Γραμμική Άλγεβρα Ι
Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2016

Απαντήσεις

1. (α) Οι πίνακες AB και BA προφανώς δεν ορίζονται, άρα ούτε και το άθροισμά τους $AB + BA$. Ο πίνακας $AB^t + A^tB$ δεν ορίζεται αφού ο AB^t είναι 3×3, ενώ ο A^tB είναι 4×4. Αντιθέτως, οι πίνακες $AB^t + BA^t$ και $A^tB + B^tA$ ορίζονται και είναι 3×3 και 4×4, αντίστοιχα.

(β) Με τη γνωστή διαδικασία βρίσκουμε ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3/5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/5 \end{pmatrix}$$

γραμμοϊσοδύναμο του A. Συμπεραίνουμε ότι το ομογενές σύστημα $Ax = 0$ είναι ισοδύναμο με εκείνο με εξισώσεις $x_1 - 3x_4/5 = 0$, $x_2 - 2x_4 = 0$ και $x_3 - x_4/5 = 0$ και συνεπώς ότι έχει σύνολο λύσεων

$$\{ \begin{pmatrix} 3\lambda/5 \\ 2\lambda \\ \lambda/5 \\ \lambda \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \}.$$

Εργαζόμενοι ομοίως, βρίσκουμε το σύνολο λύσεων

$$\{ \begin{pmatrix} -14\lambda \\ \lambda \\ -4\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \}$$

του ομογενούς συστήματος $Bx = 0$.

(γ) Αν υπήρχε τέτοιος αντιστρέψιμος πίνακας Q, τότε τα συστήματα $Ax = 0$ και $Bx = 0$ θα είχαν το ίδιο σύνολο λύσεων, αφού $Bx = 0 \Leftrightarrow (QA)x = 0 \Leftrightarrow Q(Ax) = 0 \Leftrightarrow Ax = 0$. Αφού, όπως φαίνεται από τις απαντήσεις μας στο ερώτημα (β), αυτό δε συμβαίνει, η απάντηση είναι αρνητική.

(δ) Δείξαμε στο (β) ότι οι πίνακες A και B έχουν μονοδιάστατο πυρήνα. Από αυτό συμπεραίνουμε ότι $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B) = 4 - 1 = 3$. Από τη θεωρία έπεται ότι υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες $P \in \mathbb{R}^{4\times4}$ και $Q \in \mathbb{R}^{3\times3}$ τέτοιοι ώστε $B = QAP$.

2. (α) Με τη γνωστή διαδικασία υπολογίζουμε ότι

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 11/2 & 3 & 3/2 \\ -5 & -3 & -1 \\ -3/2 & -1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

και συμπεραίνουμε ότι

$$(A^t)^{-1} \ = \ (A^{-1})^t \ = \ \begin{pmatrix} 11/2 & -5 & -3/2 \\ 3 & -3 & -1 \\ 3/2 & -1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

και ότι

$$(AA^t)^{-1} \ = \ (A^t)^{-1}A^{-1} \ = \ \begin{pmatrix} 11/2 & -5 & -3/2 \\ 3 & -3 & -1 \\ 3/2 & -1 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11/2 & 3 & 3/2 \\ -5 & -3 & -1 \\ -3/2 & -1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$= \ \begin{pmatrix} 115/2 & 33 & 14 \\ 33 & 19 & 8 \\ 14 & 8 & 7/2 \end{pmatrix}.$$

(β1) Από την ισότητα $A^2 = -B^2$ παίρνουμε $(\det(A))^2 = \det(A^2) = \det(-B^2) = (-1)^n \det(B^2) = -\det(B^2) = -(\det(B))^2$. Αφού οι πίνακες A, B έχουν στοιχεία πραγματικούς αριθμούς, οι ορίζουσές τους είναι πραγματικοί αριθμοί το άθροισμα των τετραγώνων των οποίων είναι ίσο με μηδέν. Από αυτό έπεται ότι $\det(A) = \det(B) = 0$, δηλαδή ότι οι A, B δεν είναι αντιστρέψιμοι.

(β2) Ένα τέτοιο παράδειγμα δίνεται από τους

$$A \ = \ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B \ = \ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. (α) Παρατηρούμε ότι η διάσταση του U είναι ίση με την τάξη του πίνακα

$$A \ = \ \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Προφανώς $\mathrm{rank}(A) = 1$ αν $\lambda = 1$. Για $\lambda \neq 1$ βρίσκουμε με τη γνωστή διαδικασία τον γραμμοϊσοδύναμο του A πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

και συμπεραίνουμε ότι $\mathrm{rank}(A) = 3$ αν $\lambda = -2$ και $\mathrm{rank}(A) = 4$ για τις υπόλοιπες τιμές του λ. Συνολικά, έχουμε

$$\dim(U) \;=\; \begin{cases} 1, & \text{αν} \quad \lambda = 1, \\ 3, & \text{αν} \quad \lambda = -2, \\ 4, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

και συμπεραίνουμε ότι ο U είναι ισόμορφος με τον $\mathbb{R}^{4\times 1}$ για $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ και με τον $\mathbb{R}^{3\times 1}$ μόνο για $\lambda = -2$.

(β) Τέτοιος υπόχωρος υπάρχει μόνο για $\lambda = 1$. Πράγματι, αφού $U \cap W = \{0\}$, θα πρέπει να έχουμε $\dim(U) + \dim(W) = \dim(U + W) \leq \dim(\mathbb{R}^{2\times 2}) = 4$ και συνεπώς $\dim(U) \leq 2$. Από την απάντησή μας στο ερώτημα (α) προκύπτει ότι αυτό συμβαίνει μόνο για $\lambda = 1$. Αντιστρόφως, αν $\lambda = 1$ (οπότε $\dim(U) = 1$), τότε οποιοσδήποτε υπόχωρος W του $\mathbb{R}^{2\times 2}$ που δεν περιέχει τον U έχει την ιδιότητα $U \cap W = \{0\}$. Ένας τέτοιος υπόχωρος διάστασης δύο είναι εκείνος των διαγώνιων 2×2 πινάκων.

4. (α) Υπολογίζουμε ότι $S(1) = 0$, $S(x) = 1$, $S(x^2) = 0$ και συμπεραίνουμε ότι ο πίνακας της S ως προς τις κανονικές διατεταγμένες βάσεις $(1, x, x^2)$ και $(1, x)$ είναι ο

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ομοίως, από τις ισότητες $T(1) = 1 + x$, $T(x) = x + x^2$ βρίσκουμε ότι ο πίνακας της T ως προς τις κανονικές διατεταγμένες βάσεις $(1, x)$ και $(1, x, x^2)$ είναι ο

$$B \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(β) Έχουμε $\dim(\ker(S)) = 3 - \mathrm{rank}(S) = 3 - \mathrm{rank}(A) = 2$ και $\dim(\mathrm{Im}\,(T)) = \mathrm{rank}(T) = \mathrm{rank}(B) = 2$.

(γ) Οι πίνακες των $S \circ T$ και $T \circ S$ ως προς τις κανονικές διατεταγμένες βάσεις είναι οι

$$AB \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad BA \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

αντίστοιχα. Αφού οι πίνακες αυτοί δεν είναι αντιστρέψιμοι, ούτε η $S \circ T$ ούτε και η $T \circ S$ είναι αντιστρέψιμη γραμμική απεικόνιση.