\binom{\binom{m+1}{2}}{j} \right) \binom{m+1}{k-j} t^k \\ &= \sum_{k \geq 0} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \left(\binom{\binom{m+1}{2}}{j} \right) \binom{m+1}{k-2j} t^k. \end{aligned}$$

Επομένως, εξισώνοντας τους συντελεστές στα δυο μέλη της (4.1) προκύπτει ότι

$$\frac{I_n(x)}{(1-x)^{n+1}} = \sum_{m \geq 0} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left(\binom{\binom{m+1}{2}}{j} \right) \binom{m+1}{n-2j} x^m. \quad (4.10)$$

Θέτουμε

$$s(n, m) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left(\binom{\binom{m+1}{2}}{j} \right) \binom{m+1}{n-2j}$$

για $n \geq 0$ και έχουμε

$$\sum_{n \geq 0} s(n, m) t^n = \frac{1}{(1-t)^{m+1}(1-t^2)^{\binom{m+1}{2}}}. \quad (4.11)$$

Παραγωγίζουμε τη (4.11) και παίρνουμε

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} ns(n, m) t^{n-1} &= \left(\frac{m+1}{1-t} + 2 \frac{\binom{m+1}{2}}{1-t^2} \right) \frac{1}{(1-t)^{m+1}(1-t^2)^{\binom{m+1}{2}}} \\ &= \left(\frac{m+1}{1-t} + 2 \frac{\binom{m+1}{2}}{1-t^2} \right) \sum_{n \geq 0} s(n, m) t^n \\ &= \frac{(2\binom{m+1}{2} + m+1)t + m+1}{1-t^2} \sum_{n \geq 0} s(n, m) t^n \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα

$$\sum_{n \geq 0} (n+1)s(n+1, m)t^n - \sum_{n \geq 2} (n-1)s(n-1, m)t^n = (2 \binom{m+1}{2} + m+1) \sum_{n \geq 1} s(n-1, m)t^n + (m+1) \sum_{n \geq 0} s(n, m)t^n.$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές του t^n στη παραπάνω ισότητα, για $n \geq 3$ προκύπτει ο εξής αναδρομικός τύπος για την ακολουθία $s(n, m)$:

$$ns(n, m) = (m+1)s(n-1, m) + (m(m+1) + m+n-1)s(n-2, m). \quad (4.12)$$

Αντικαθιστούμε τη σχέση (4.12) στη (4.10) και έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{nI_n(x)}{(1-x)^{n+1}} &= \sum_{m \geq 0} (m+1)s(n-1, m)x^m + \sum_{m \geq 0} (m(m-1) + m+n-1)s(n-2, m)x^m \\ &= x \sum_{m \geq 1} ms(n-1, m)x^{m-1} + \sum_{m \geq 0} s(n-1, m)x^m \\ &\quad + x^2 \sum_{m \geq 2} m(m+1)s(n-2, m)x^{m-2} \\ &\quad + x \sum_{m \geq 1} ms(n-2, m)x^{m-1} + (n-1) \sum_{m \geq 0} s(n-2, m)x^m \\ &= x \left(\frac{I_{n-1}(x)}{(1-x)^n} \right)' + \frac{I_{n-1}(x)}{(1-x)^n} + x^2 \left(\frac{I_{n-2}(x)}{(1-x)^{n-1}} \right)'' \\ &\quad + x \left(\frac{I_{n-2}(x)}{(1-x)^{n-1}} \right)' + (n-1) \frac{I_{n-2}(x)}{(1-x)^{n-1}}. \end{aligned}$$

Αναπτύσσοντας τη παραπάνω σχέση σύμφωνα με τους τύπους

$$\begin{aligned} (\alpha) \quad \left(\frac{I_a(x)}{(1-x)^{a+1}} \right)' &= \frac{I_a'(x)}{(1-x)^{a+1}} + (a+1) \frac{I_a(x)}{(1-x)^{a+2}} \\ (\beta) \quad \left(\frac{I_a(x)}{(1-x)^{a+1}} \right)'' &= \frac{I_a''(x)}{(1-x)^{a+1}} + 2(a+1) \frac{I_a'(x)}{(1-x)^{a+2}} + (a+1)(a+2) \frac{I_a(x)}{(1-x)^{a+3}} \end{aligned}$$

για κάθε $a \in \mathbb{Z}_{>0}$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} nI_n(x) &= (x-x^2)I_{n-1}'(x) + (1+(n-1)x)I_{n-1}(x) + x^2(1-x)^2I_{n-2}''(x) \\ &\quad + (3+(2n-5)x)x(1-x)I_{n-2}'(x) + (n-1)(1+x+(n-2)x^2)I_{n-2}(x). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Εξισώνοντας του συντελεστές του x^k στη σχέση (4.13) προκύπτει ο ζητούμενος αναδρομικός τύπος (4.10). \square

Θεώρημα 4.2.2. Για κάθε $n \geq 3$ και $k \geq 0$ οι αριθμοί $I_{n,k}^B$ ικανοποιούν τον εξής αναδρομικό τύπο:

$$\begin{aligned} nI_{n,k}^B &= (2k+1)I_{n-1,k}^B + (2n-2k+1)I_{n-1,k-1}^B + (n-1+2k(k+1))I_{n-2,k}^B \\ &\quad + (2(n-1)+4(n-k-1)(k-1))I_{n-2,k-1}^B \\ &\quad + ((2n-3)(n-1)+2(k-2)(k-2n+1))I_{n-2,k-2}^B \end{aligned} \quad (4.14)$$

