Γραμμική Άλγεβρα Ι
Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2011

Απαντήσεις

1. (α) Με τη συνήθη διαδικασία βρίσκουμε ότι η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του A είναι η

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(β) Γνωρίζουμε ότι το σύνολο των λύσεων του ομογενούς γραμμικού συστήματος $Ax = O$ ταυτίζεται με εκείνο του $A'x = O$. Το τελευταίο έχει λύσεις $x = (x_1\, x_2\, x_3\, x_4)^t \in \mathbb{R}^{4\times 1}$ με $x_2 = x_4 = 0$ και $x_1 = x_3 = \lambda \in \mathbb{R}$.

(γ) Υπενθυμίζουμε ότι η διάσταση του χώρου των στηλών (δηλαδή η τάξη) ενός πίνακα A είναι ίση με τη διάσταση του χώρου των γραμμών του A (δηλαδή με την τάξη του A^t) και ότι ο χώρος των γραμμών (άρα και η διάσταση αυτού) ενός πίνακα δε μεταβάλλεται εκτελώντας στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών. Επομένως, η ζητούμενη διάσταση είναι ίση με αυτή του χώρου των γραμμών της ανηγμένης κλιμακωτής μορφής A' του A, δηλαδή με το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών του A'. Στην περίπτωσή μας, το πλήθος αυτό είναι ίσο με 3.

(δ) *Πρώτος τρόπος*. Στο (γ) υπολογίσαμε ότι $\mathrm{rank}(A) = 3 < 4$, οπότε $\det(A) = 0$. Άρα ισχύει $\det(AB) = \det(A)\det(B) = 0$ για κάθε πίνακα $B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ και συνεπώς το σύστημα $(AB)x = O$ έχει μη τετριμμένη λύση.

Δεύτερος τρόπος. Βρήκαμε στο (β) ότι το σύστημα $Ax = O$ έχει τη μη τετριμμένη λύση $\xi = (1\,0\,1\,0)^t$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις. Αν ο B είναι αντιστρέψιμος, τότε το σύστημα $(AB)x = O$ έχει τη μη τετριμμένη λύση $x = B^{-1}\xi$, αφού για $x = B^{-1}\xi$ έχουμε $Bx = \xi$ και συνεπώς $(AB)x = A(Bx) = A\xi = O$. Αν ο B δεν είναι αντιστρέψιμος, τότε το $Bx = O$ έχει μη τετριμμένη λύση η οποία προφανώς είναι λύση και του $(AB)x = O$.

2. (α) Ο πίνακας μετάβασης από τη βάση $\mathbf{u}$ στη $\mathbf{v}$ είναι ο

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Με τη γνωστή διαδικασία βρίσκουμε ότι

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Έστω $B = (T : \mathbf{u}, \mathbf{u})$ ο πίνακας της T ως προς τη βάση $\mathbf{u}$. Σύμφωνα με τον τύπο αλλαγής βάσης, έχουμε

$$\begin{aligned} B \;=\; P\,(T : \mathbf{v}, \mathbf{v})\,P^{-1} \;&=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(β) Έστω

$$A \;=\; (S : \mathbf{u}, \mathbf{u}) \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Οι γραμμικές απεικονίσεις $S, T : V \to V$ έχουν πίνακες A, B ως προς τη βάση $\mathbf{u}$ του V, αντίστοιχα. Άρα, ο πίνακας της $S + T : V \to V$ ως προς τη $\mathbf{u}$ είναι ο

$$A + B \;=\; \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Αφού οι χώροι $\ker(S + T)$ και $\ker(A + B)$ είναι ισόμορφοι, αρκεί να υπολογίσουμε τη διάσταση του δεύτερου. Λύνοντας το σύστημα $(A + B)x = O$ με τη γνωστή μέθοδο βρίσκουμε ότι ο χώρος $\ker(A + B)$ έχει διάσταση 1 και ότι παράγεται από τον πίνακα-στήλη $(1 \;\; -1 \;\; -1)^t$.