όπου $I_{n,k} = 0$ για $k < 0$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$\frac{1}{(1-t)^{2m+1}(1-t^2)^{m^2}} = \sum_{k \geq 0} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \binom{m^2}{j} \binom{2m+1}{k-2j} t^k.$$

Επομένως, εξισώνοντας τους συντελεστές του t^n στα δυο μέλη της (4.5) και χρησιμοποιώντας το προηγούμενο υπολογισμό έπεται ότι

$$\frac{I_n^B(x)}{(1-x)^{n+1}} = \sum_{m \geq 0} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{m^2}{j} \binom{2m+1}{n-2j} x^m. \quad (4.13)$$

Θέτουμε

$$r(n, m) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{m^2}{j} \binom{2m+1}{n-2j}$$

για $n \geq 0$ και έχουμε

$$\sum_{n \geq 0} r(n, m) t^n = \frac{1}{(1-t)^{2m+1}(1-t^2)^{m^2}}. \quad (4.14)$$

Παραγωγίζοντας τη (4.14) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} r(n, m) t^{n-1} &= \frac{2m+1}{(1-t)^{2m+2}(1-t^2)^{m^2}} + \frac{2m^2 t}{(1-t)^{2m+1}(1-t^2)^{m^2+1}} \\ &= \left(\frac{2m+1}{1-t} + \frac{2m^2 t}{1-t^2} \right) \sum_{n \geq 0} r(n, m) t^n \\ &= \frac{(2m^2 + 2m + 1)t + 2m + 1}{1-t^2} \sum_{n \geq 0} r(n, m) t^n \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} (n+1)r(n+1, m)t^n - \sum_{n \geq 2} (n-1)r(n-1, m)t^n &= (2m^2 + 2m + 1) \sum_{n \geq 1} r(n-1, m)t^n \\ &\quad + (2m+1) \sum_{n \geq 0} r(n, m)t^n. \end{aligned}$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές του t^n στη παραπάνω ισότητα, για $n \geq 3$ προκύπτει ο εξής αναδρομικός τύπος για την ακολουθία $r(n, m)$:

$$nr(n, m) = (2m+1)r(n-1, m) + (2m^2 + 2m + n - 1)r(n-2, m). \quad (4.15)$$

Αντικαθιστούμε τη σχέση (4.15) στη (4.13) και έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{nI_n^B(x)}{(1-x)^{n+1}} &= \sum_{m \geq 0} (2m+1)r(n-1)x^m + \sum_{m \geq 0} (2m^2+2m+n-1)r(n-2, m)x^m \\
&= 2 \sum_{m \geq 1} mr(n-1, m)x^m + \sum_{m \geq 0} r(n-1, m)x^m + 2 \sum_{m \geq 1} m^2r(n-2, m)x^m \\
&\quad + 2 \sum_{m \geq 1} mr(n-2, m)x^m + (n-1) \sum_{m \geq 0} r(n-2, m)x^m \\
&= 2 \sum_{m \geq 1} mr(n-1, m)x^m + \sum_{m \geq 0} r(n-1, m)x^m + 2 \sum_{m \geq 1} m(m-1)r(n-2, m)x^m \\
&\quad + 4 \sum_{m \geq 1} mr(n-2, m)x^m + (n-1) \sum_{m \geq 0} r(n-2, m)x^m \\
&= 2x \left(\frac{I_n^B(x)}{(1-x)^{n+1}} \right)' + \frac{I_{n-1}^B(x)}{(1-x)^n} + 2x^2 \left(\frac{I_{n-2}^B(x)}{(1-x)^{n-1}} \right)'' \\
&\quad + 4x \left(\frac{I_{n-2}^B(x)}{(1-x)^{n-1}} \right)' + (n-2) \frac{I_{n-2}^B(x)}{(1-x)^{n-1}}.
\end{aligned}$$

Αναπτύσσοντας την παραπάνω σχέση σύμφωνα με τους τύπους (α) και (β) της προηγούμενης απόδειξης, οι οποίοι παραμένουν ίδιοι προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
nI_n^B(x) &= 2x(1-x)I_{n-1}^{B'}(x) + 2nxI_{n-1}^B(x) + (1-x)I_{n-1}^B(x) + 2x^2(1-x)^2I_{n-2}^{B''}(x) \\
&\quad + 4(n-1)(1-x)x^2I_{n-2}^{B'}(x) + 2n(n-1)x^2I_{n-2}^B(x) + 4x(1-x)^2I_{n-2}^{B'}(x) \\
&\quad + 4(n-1)x(1-x)I_{n-2}^B(x) + (n-1)(1-x)^2I_{n-2}^B(x) \\
&= (2n-1)xI_{n-1}^B(x) + I_{n-1}^B(x) - 2x^2I_{n-1}^{B'}(x) + 2xI_{n-1}^{B'}(x) \\
&\quad + (2n-3)(n-1)x^2I_{n-2}^B(x) + 2(n-1)xI_{n-2}^B(x) + (n-1)I_{n-2}^B(x) \\
&\quad - 4(n-2)x^3I_{n-2}^{B'}(x) + 4(n-3)x^2I_{n-2}^{B'}(x) + 4xI_{n-2}^{B'}(x) \\
&\quad + 2x^4I_{n-2}^{B''}(x) - 4x^3I_{n-2}^{B''}(x) + 2x^2I_{n-2}^{B''}(x).
\end{aligned}$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές του x^k στην παραπάνω σχέση προκύπτει ο ζητούμενος τύπος (4.14). \square

4.3 Η μονοτροπία των $I_n(x)$ και $I_n^B(x)$

Με τους αναδρομικούς τύπους (4.10) και (4.14) μπορούμε να πάρουμε μια ακόμη απόδειξη της παλινδρομικότητας των ακολουθιών $(I_{n,k})_{0 \leq k \leq n-1}$ και $(I_{n,k}^B)_{0 \leq k \leq n}$.