(γ) Οι γραμμικές απεικονίσεις $S, T : V \to V$ έχουν πίνακες A, B ως προς τη βάση $\mathbf{u}$ του V, αντίστοιχα. Άρα, ο πίνακας της $S \circ T : V \to V$ ως προς τη $\mathbf{u}$ είναι ο AB και εκείνος της $T \circ S : V \to V$ ως προς τη $\mathbf{u}$ είναι ο BA. Εκτελώντας τις πράξεις βρίσκουμε ότι $AB = BA$ και συμπεραίνουμε ότι $S \circ T = T \circ S$, δηλαδή ότι ισχύει $S(T(x)) = T(S(x))$ για κάθε $x \in V$.

3. (α) Σωστό. Από τη δοσμένη σχέση προκύπτει ότι $A(A + I_n) = (A + I_n)A = 3I_n$ και συνεπώς ότι ο πίνακας $A + I_n$ είναι αντιστρέψιμος, με αντίστροφο τον $(1/3) \cdot A$.

(β) Λάθος. Για τους πίνακες

$$A \;=\; I_2 \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ισχύει $A^2 + B^2 = O$, αλλά $\det(AB) = \det(B) = 1$.

(γ) Λάθος. Ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^{3\times 3}$ που αποτελείται από τους 3×3 άνω τριγωνικούς πίνακες έχει διάσταση 6 (γιατί;) και συνεπώς δεν περιέχει γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο με επτά στοιχεία.

(δ) Λάθος. Αν υπήρχαν τέτοιοι υπόχωροι U και V, τότε θα είχαμε $\dim(U + V) = \dim(V) + \dim(U) - \dim(U \cap V) = 3 + 2 - 0 = 5$. Όμως ο $U + V$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ και συνεπώς $\dim(U + V) \leq 4$.

(ε) Σωστό. Αφού $\ker(T) \subseteq \mathrm{Im}(T)$, έχουμε $\dim\ker(T) \leq \dim\mathrm{Im}(T)$. Επομένως, χρησιμοποιώντας τη θεμελιώδη εξίσωση της διάστασης, βρίσκουμε ότι $2\dim\ker(T) \leq \dim\ker(T) + \dim\mathrm{Im}(T) = \dim\mathbb{R}^n = n$, οπότε $\dim\ker(T) \leq n/2$.

4. (α) Για τον εγκλεισμό $\ker(T) \subseteq \ker(R)$ πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε $x \in \ker(T)$ ισχύει $x \in \ker(R)$. Πράγματι, έστω $x \in \ker(T)$. Τότε $x \in U$ και $T(x) = 0$, οπότε $R(x) = S(T(x)) = S(0) = 0$. Έπεται ότι $x \in \ker(R)$. Ομοίως, για τον εγκλεισμό $\mathrm{Im}(R) \subseteq \mathrm{Im}(S)$ θεωρούμε τυχαίο στοιχείο $z \in \mathrm{Im}(R)$ και δείχνουμε ότι $z \in \mathrm{Im}(S)$ ως εξής. Αφού $z \in \mathrm{Im}(R)$, υπάρχει $x \in U$ τέτοιο ώστε $z = R(x) = S(T(x))$. Θέτοντας $y = T(x)$ έχουμε $y \in V$ και $z = S(y)$, οπότε $z \in \mathrm{Im}(S)$.

(β) Αφού η $R : U \to W$ είναι ισομορφισμός διανυσματικών χώρων έχουμε $\dim(U) = \dim(W)$, άρα $\dim(U) = \dim(V) = \dim(W)$. Έχουμε επίσης ότι η R είναι 1–1 και επί, οπότε $\ker(R) = \{0\}$ και $\mathrm{Im}(R) = W$. Από τις σχέσεις αυτές και το αποτέλεσμα του (α) προκύπτει ότι $\ker(T) = \{0\}$ και $\mathrm{Im}(S) = W$, δηλαδή ότι η T είναι 1–1 και ότι η S είναι επί. Όμως, μια γραμμική απεικόνιση μεταξύ διανυσματικών χώρων της ίδιας πεπερασμένης διάστασης είναι 1–1 αν και μόνο αν η απεικόνιση αυτή είναι επί (γιατί;). Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι η T είναι επίσης επί και ότι η S είναι επίσης 1–1 και επομένως ότι οι S και T είναι ισομορφισμοί διανυσματικών χώρων.