Πρόταση 4.3.1. (α) Για κάθε $0 \leq k \leq n-1$, $I_{n,k} = I_{n,n-1-k}$.

(β) Για κάθε $0 \leq k \leq n$, $I_{n,k}^B = I_{n,n-k}^B$.

Απόδειξη. (α) Θα κάνουμε ισχυρή επαγωγή στο n . Για $n \leq 3$, παρατηρούμε ότι η $(I_{n,k})_{0 \leq k \leq n-1}$ είναι παλινδρομική. Έστω $n > 3$ και υποθέτουμε ότι η ακολουθία $(I_{m,k})_{0 \leq k \leq m-1}$ είναι παλινδρομική για κάθε $m < n$. Κάνοντας την αντικατάσταση $k \rightarrow n-1-k$ στο τύπο (4.10) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
nI_{n,n-1-k} &= (n-k)I_{n-1,n-1-k} + (k+1)I_{n-1,n-2-k} + ((n-k)^2 + n-2)I_{n-2,n-1-k} \\
&\quad + (2k(n-1-k) - n + 3)I_{n-2,n-2-k} + ((k+1)^2 + n-2)I_{n-2,n-3-k}.
\end{aligned}$$

Όμως, από την επαγωγική υπόθεση γνωρίζουμε ότι

$$\begin{aligned} I_{n-1,n-1-k} &= I_{n-1,k-1} \\ I_{n-1,n-2-k} &= I_{n-1,k} \\ I_{n-2,n-1-k} &= I_{n-2,k-2} \\ I_{n-2,n-2-k} &= I_{n-2,k-1} \\ I_{n-2,n-3-k} &= I_{n-2,k} \end{aligned}$$

και γι' αυτό ο προηγούμενος τύπος παίρνει την μορφή

$$\begin{aligned} nI_{n,n-1-k} &= (n-k)I_{n-1,k-1} + (k+1)I_{n-1,k} + ((n-k)^2 + n-2)I_{n-2,k-2} \\ &\quad + (2k(n-1-k) - n+3)I_{n-2,k-1} + ((k+1)^2 + n-2)I_{n-2,k} \end{aligned}$$

το οποίο είναι ίσο με $nI_{n,k}$ και έχουμε το ζητούμενο.

- (β) Όμοια με το (α), θα κάνουμε ισχυρή επαγωγή στο n . Για $n \leq 3$ παρατηρούμε ότι η $(I_{n,k}^B)_{0 \leq k \leq n}$ είναι παλινδρομική. Έστω $n > 3$ και υποθέτουμε ότι η ακολουθία $(I_{m,k}^B)_{0 \leq k \leq m}$ είναι παλινδρομική για κάθε $m < n$. Κάνοντας την αντικατάσταση $k \rightarrow n-k$ στο τύπο (4.14) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} nI_{n,n-k}^B &= (2n-2k+1)I_{n-1,n-k}^B + (2k+1)I_{n-1,n-k-1}^B \\ &\quad + ((2n-3)(n-1) + 2(k-2)(k-2n+1))I_{n-2,n-k}^B \\ &\quad + (2(n-1) + 4(n-k-1)(k-1))I_{n-2,n-k-1}^B \\ &\quad + (n-1 + 2k(k+1))I_{n-2,n-k-2}^B. \end{aligned}$$

Όμως, από την επαγωγική υπόθεση γνωρίζουμε ότι

$$\begin{aligned} I_{n-1,n-k}^B &= I_{n-1,k-1}^B \\ I_{n-1,n-k-1}^B &= I_{n-1,k}^B \\ I_{n-2,n-k}^B &= I_{n-2,k-2}^B \\ I_{n-2,n-k-1}^B &= I_{n-2,k-1}^B \\ I_{n-2,n-k-2}^B &= I_{n-2,k}^B \end{aligned}$$

και γι' αυτό ο προηγούμενος τύπος παίρνει την μορφή

$$\begin{aligned} nI_{n,n-k}^B &= (2n-2k+1)I_{n-1,k-1}^B + (2k+1)I_{n-1,k}^B \\ &\quad + ((2n-3)(n-1) + 2(k-2)(k-2n+1))I_{n-2,k-2}^B \\ &\quad + (2(n-1) + 4(n-k-1)(k-1))I_{n-2,k-1}^B + (n-1 + 2k(k+1))I_{n-2,k}^B \end{aligned}$$

το οποίο είναι ίσο με $nI_{n,k}^B$ και έχουμε το ζητούμενο. □

Στόχος μας τώρα είναι να αποδείξουμε ότι οι ακολουθίες $(I_{n,k})_{0 \leq k \leq n-1}$ και $(I_{n,k}^B)_{0 \leq k \leq n}$ είναι μονότροπες. Θυμίζουμε ότι μια ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών $(a_k)_{0 \leq k \leq n}$ ονομάζεται μονότροπη, αν υπάρχει $0 \leq m \leq n$ ώστε

$$a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_m \geq a_{m+1} \geq \dots \geq a_n.$$

Επισημαίνουμε επίσης ότι η k -οστή γραμμή του τριγώνου του Pascal, δηλαδή η ακολουθία των διωνυμικών συντελεστών αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα μονότροπης ακολουθίας. Για περισσότερα παραδείγματα, παραπέμπουμε στα [10].

Η απόδειξη που θα δώσουμε είναι των Guo και Zeng [23] και ξεκινάει με την εξής βασική παρατήρηση (Λήμμα 3.1 στο [23]).

Λήμμα 4.3.2 (Guo-Zeng [23]). *Για x_0, x_1, \dots, x_n και a_0, a_1, \dots, a_n πραγματικούς αριθμούς ώστε*

$$(α) \quad x_0 \geq x_1 \geq \dots \geq x_n$$

$$(β) \quad a_0 + a_1 + \dots + a_i \geq 0, \text{ για κάθε } i$$

ισχύει ότι

$$a_0 x_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \geq 0.$$

Απόδειξη. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι

$$\sum_{i=0}^n a_i x_i = \sum_{i=0}^n (x_i - x_{i+1})(a_0 + a_1 + \dots + a_i)$$

όπου $x_{n+1} = 0$. Το ζητούμενο έπεται των (α) και (β). \square

Θεώρημα 4.3.3 (Guo-Zeng [23]). *Η ακολουθία $(I_{n,k})_{0 \leq k \leq n-1}$ είναι μονότροπη.*

Απόδειξη. Λόγω της παλινδρομικότητας της $(I_{n,k})_{0 \leq k \leq n-1}$ αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$I_{n,0} \leq I_{n,1} \leq \dots \leq I_{n, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}. \quad (4.16)$$

Θα κάνουμε ισχυρή επαγωγή ως προς n . Από τον υπολογισμό στην αρχή της Παραγράφου 1.3 παρατηρούμε ότι η (4.16) ισχύει για $n \leq 6$. Έστω $n > 6$ και υποθέτουμε ότι η (4.16) ισχύει για κάθε $m < n$. Κάνοντας την αντικατάσταση $k \rightarrow k-1$ στον τύπο (4.10) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} nI_{n,k-1} &= kI_{n-1,k-1} + (n-k+1)I_{n-1,k-2} + (k^2+n-2)I_{n-2,k-1} \\ &\quad + (2(k-1)(n-k) - n + 3)I_{n-3,k-2} + ((n-k+1)^2 + n - 2)I_{n-2,k-3}. \end{aligned}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τον παραπάνω τύπο από τον (4.10) έπεται ότι

$$\begin{aligned} n(I_{n,k} - I_{n,k-1}) &= B_0 I_{n,k} + B_1 I_{n-1,k-1} + B_2 I_{n-1,k-2} \\ &\quad + C_0 I_{n-2,k} + C_1 I_{n-2,k-1} + C_2 I_{n-2,k-2} + C_3 I_{n-2,k-3} \end{aligned}$$

όπου

$$B_0 = k + 1$$

$$B_1 = n - 2k$$

$$B_2 = -n + k - 1$$

$$C_0 = n + k^2 + 2k - 1$$

$$C_1 = 2nk - 3k^2 - 2k - 2n + 5$$

$$C_2 = n^2 - 4nk + 3k^2 + 4n - 2k - 5$$

$$C_3 = -(n-k+1)^2 - n + 2.$$

Από την επαγωγική υπόθεση γνωρίζουμε ότι

$$I_{n-1,k} \geq I_{n-1,k-1} \geq I_{n-1,k-2}$$

για κάθε $0 \leq k \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$. Επίσης, παρατηρούμε ότι $B_0 \geq 0$, $B_0 + B_1 = n - k + 1 \geq 0$ και $B_0 + B_1 + B_2 = 0$. Επομένως, από το Λήμμα 4.3.2 έπεται ότι $B_0 I_{n,k} + B_1 I_{n-1,k-1} + B_2 I_{n-1,k-2} \geq 0$ για κάθε $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$. Μένει λοιπόν να αποδείξουμε ότι

$$C_0 I_{n-2,k} + C_1 I_{n-2,k-1} + C_2 I_{n-2,k-2} + C_3 I_{n-2,k-3} \geq 0$$

για κάθε $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$.

Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις. Στην πρώτη περίπτωση υποθέτουμε ότι $1 \leq k < \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$. Από την επαγωγική υπόθεση γνωρίζουμε ότι

$$I_{n-2,k} \geq I_{n-2,k-1} \geq I_{n-2,k-2} \geq I_{n-2,k-3}.$$

Επίσης, παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} C_0 &= (k+1)^2 + n - 2 \geq 0 \\ C_0 + C_1 &= (2k-1)(n-k-1) + k + 3 \geq 0 \\ C_0 + C_1 + C_2 &= (n-k+1)^2 + n - 2 \geq 0 \\ C_0 + C_1 + C_2 + C_3 &= 0. \end{aligned}$$

Άρα, από το λήμμα 4.3.2 έπεται ότι

$$C_0 I_{n-2,k} + C_1 I_{n-2,k-1} + C_2 I_{n-2,k-2} + C_3 I_{n-2,k-3} \geq 0.$$

Υποθέτουμε τώρα ότι $k = \frac{n-1}{2}$. Αν ο n είναι άρτιος, τότε από την επαγωγική υπόθεση έπεται ότι

$$I_{n-2,k-1} = I_{n-2,k} \geq I_{n-2,k-2} \geq I_{n-2,k-3}$$

και ο προηγούμενος υπολογισμός μας πληροφορεί το ζητούμενο. Αν ο n είναι περιττός, τότε από την επαγωγική υπόθεση και την παλινδρομικότητα έπεται ότι

$$I_{n-2,k-1} \geq I_{n-2,k} = I_{n-2,k-2} \geq I_{n-2,k-3}.$$

Παρατηρούμε ότι $C_1 = \frac{(n-3)(n-7)}{4} \geq 0$, αφού $n \geq 7$. Επομένως, από το Λήμμα 4.3.2 και τους προηγούμενους υπολογισμούς έπεται ότι

$$C_0 I_{n-2,k} + C_1 I_{n-2,k-1} + C_2 I_{n-2,k-2} + C_3 I_{n-2,k-3} \geq 0.$$

Με άλλα λόγια, δείξαμε ότι $I_{n,k} \geq I_{n,k-1}$ για κάθε $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ το οποίο είναι το ζητούμενο. \square

Θεώρημα 4.3.4. Η ακολουθία $(I_{n,k}^B)_{0 \leq k \leq n}$ είναι μονότροπη.

Απόδειξη. Θα ακολουθήσουμε τα βήματα της προηγούμενης απόδειξης. Λόγω της παλινδρομικότητας αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$I_{n,0}^B \leq I_{n,1}^B \leq \dots \leq I_{n, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^B. \quad (4.17)$$

Θα κάνουμε ισχυρή επαγωγή στο n . Από τους υπολογισμούς που κάναμε στη σελίδα 45 έπεται ότι η (4.17) ισχύει για $n \leq 1$.² Έστω $n > 1$ και υποθέτουμε ότι η (4.17) ισχύει για $m < n$. Κάνοντας την αντικατάσταση $k \rightarrow k-1$ στο τύπο (4.14) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} nI_{n,k-1}^B &= (2k-1)I_{n-1,k-1}^B + (2n-2k+3)I_{n-1,k-2}^B + (n-1+2k(k-1))I_{n-2,k-1}^B \\ &\quad + (2(n-1)+4(n-k)(k-2))I_{n-2,k-2}^B \\ &\quad + ((2n-3)(n-1)+2(k-3)(k-2n))I_{n-2,k-3}^B. \end{aligned}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τον παραπάνω τύπο από τον (4.14) έπεται ότι

$$\begin{aligned} n(I_{n,k}^B - I_{n,k-1}^B) &= A_0 I_{n-1,k}^B + A_1 I_{n-1,k-1}^B + A_2 I_{n-1,k-2}^B \\ &\quad + D_0 I_{n-2,k}^B + D_1 I_{n-2,k-1}^B + D_2 I_{n-2,k-2}^B + D_3 I_{n-2,k-3}^B \end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned} A_0 &= 2k+1 \\ A_1 &= 2n-4k+2 \\ A_2 &= -2n+2k-3 \\ D_0 &= n+2k^2+2k-1 \\ D_1 &= 4nk-3n-6k^2+2k+3 \\ D_2 &= 2n^2-8nk+9n+6k^2-10k+1 \\ D_3 &= -2n^2+4nk-7n-2k^2+6k-3. \end{aligned}$$

Από την επαγωγική υπόθεση γνωρίζουμε ότι

$$I_{n-1,k}^B \geq I_{n-1,k-1}^B \geq I_{n-1,k-2}^B$$

για κάθε $0 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Πιο συγκεκριμένα, από την επαγωγική υπόθεση έχουμε τις παραπάνω ανισότητες για $0 \leq k \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$. Όμως, στη περίπτωση όπου ο n είναι περιττός παρατηρούμε ότι $\frac{n-1}{2} = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ και γι' αυτό οι παραπάνω ανισότητες ισχύουν για $0 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ και αν ο n είναι άρτιος παρατηρούμε ότι $\frac{n}{2} = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1$ και γι' αυτό λόγω παλινδρομικότητας έπεται ότι

$$I_{n-1, \frac{n}{2}}^B = I_{n-1, \frac{n}{2}-1}^B \geq I_{n-1, \frac{n}{2}-2}^B$$

που σημαίνει ότι οι παραπάνω ανισότητες ισχύουν για $0 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Επίσης, παρατηρούμε ότι $A_0 = 2k+1 \geq 0$, $A_0 + A_1 = 2(n-k)+3 \geq 0$ και $A_0 + A_1 + A_2 = 0$. Επομένως, από το Λήμμα 4.3.2 έπεται ότι

$$A_0 I_{n-1,k}^B + A_1 I_{n-1,k-1}^B + A_2 I_{n-1,k-2}^B \geq 0$$

για κάθε $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Μένει να αποδείξουμε ότι

$$D_0 I_{n-2,k}^B + D_1 I_{n-2,k-1}^B + D_2 I_{n-2,k-2}^B + D_3 I_{n-2,k-3}^B \geq 0$$

²για την ακρίβεια, έπεται ότι ισχύει για $n \leq 6$, αλλά χρειαζόμαστε μόνο το $n = 1$ για την επαγωγή

για $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις. Στη πρώτη περίπτωση υποθέτουμε ότι $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$. Από την επαγωγική υπόθεση γνωρίζουμε ότι

$$I_{n-2,k}^B \geq I_{n-2,k-1}^B \geq I_{n-2,k-2}^B \geq I_{n-2,k-3}^B.$$

Επίσης, παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} D_0 &= n + 2k^2 + 2k - 1 \geq 0 \\ D_0 + D_1 &= 2(k-1)(n-2k) + 2 \geq 0 \\ D_0 + D_1 + D_2 &= 2n(n-2k) + n + 6(n-k) + 2k^2 + 3 \geq 0 \\ D_0 + D_1 + D_2 + D_3 &= 0. \end{aligned}$$

Άρα, από το Λήμμα 4.3.2 έπεται ότι

$$D_0 I_{n-2,k}^B + D_1 I_{n-2,k-1}^B + D_2 I_{n-2,k-2}^B + D_3 I_{n-2,k-3}^B \geq 0.$$

Υποθέτουμε τώρα ότι $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Αν ο n είναι περιττός, τότε από την επαγωγική υπόθεση έπεται ότι

$$I_{n-2,k}^B = I_{n-2,k-1}^B \geq I_{n-2,k-2}^B \geq I_{n-2,k-3}^B$$

και ο προηγούμενος υπολογισμός μας πληροφορεί το ζητούμενο. Αν ο n είναι άρτιος, τότε από την επαγωγική υπόθεση και την παλινδρομικότητα έπεται ότι

$$I_{n-2,k-1}^B \geq I_{n-2,k}^B = I_{n-2,k-2}^B \geq I_{n-2,k-3}^B.$$

Στη περίπτωση αυτή έχουμε $D_1 = \frac{1}{2}(n^2 - 4n + 6) > 0$. Επομένως, από το λήμμα 4.3.2 και τους προηγούμενους υπολογισμούς έπεται ότι

$$D_0 I_{n-2,k}^B + D_1 I_{n-2,k-1}^B + D_2 I_{n-2,k-2}^B + D_3 I_{n-2,k-3}^B \geq 0.$$

Με άλλα λόγια, δείξαμε ότι $I_{n,k}^B \geq I_{n,k-1}^B$, για κάθε $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ το οποίο είναι το ζητούμενο. \square

4.4 Μη λογαριθμική κοιλότητα και γ -μη αρνητικότητα των $I_n(x)$ και $I_n^B(x)$

Θυμίζουμε ότι μια ακολουθία μη αρνητικών πραγματικών αριθμών $(a_k)_{0 \leq k \leq n}$ ονομάζεται λογαριθμικά κοίλη (log-concave) αν

$$a_{k-1} a_{k+1} \leq a_k^2$$

για κάθε $1 \leq k \leq n-1$. Το επόμενο Λήμμα εμφανίζεται ως Πρόταση 6 στο [6].

Λήμμα 4.4.1. *Το γινόμενο ενός μονότροπου και λογαριθμικά κοίλου πολυώνυμου με ένα λογαριθμικά κοίλο πολυώνυμο είναι λογαριθμικά κοίλο.*

Κάνοντας χρήση του Λήμματος 4.4.1 οι Barnabei et al. έδειξαν ότι το πολυώνυμο $I_n(x)$ δεν είναι γενικά λογαριθμικά κοίλο.

Πρόταση 4.4.2 (Barnabei et al. [6]). Η ακολουθία $(I_{n,k})_{0 \leq k \leq n-1}$ δεν είναι λογαριθμικά κοίλη για κάθε $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Απόδειξη. Από τη σχέση (4.10) έπεται ότι

$$\frac{I_n(x)}{(1-x)^{n+1}} = \sum_{m \geq 0} s(n, m)x^m$$

όπου

$$s(n, m) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left(\binom{m+1}{j} \right) \left(\binom{m+1}{n-2j} \right)$$

για κάθε $m \geq 0$. Αυτό σημαίνει ότι $I_n(x)q_n(x) = p_n(x)$, όπου

$$q_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n+k}{k} x^k$$

και

$$p_n(x) = \sum_{m=0}^{n-1} s(n, m)x^m.$$

Εύκολα παρατηρεί κανείς ότι το $q_n(x)$ είναι λογαριθμικά κοίλο πολυώνυμο. Συνεπώς, αν υποθέσουμε ότι το $I_n(x)$ είναι λογαριθμικό κοίλο, τότε επειδή είναι και παλινδρομικό από το Λήμμα 4.4.1 έπεται ότι το $p_n(x)$ είναι και αυτό λογαριθμικά κοίλο, πράγμα αδύνατο αφού

$$s(45, 1)^2 = 304704 < 307970 = s(45, 0)s(45, 2).$$

□

Με όμοιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι η ακολουθία $(I_{n,k}^B)_{0 \leq k \leq n}$ δεν είναι γενικά λογαριθμικά κοίλη.

Πρόταση 4.4.3. Η ακολουθία $(I_{n,k}^B)_{0 \leq k \leq n}$ δεν είναι γενικά λογαριθμικά κοίλη.

Απόδειξη. Από τη σχέση (4.13) έπεται ότι

$$\frac{I_n^B(x)}{(1-x)^{n+1}} = \sum_{m \geq 0} r(n, m)x^m$$

όπου

$$r(n, m) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \left(\binom{m^2}{j} \right) \left(\binom{2m+1}{n-2j} \right)$$

για κάθε $m \geq 0$. Αυτό σημαίνει ότι $I_n^B(x)q_n(x) = p_n(x)$, όπου

$$q_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n+k}{k} x^k$$

και

$$p_n(x) = \sum_{m=0}^n r(n, m)x^m.$$

Όπως και στην προηγούμενη απόδειξη, παρατηρεί κανείς ότι το $q_n(x)$ είναι λογαριθμικά κοίλο πολυώνυμο. Συνεπώς, αν υποθέσουμε ότι το $I_n^B(x)$ είναι λογαριθμικό κοίλο, τότε επειδή είναι και παλινδρομικό από το Λήμμα 4.4.1 έπεται ότι το p_n είναι και αυτό λογαριθμικά κοίλο, πράγμα αδύνατο αφού

$$r(81, 2)^2 = 134456071547238691600 < 137602301286519473140 = r(89, 1)r(89, 3).$$

□

Τέλος, παρατηρώντας ότι

$$\begin{aligned} I_1(x) &= 1 \\ I_2(x) &= 1 + x \\ I_3(x) &= (1 + x)^2 \\ I_4(x) &= (1 + x)^3 + x(1 + x) \\ I_5(x) &= (1 + x)^4 + 2x(1 + x) + 2x^2 \\ I_6(x) &= (1 + x)^6 + 4x(1 + x)^3 + 6x^2(1 + x) \end{aligned}$$

ένα φυσιολογικό ερώτημα που σκέφτεται κανείς είναι αν το πολυώνυμο $I_n(x)$ είναι γ -μη αρνητικό.

Εικασία 4.4.4 (Guo-Zeng [23]). Το πολυώνυμο $I_n(x)$ είναι γ -μη αρνητικό για κάθε $n \geq 1$.

Για να υποστηρίξουν την παραπάνω εικασία οι Guo και Zeng παρατήρησαν ότι λόγω της παλινδρομικότητας του $I_n(x)$ έχουμε

$$I_n(x) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} I_{n,k} x^k (1 + x^{n-1-2k}), & \text{αν } n \equiv 0 \pmod{2} \\ I_{n, \frac{n-1}{2}} x^{\frac{n-1}{2}} + \sum_{k=0}^{\frac{n-3}{2}} I_{n,k} x^k (1 + x^{n-1-2k}), & \text{αν } n \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}.$$

Όμως, από το δεύτερο τύπο της Άσκηση 1 του [14] γνωρίζουμε ότι

$$x^n + y^n = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^j \frac{n}{n-j} \binom{n-j}{j} (xy)^j (x+y)^{n-2j}. \quad (4.18)$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο (4.18) προκύπτει η έκφραση

$$I_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{n,k} x^k (1+x)^{n-1-2k}$$

όπου

$$a_{n,k} = \begin{cases} \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \frac{n-2j-1}{n-k-j-1} \binom{n-k-j-1}{k-j} I_{n,j}, & k < \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \\ I_{n,k} + \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \frac{n-2j-1}{n-k-j-1} \binom{n-k-j-1}{k-j} I_{n,j}, & k = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \end{cases}.$$

Αφού υπολόγισαν μια αναδρομική σχέση για τα $a_{n,k}$ οι Guo και Zeng παρατήρησαν ότι η εικασία 4.4.4 θα αποδειχτεί αν κάποιος δείξει ότι $a_{2n+1,n} \geq 0$ και

$a_{2n+2,n} \geq 0$, όπου

$$a_{2n+1,n} = (-1)^n I_{2n+1}(-1) = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^{n-k} I_{2n+1,k}$$

$$a_{2n+2,n} = (-1)^n I'_{2n+2}(-1) = \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{n+1-k} k I_{2n+2,k}.$$

Όμοια, λόγω της παλινδρομικότητας του $I_n^B(x)$ μπορούμε να γράψουμε

$$I_n^B(x) = \begin{cases} I_{n,\frac{n}{2}}^B x^{\frac{n}{2}} + \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} I_{n,k}^B x^k (1+x^{n-2k}), & \text{αν } n \equiv 0 \pmod{2} \\ \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} I_{n,k}^B x^k (1+x^{n-2k}), & \text{αν } n \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

και χρησιμοποιώντας τον τύπο (4.18) προκύπτει η έκφραση

$$I_n^B(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} b_{n,k} x^k (1+x)^{n-2k}$$

όπου

$$b_{n,k} = \begin{cases} \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \frac{n-2j}{n-k-j} \binom{n-k-j}{k-j} I_{n,j}^B, & k < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \\ I_{n,k}^B + \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \frac{n-2j}{n-k-j} \binom{n-k-j}{k-j} I_{n,j}^B, & k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \end{cases}.$$

Μερικές τιμές των $b_{n,k}$ φαίνονται παρακάτω:

$$\begin{aligned} I_1^B(x) &= 1 + x \\ I_2^B(x) &= (1+x)^2 + 2x \\ I_3^B(x) &= (1+x)^3 + 6x(1+x) \\ I_4^B(x) &= (1+x)^4 + 13x(1+x)^2 + 8x^2 \\ I_5^B(x) &= (1+x)^5 + 23x(1+x)^3 + 48x^2(1+x) \\ I_6^B(x) &= (1+x)^6 + 37x(1+x)^4 + 168x^2(1+x)^2 + 54x^3. \end{aligned}$$

Οι παραπάνω υπολογισμοί και το γεγονός ότι τα πολυώνυμα $I_n(x)$ και $I_n^B(x)$ μοιράζονται τις ίδιες ιδιότητες μας οδηγούν στην εξής εικασία.

Εικασία 4.4.5. Το πολυώνυμο $I_n^B(x)$ είναι γ -μη αρνητικό για κάθε $n \geq 1$.

Βιβλιογραφία

- [1] X.A. Αθανασιάδης, *Αλγεβρική και Απαραριθμητική Συνδυαστική*, Τόμος Α, Αθήνα, 2016.
- [2] X.A. Αθανασιάδης, *Εισαγωγή στη Συνδυαστική των Μερικώς Διατεταγμένων Συνόλων*, Αθήνα, 2006.
- [3] R.M. Adin, C.A. Athanasiadis, S. Elizalde and Y. Roichman, *Character formulas and descents for the hyperoctahedral group*, *Adv. in Applied Math.* **87** (2017), 128–169.
- [4] D. André, *Développement de $\sec x$ and $\operatorname{tg} x$* , *C.R. Math. Acad. Sci. Paris* **88** (1879), 965–979.
- [5] C.A. Athanasiadis, *Gamma-positivity in combinatorics and geometry*, in preparation.
- [6] M. Barnabei, F. Bonetti and M. Silimbani, *The descent statistic on involutions is not log-concave*, *European J. Combin.* **30** (2009), 11–16.
- [7] E.A. Bender and D.E. Knuth, *Enumeration of plane partitions*, *J. Combin. Theory Series A* **13** (1972), 40–54.
- [8] N. Bergeron and C. Hohlweg, *Coloured peak algebras and Hopf algebras*, *J. Algebr. Comb.* **24** (2006), 299–330.
- [9] A. Björner and F. Brenti, *Combinatorics of Coxeter Groups*, *GTM* **231**, Springer, 2005.
- [10] M. Bona, *Combinatorics of Permutations*, *Discrete Mathematics and Its Applications*, Chapman and Hall/CRC, second edition, 2012.
- [11] P. Brändén, *Unimodality, log-concavity, real-rootedness and beyond*, *Handbook of Enumerative Combinatorics*, Chapman and Hall/CRC (2015), 437–483.
- [12] F. Brenti, *Log-concave and unimodal sequences in algebra, combinatorics, and geometry: an update*, In *Jerusalem combinatorics '93*, **178** of *Contemp. Math.*, 71–89. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.
- [13] C.-O. Chow, *Noncommutative symmetric functions of type B*, Ph.D. thesis, MIT, 2001.

- [14] L. Comtet, *Advanced Combinatorics*, Reidel, Boston, 1974.
- [15] J. Désarménien and D. Foata, *Fonctions symétriques et séries hypergéométriques basiques multivariées*, Bull. Soc. Math. France **113** (1985), 3–22.
- [16] W.M.B. Dukes, *Permutation statistics on involutions*, European J. Combin. **28** (2007), 186–198.
- [17] D. Foata and M.-P. Schützenberger, *Théorie géométrique des polynômes eulériens*, Lecture Notes in Mathematics **138**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970.
- [18] D. Foata and V. Strehl, *Euler numbers and variations of permutations*, In *Colloquio Internazionale sulle Teorie Combinatorie (Roma, 1973)*, Tomo I, pages 119–131. Atti dei Convegni Lincei, No. 17. Accad. Naz. Lincei, Rome, 1976.
- [19] W. Fulton, *Young Tableaux*, London Mathematical Society Student Texts **35**, Cambridge University Press, second edition, 1996.
- [20] I.M. Gessel, *Multipartite P-partitions and inner products of skew Schur functions*, Contemp. Math. **34** (1984), 289–301.
- [21] I.M. Gessel and C. Reutenauer, *Counting permutations with given cycle structure and descent set*, J. Combin. Theory Series A **64** (1993), 189–215.
- [22] R.L. Graham, D.E. Knuth and O. Patashnik, *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science*, Addison-Wesley, second edition, 1994.
- [23] V.J.W. Guo and J. Zeng, *The Eulerian distribution on involutions is indeed unimodal*, J. Combin. Theory Series A **113** (2006), 1061–1071.
- [24] S.K. Hsiao and T.K. Petersen, *Colored posets and colored quasisymmetric functions*, Ann. Comb. **14** (2010), 251–289.
- [25] J.E. Humphreys, *Reflection Groups and Coxeter Groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **29**, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [26] G.D. James and A. Kerber, *The representation theory of the symmetric group*, Encyclopedia of mathematics and its applications, **16** Addison-Wesley, 1981.
- [27] G.D. James and M. Leibeck, *Representations and characters of groups*, Cambridge University Press, second edition, 2001.
- [28] D.E. Knuth, *Permutations, matrices, and generalized Young tableaux*, Pacific J. Math. **34** (1970), 709–727.
- [29] D.E. Littlewood, *The theory of group characters*, Oxford University Press, second edition, 1950.
- [30] I.G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, second edition, Oxford University Press, Oxford, 1995.

-
- [31] T.K. Petersen, *A note on three types of quasisymmetric functions*, Electron. J. Combin. **12** (2005), Research Paper 61, 10 pp. (electronic).
- [32] T.K. Petersen, *Enriched P -partitions and peak algebras*, Adv. Math. **209** (2007), 561–610.
- [33] T.K. Petersen, *Eulerian Numbers*, Birkhäuser Advanced Texts, Birkhäuser, 2015.
- [34] S. Poirier, *Cycle type and descent set in wreath products*, Discrete Math. **180** (1998), 315–343.
- [35] B.E. Sagan, *The Symmetric Group: representations, combinatorial algorithms, and symmetric functions*, GTM **203**, Springer, second edition, 2001.
- [36] M.-P. Schützenberger, *Quelques remarques sur une construction de Schensted*, Math. Scand. **12** (1963), 117–128.
- [37] L.W. Shapiro, W.J. Woan, and S. Getu, *Runs, slides and moments*, SIAM J. Algebraic Discrete Methods **4** (1985), 459–466.
- [38] R.P. Stanley, *Ordered structures and partitions*, Ph.D. thesis, Harvard Univ., 1971.
- [39] R.P. Stanley, *Some aspects of groups acting on finite posets*, J. Combin. Theory Series A **32** (1981), 132–161.
- [40] R.P. Stanley, *Log-concave and unimodal sequences in algebra, combinatorics, and geometry*, Ann. New York Acad. Sci. **576** (1989), 500–535.
- [41] R.P. Stanley, *Enumerative Combinatorics, vol. 1*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **49**, Cambridge University Press, second edition, Cambridge, 2011.
- [42] R.P. Stanley, *Enumerative Combinatorics, vol. 2*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **62**, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [43] D.W. Stanton and D.E. White, *A Schensted algorithm for rim hook tableaux*, J. Combin. Theory Series A **40** (1983), 211–247.
- [44] J.R. Stembridge, *Coxeter cones and their h -vectors*, Adv. Math. **217** (2008), 1935–1961.
- [45] V. Strehl, *Symmetric Eulerian distributions for involutions*, Séminair Lotharingien Combinatoire **1**, Strasbourg 1980, Publications de l'I.R.M.A. 140/S-02, Strasbourg, 1981.